## 1. feladat (11 pont)

$$y' = \frac{1+y^2}{(x+3)^5\ \operatorname{arctg}^2 y}$$

a) Oldja meg a differenciálegyenletet! (Elég az implicit alak is.)

b) Adjon meg egy olyan tartományt, melybe eső kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható.

*Megoldás:*

a.) $x \neq -3$ és $y \neq 0$

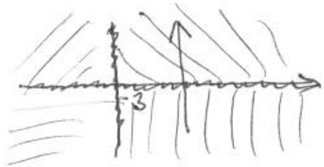
$$\int \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg}^2 y \, dy = \int \frac{1}{(x+3)^5} \, dx \quad 3$$

$$f' f^2 \qquad\qquad f' f^{-5}$$

$$\frac{\operatorname{arctg}^3 y}{3} = \frac{(x+3)^{-4}}{-4} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$2 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 1$$

b.)



(A bejelölt 4 tartomány bármelyike megfelel.

Pl. $x < -3$ és $y < 0$ tartományba eső k.é.p. egyértelműen megoldható, mert itt $f(x) = \frac{1}{(x+3)^5}$ folytonos, $g(y) = \frac{1+y^2}{\operatorname{arctg}^2 y}$ folytonos és $g(y) \neq 0$

## 2. feladat (12 pont)

$y(x)$ megoldja az

$$y' = 3x^2 + y^2 + 2x$$

differenciálegyenletet és $y(-1) = 1$.

Írja fel ezen megoldás $x_0 = -1$ pontjához tartozó harmadrendű Taylor polinomját!

*Megoldás:*

$y(-1) = 1$

$y'(-1) = 3 + 1 - 2 = 2$ 1

$y'' = 6x + 2yy' + 2$ 3

$y''(-1) = -6 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 = 0$ 1

an20100617/1.

$y''' = 6 + 2y'y' + 2yy''$ 3

$y'''(-1) = 6 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 0 = 14$ 1

$T_3(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x+1) + 0 + \frac{14}{3!}(x+1)^3$ 3

$\left(= y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1)^1 + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3\right)$

**3. feladat (9 pont)**

Határozza meg az

$$f(x) = \sin(-2x^4)$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

$f^{(12)}(0) = ?$, $f^{(13)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

*Megoldás:*

$$\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}\,; \quad u \in \mathbb{R} \quad \text{felhasználásával}$$

$$\sin(-2x^4) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-2x^4)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, x^{8n-4} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n-1}}{(2n-1)!}\, x^{8n-4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

6

Megjegyzés: nem kötelező a szummás alak. Elég, ha a sor első 3 nem nulla tagját rendezve kiírja.

Tudjuk, hogy $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ és $a_{12} = \frac{8}{3!}$ $(n = 2)$, $a_{13} = 0$.
Ezért

$$f^{(12)}(0) = 12!\,\frac{8}{3!}, \quad f^{(13)}(0) = 0$$

3

**4. feladat (12 pont)**

$$f(x) = \arcsin x$$

$f'$ Taylor sorfejtésének segítségével írja fel az $f$ függvény Taylor sorát!
Mennyi a sor konvergenciasugara?

*Megoldás:*

an2v100617/2.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots \quad 6$$

Konvergenciasugár: $|-x^2| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < 1 \qquad (R_1 = 1)$ 2

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8\cdot 5}x^5 + \cdots, \quad 3 \qquad (R_2 = 1) \quad 1$$

$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right.$ és $\sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k x^k$ sorok konvergenciasugarai megegyeznek.$\left.\right)$

Összefoglalva:

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8\cdot 5}x^5 + \cdots, \qquad R = 1}$$

**5. feladat (11 pont)**

$$f(x,y) = \frac{e^{4x-5y}}{2y^2+3}$$

a) Írja fel az $f$ függvény $P(0,0)$ pontbeli gradiensét!

b) Mennyi az $f$ függvény $P(0,0)$ pontbeli, $\underline{v} = (-1,3)$ irányú iránymenti deriváltja?

*Megoldás:*

$$f(x,y) = e^{4x}\,\frac{e^{-5y}}{2y^2+3}$$

a.) $$\left.\begin{aligned} f'_x &= 4e^{4x}\,\frac{e^{-5y}}{2y^2+3} \\ f'_y &= e^{4x}\,\frac{-5e^{-5y}(2y^2+3) - e^{-5y}\cdot 4y}{(2y^2+3)^2} \end{aligned}\right\} \quad 4$$

$$\operatorname{grad} f(P) = f'_x(0,0)\,\underline{i} + f'_y(0,0)\,\underline{j} = \frac{4}{3}\underline{i} - \frac{5}{3}\underline{j} \quad 2$$

b.) $$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \operatorname{grad} f(P)\cdot \underline{e} \quad 2$$

$$\underline{v} = -\underline{i} + 3\underline{j} \Rightarrow |\underline{v}| = \sqrt{1+9} \Longrightarrow \underline{e} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j} \quad 1$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \left(\frac{4}{3}\underline{i} - \frac{5}{3}\underline{j}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{10}} - \frac{15}{3\sqrt{10}} \left( = \frac{-19}{3\sqrt{10}} \right)$$

2

an2v100617/3.

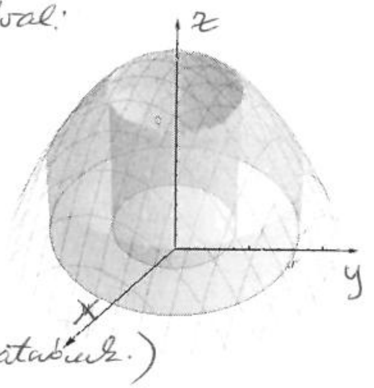
**6. feladat (14 pont)***

$$\iiint\limits_V x^2 \, dx \, dy \, dz = ?$$

$$V: \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 0 \le z \le 9 - x^2 - y^2$$

*Megoldás:*

Hengerkoordinátás transzformációval:




$x = r\cos\varphi \quad 0 \le z \le 9 - r^2$
$y = r\sin\varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi)$
$z = z \quad 1 \le r \le 2$
$|J| = r$

(Vagy: z szerint kiintegrálunk és utána síkbeli polártranszformációval is dolgozhatunk.)

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{9-r^2} r^2 \cos^2\varphi \, r \, dz \, d\varphi \, dr = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2\varphi \, z\Big|_0^{9-r^2} d\varphi \, dr$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (9r^3 - r^5) \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi \, dr = \int_1^R (9r^3 - r^5) \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= \pi \left(\frac{9}{4}r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_1^2 = \pi \left(36 - \frac{2^6}{6} - \frac{9}{4} + \frac{1}{6}\right)$$

**7. feladat (13 pont)***

a) Mutassa meg, hogy az

$$u(x, y) = \cos 2x \, \mathrm{ch}\, 2y + 3y - 5x + 3$$

egy reguláris komplex változós $f$ függvény valós része!

b) Keresse meg az $u$ harmonikus társát! ( $f(z) = ?$ )

*Megoldás:*

a.) Ha $f = u + jv$ reg. $\Rightarrow \Delta u \equiv 0$, $\Delta v \equiv 0$, tehát harmonikusak

$\boxed{4}$

$u'_x = -2\sin 2x \, \mathrm{ch}\, 2y - 5 \qquad u''_{xx} = -4\cos 2x \, \mathrm{ch}\, 2y$

$u'_y = 2\cos 2x \, \mathrm{sh}\, 2y + 3 \qquad + \, u''_{yy} = 4\cos 2x \, \mathrm{ch}\, 2y$

$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$

Tehát $u = \mathrm{Re}\, f$, ahol $f$ reguláris

b.) Mivel $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$, $v$-ről tudjuk:

$\boxed{9}$

$v'_x = -2\cos 2x \, \mathrm{sh}\, 2y - 3 \quad (1)$

$v'_y = -2\sin 2x \, \mathrm{ch}\, 2y - 5 \quad (2)$

3

an20100617/4.

(1)-ből: $v(x,y)=\int(-2\cos 2x\ \mathrm{sh}\,2y-3)\,dx=-\sin 2x\ \mathrm{sh}\,2y-3x+C(y)$ (3)

(2)-be behelyettesítve:

$-\sin 2x\cdot 2\,\mathrm{ch}\,2y+C'(y)=-2\sin 2x\,\mathrm{ch}\,2y-5 \Rightarrow C'(y)=-5 \Rightarrow C(y)=-5y+K$ (3)

$f(z)=u+jv=\cos 2x\,\mathrm{ch}\,2y+3y-5x+3+j(-\sin 2x\,\mathrm{sh}\,2y-3x-5y+K)$

**8. feladat (8+10=18 pont)***

a) Írja le $\sin z$, $\cos z$ definícióját, ha $z$ komplex!
Mit tud $\cos(jz)$ értékéről? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$\oint_{|z-5j|=3}\left(e^{\pi z}-\frac{1}{(z-5j)\ z}\right)\,dz=?$$

*Megoldás:*

a.) $\boxed{8}$ $\sin z=\dfrac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$ (2) $\qquad \cos z=\dfrac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$ (2)

$\cos(jz)=\mathrm{ch}\,z$ (1)

Ugyanis $\cos z$ definíciójában $z$ helyére $jz$-t írva:

$\cos jz=\dfrac{e^{jjz}+e^{-jjz}}{2}=\dfrac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\mathrm{ch}\,z$ (3)

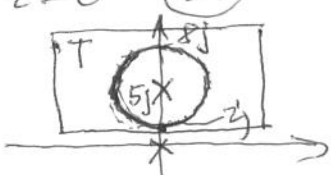
b.) $\boxed{10}$ $I=\oint\limits_{|z-5j|=3} e^{\pi z}-\oint\limits_{|z-5j|=3}\dfrac{1}{(z-5j)\,z}\,dz=I_1-I_2$

$I_1=0$, mert $e^{\pi z}$ mindenütt reg. és a görbe zárt. (Cauchy-féle alaptétel) (3)

$I_2$: szinguláris pontok: $z=5j$, $z=0$ (2)

reg. T-n (1)

$I_2=\oint\limits_{|z-5j|=3}\dfrac{\frac{1}{z}}{z-5j}\,dz=2\pi j\left.\dfrac{1}{z}\right|_{z=5j}=$ (3)




$=2\pi j\,\dfrac{1}{5j}=\dfrac{2}{5}\pi$

$I=-\dfrac{2}{5}\pi$ (1)

an2v-100617/-.

**Pótfeladatok.** Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

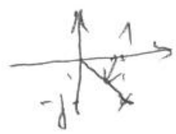
## 9. feladat (8 pont)

$\sin(-3j) = ?$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{-\pi + j(\pi/3)} = ?$ $\qquad$ $\ln(1-j) = ?$

$\sin(-3j) = j\,\mathrm{sh}(-3) = -j\,\mathrm{sh}\,3$ $\quad$ 2

$e^{-\pi + j\frac{\pi}{3}} = e^{-\pi}\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} + j\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}/2}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\, e^{-\pi + j\pi/3} = e^{-\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ 2

$\ln(1-j) = \ln|1-j| + j\,\mathrm{arc}(1-j) = \ln\sqrt{2} + j\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ 4




## 10. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 2$ ponthoz tartozó Taylor sorait és adja meg azok konvergencia tartományát!

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+5}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{x+7}$$

*Megoldás:*

$f(x) = e^{x-2+7} = e^7 e^{x-2} = e^7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$ $\quad$ 3 $\qquad$ $x \in (-\infty, \infty)$ $\quad$ 2

$g(x) = \frac{1}{x-2+9} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{1 - \frac{-(x-2)}{9}} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{9}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}} (x-2)^n$ $\quad$ 4

$\left|-\frac{x-2}{9}\right| = \frac{|x-2|}{9} < 1 \Rightarrow |x-2| < 9$ $\qquad$ K.T.: $(-7, 11)$ $\quad$ 2

an2v100617/6.