Megoldás

1. feladat 24 pont

(a) Adja meg

$$z = \frac{1-\imath}{(3+4\imath)-(2-\imath)}, \qquad \text{és} \qquad w = (2+2\imath)\cdot\left(\overline{2(\cos 15^\circ + \imath \sin 15^\circ)}\right)$$

valós és képzetes részét!

(b) Adja meg a $z^2 + 2z + 3\imath(z+1)$ polinom komplex gyökeit!

Megoldás:

(a) $z = \dfrac{1-\imath}{1+5\imath} = \dfrac{(1-\imath)(1-5\imath)}{26} = \dfrac{-4-6\imath}{26}$,

$\operatorname{Re} z = -\dfrac{2}{13}$, $\operatorname{Im} z = -\dfrac{3}{13}$ $\boxed{\textbf{8p.}}$

$w = 2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)\cdot 2\,(\cos(-15^\circ) + \imath \sin(-15^\circ)) = 4\sqrt{2}\,(\cos 30^\circ + \imath \sin 30^\circ)$,

$\operatorname{Re} w = 2\sqrt{6}$, $\operatorname{Im} w = 2\sqrt{2}$ $\boxed{\textbf{8p.}}$

(b) $z^2 + (2+3\imath)z + 3\imath = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-(2+3\imath) + \sqrt{(2+3\imath)^2 - 4\cdot 1\cdot 3\imath}}{2\cdot 1} =$$

$$\frac{-(2+3\imath) + \sqrt{4+9\imath^2+2\cdot 2\cdot 3\imath - 12\imath}}{2} = \frac{-(2+3\imath) + \sqrt{-5+12\imath-12\imath}}{2} =$$

$$\frac{-(2+3\imath) + \sqrt{-5}}{2} = \frac{-2-3\imath \pm \sqrt{5}\imath}{2} \boxed{\textbf{8p.}} = -1 + \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\imath$$

2. feladat — 26 pont

Határozza meg a

- $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$;
- $b_n = \dfrac{(-4)^{2n-1} + (-3)^{3n+1}}{(-5)^{2n}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

- $$a_n = \frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} =$$
  $$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} \to \frac{1}{2} \boxed{\mathbf{13p.}}$$

- Ha n páros, akkor $b_n = \dfrac{-\frac{1}{4}\cdot 16^n - 3\cdot 27^n}{25^n} = -\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{16}{25}\right)^n - 3\left(\dfrac{27}{25}\right)^n \to -\infty$, mert $\left(\dfrac{16}{25}\right)^n \to 0$, hiszen $-1 < \frac{16}{25} < 1$ kvóciensű mértani sorozat és $\left(\dfrac{27}{25}\right)^n \to \infty$, hiszen 1-nél nagyobb kvóciensű mértani sorozat.

  Ha n páratlan, akkor $b_n = \dfrac{-\frac{1}{4}\cdot 16^n + 3\cdot 27^n}{25^n} = -\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{16}{25}\right)^n + 3\left(\dfrac{27}{25}\right)^n \to \infty$, mert $\left(\dfrac{16}{25}\right)^n \to 0$, hiszen $-1 < \frac{16}{25} < 1$ kvóciensű mértani sorozat és $\left(\dfrac{27}{25}\right)^n \to \infty$, hiszen 1-nél nagyobb kvóciensű mértani sorozat.

  b_n-nek van 2 torlódási pontja, így nincs határértéke. $\boxed{\mathbf{13p.}}$

3. feladat — 26 pont

Határozza meg az

- $c_n = \dfrac{n^5\cdot\sqrt{n} + 3n^3 + 100}{3n^6\cdot\sqrt[3]{n} + 100n^2}$;
- $d_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^5\cdot\sqrt{n} + 3n^3 + 100}{3n^4\cdot\sqrt[3]{n} + 100n^2}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

- $$c_n = \frac{n^{11/2} + 3n^3 + 100}{3n^{19/3} + 100n^2} = \frac{\overbrace{n^{-1/3}}^{\to 0} + 3\overbrace{n^{-10/3}}^{\to 0} + 100\overbrace{n^{-19/3}}^{\to 0}}{3 + 100\underbrace{n^{-13/3}}_{\to 0}} \to 0 \boxed{\mathbf{13p.}}$$

- $$d_n \geq \sqrt[n]{\frac{n^5}{103n^5}} = \sqrt[n]{\frac{1}{103}} \to 1$$
  Másrészt $c_n \to 0$ miatt $0 < c_n \leq 1$, ha n elég nagy. Ilyenkor $1 \geq d_n$, így a rendőrelv miatt $d_n \to 1$. $\boxed{\mathbf{13p.}}$

4. feladat **24 pont**

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x^2-2x+1)(x^4+3)}}{x^3-x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

- $\lim_{x\to-\infty} f(x);$
- $\lim_{x\to 1} f(x);$
- $\lim_{x\to 2} f(x);$

Megoldás:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^2}\cdot\frac{x^4+3}{x^4}}}{\frac{x^3-x}{-x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{x^4}\right)}}{-1+\frac{1}{x^2}} =$

  $= -1$ $\boxed{\textbf{10p.}}$

- $\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x^4+3)}}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{|x-1|}{x-1}\,\frac{\sqrt{x^4+3}}{x(x+1)} = \pm 1\cdot\frac{2}{2} = \pm 1$, így $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$. $\boxed{\textbf{10p.}}$

- $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{(2^2-2\cdot 2+1)(2^4+3)}}{2^3-2} = \frac{\sqrt{19}}{6}$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

IMSC **feladat** **8 pont**

Legyen $x_0 = -1$ és $x_n = -4\sqrt[3]{x_{n-1}}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-re! Adja meg a sorozat torlódási pontjait!

Megoldás: $x_{n+1} = -4\sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{2^8} \cdot \sqrt[9]{x_{n-1}}$

Fixpontjai az $x = \sqrt[3]{2^8}\sqrt[9]{x} = f(x)$ megoldásai, $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \pm 8$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy x_{2n} monoton csökkenő. $x_0 = -1 > x_2 = f(-1) = -\sqrt[3]{2^8}$

Ha $x_{2n+2} < x_{2n}$, akkor $x_{2n+4} = f(x_{2n+2}) < f(x_{2n}) = x_{2n+2}$, mivel f szigorúan monoton növő.

Ekkor $\lim x_{2n} = \inf x_{2n}$. Vagy $-\infty$ vagy -8. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $-8 \leq x_{2n}$ minden n-re.

$-8 \leq -1 = x_0$

Ha $-8 \leq x_{2n}$, akkor $x_{2n+2} = f(x_{2n}) \geq f(-8) = -8$, mert f szigorúan monoton növő és -8 az egyik fixpontja.

Tehát $\lim x_{2n} = -8$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy x_{2n+1} monoton növő. $x_1 = 4 < x_3 = f(4) = \sqrt[9]{2^26}$

Ha $x_{2n+1} < x_{2n+3}$, akkor $x_{2n+3} = f(x_{2n+1}) < f(x_{2n+3}) = x_{2n+5}$, mivel f szigorúan monoton növő.

Ekkor $\lim x_{2n+1} = \sup x_{2n+1}$. Vagy ∞ vagy 8. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $x_{2n+1} \leq 8$ minden n-re.

$x_1 = 4 \leq 8$

Ha $x_{2n+1} \leq 8$, akkor $x_{2n+3} = f(x_{2n+1}) \leq f(8) = 8$, mert f szigorúan monoton növő és 8 az egyik fixpontja.

Tehát $\lim x_{2n+1} = 8$.

Így az x_n sorozatnak 2 torlódási pontja van ± 8.

Megoldás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy $x_n = -(-1)^n \dfrac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}}$.

$x_0 = -1 = -(-1)^0 \dfrac{8}{2^{\frac{3}{3^0}}} = -1\dfrac{8}{2^{\frac{3}{1}}}$

Ha $x_n = -(-1)^n \dfrac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}}$, akkor

$$x_{n+1} = -4\sqrt[3]{x_n} = -4\sqrt[3]{-(-1)^n \frac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}}} = -4 \cdot (-1) \cdot (-1)^n \frac{2}{2^{\frac{1}{3^n}}} = -(-1)^{n+1}\frac{8}{2^{\frac{3}{3^{n+1}}}}$$

Ha n páros, akkor $x_n = -\dfrac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}} \to -8$

Ha n páratlan, akkor $x_n = \dfrac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}} \to 8$

Így az x_n sorozatnak 2 torlódási pontja van ± 8.