

Sztochasztika félévizsga

Felsőbb matematika villamosmérnököknek A vizsgakurzus

2013. május 30. 8:00. Munkaidő: 100 perc. Minden feladat 10 pontot ér.

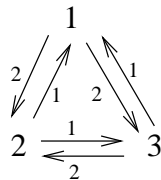
1. Mórckának Egy számítógépes kalandjátékban egy szint teljesítéséhez egy szörnyet kellene időre legyőzni, ám ez csak $\frac{3}{10}$ valószínűséggel sikerül. $\frac{3}{10}$ valószínűséggel ugyanis, mire a szörnyet legyőzi, megjelenik egy ugyanilyen szörny, a maradék $\frac{4}{10}$ valószínűséggel pedig kettő is. Ezeket aztán szintén le kell győzni, ami alatt szintén érkehetnek újabbak stb . . . , az előzményektől függetlenül.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy Mórckica előbb-utóbb teljesíti a szintet?

2. Egy telefonközpontba az egymást követő hívások azonos, exponenciális eloszlású véletlen idők elteltével futnak be, az előzményektől függetlenül, percenként átlagosan 2. Adjunk nagy eltérés becslést annak a valószínűségére, hogy egy nap alatt legalább 3600 hívás befut.

Segítség: A μ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I_{Exp}(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$ (ha $x > 0$). A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I_{Poi}(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$ (ha $x > 0$).

3. Az alábbi ábra egy folytonos idejű (időben homogén) Markov lánc lehetséges egy lépéses átmeneteit mutatja, a hozzájuk tartozó urgási rátákkal együtt.



- a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!
 - b.) Ha a Markov lánc kezdetben a 2 állapotban van, mi a közelítő valószínűsége, hogy 100 időegység eltelte után a 3 állapotban találjuk?
 - c.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz a rendszer az 1-es és 2-es állapotok valamelyikében?
4. Egy probléma megoldási folyamatának időigénye órákban mérve abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t/T}}{T}, & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

ahol T ismeretlen pozitív paraméter. Néhány ilyen folyamat időigényét megmértük, és a következő eredményeket kaptuk (órákban): 6.8; 5.4; 7.5; 6.0; 7.3; 5.1; 11.8. Adjunk maximum likelihood becslést a T paraméter értékére.

5. Egy elektronikai alkatrész ellenállása a gyártó szerint legfeljebb $10m\Omega$. Hogy az állítást ellenőrizzük, méréseket végeztünk. A mérés azonban hibával terhelt: az egyes mérések eredményei egymástól független normális eloszlású véletlen számok, amiknek várható értéke a tényleges ellenállás, szórása pedig azonos (bár ismeretlen). A következő értékeket mértük ($m\Omega$ -ban): 10.1; 9.8; 10.0; 10.2; 9.7; 10.1. Döntsünk 95%-os szinten a gyártó állításáról, mint hipotézisről!