ANALIZIS(2) **GYAKORLÓ FELADATOK** 2006

Műszaki Informatika szak

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

I. Fibonacci típusú sorozatok

(1) Írja fel az alábbi rekurziók összes megoldását:

$$a)\ f(n) = 6f(n-1) - 5f(n-2)$$
$$b)\ f(n) = 4f(n-1) + 5f(n-2)$$
$$c)\ f(n) = 3\sqrt{2}\,f(n-1) - 4f(n-2)$$

(2) Írja fel az alábbi rekurziók adott kezdeti értéket kielégítő megoldását:

$$a)\ f(n) = 6f(n-1) - 5f(n-2)\,, \qquad f(0)=3\,,\ f(1)=11$$
$$b)\ f(n) = 4f(n-1) + 5f(n-2)\,, \qquad f(0)=0\,,\ f(1)=1$$
$$c)\ f(n) = 3\sqrt{2}\,f(n-1) - 4f(n-2)\,, \qquad f(0)=3\,,\ f(1)=5\sqrt{2}$$

(3) Írja fel az alábbi rekurziók $O(1)$, $O(n)$ illetve $O(3^n)$ nagyságrendű megoldásait:

$$a)\ f(n) = 10/3\,f(n-1) - f(n-2)$$
$$b)\ f(n) = 5f(n-1) - 4f(n-2)$$
$$c)\ f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2)$$

(4) Milyen $a, b \in \mathbf{R}$ esetén lesz az

$$f(n) = 7f(n-1) - 10f(n-2), \quad f(0)=a, \quad f(1)=b$$

rekurziót kielégítő $f(n)$ sorozat egyenlő $\Theta(2^n)$ -nel?

II. Rekurzív egyenlőtlenségek nagyságrendje

Az alábbi feladatokban $f(n)$ pozitív, monoton növekedő sorozat, amely a természetes számokon értelmezett. Az $f(n)$-et lineáris interpolációval terjesztjük ki szükség esetén más valós számokra. Ahhoz, hogy a rekurzió értelmes legyen, az $f(n)$ értékét adottnak tekintjük $n = 0, 1, 2, ..., N$ esetén. N értéke az egyes rekurziókban más és más lehet.
Például ha az $f(n)$ pozitív, monoton növekedő sorozat $n > 26$ esetén kielégíti az

$$f(n) \leq f(n/3) + f(n/9) + 3f(n/27) + O(n)$$

egyenlőtlenséget, akkor az $f(1), f(2), ..., f(26)$ értékét adottnak kell tekinteni.

(1) Vizsgálja meg az alábbi rekurzív egyenlőtlenségek adott részsorozatának a nagyságrendjét, ha $C > 0$ adott:

$$a)\ f(n) \leq f(n/3) + C, \quad n = 3^k$$
$$b)\ f(n) \leq f(n/3) + Cn, \quad n = 3^k$$
$$c)\ f(n) \leq 2f(n/3) + Cn, \quad n = 3^k$$
$$d)\ f(n) \leq 3f(n/3) + Cn, \quad n = 3^k$$
$$e)\ f(n) \leq 4f(n/3) + Cn, \quad n = 3^k$$
$$f)\ f(n) \leq f(n/5) + C, \quad n = 5^k$$
$$g)\ f(n) \leq 4f(n/5) + Cn, \quad n = 5^k$$
$$h)\ f(n) \leq 5f(n/5) + Cn, \quad n = 5^k$$
$$g)\ f(n) \leq 6f(n/5) + Cn, \quad n = 5^k$$
$$h)\ f(n) \leq f((n+2)/3) + Cn, \quad n = 3^k + 1$$
$$i)\ f(n) \leq 3f((n+2)/3) + Cn, \quad n = 3^k + 1$$
$$k)\ f(n) \leq 5f((n+1)/5) + Cn, \quad n = 5^k + 4$$

(2) Teljes indukcióval bizonyítsa be, hogy az alábbi egyenlőtlenségeket kielégítő bármely sorozatra igaz, hogy $f(n) = O(n)$:

$$a)\ f(n) \leq 5f(n/7) + O(n)$$
$$b)\ f(n) \leq f(n/2) + f(n/4) + f(n/16) + O(n)$$
$$c)\ f(n) \leq f(n/2) + f(n/4) + 2f(n/16) + O(n)$$
$$d)\ f(n) \leq f(n/3) + f(n/9) + 3f(n/27) + O(n)$$

(3) Teljes indukcióval bizonyítsa be, hogy az alábbi egyenlőtlenségeket kielégítő bármely sorozatra igaz, hogy $f(n) = O(n)$:

$$a)\ f(n) \leq f(n/2) + f(n/4 + O(1)) + O(n)$$
$$b)\ f(n) \leq 2f(n/3) + f(n/9 + O(1)) + O(n)$$
$$c)\ f(n) \leq f(n/3) + 2f(n/6 + O(1)) + O(n)$$
$$d)\ f(n) \leq f(n/3) + 9f(n/27 + O(1)) + O(n)$$