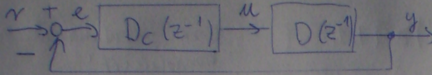
X.27. sze
7. h



$D_e(z^{-1})$ hiba véges fokszámú polinom

$$D_{yr} = \frac{D_c D}{1 + D_c D} = K \qquad L(z^{-1}) \rightarrow \text{korrekciós polinom}$$

$$D_{ur} = \frac{D_c}{1 + D_c D} = M \qquad \begin{array}{l} K = LB \quad (FIR) \\ M = LA \quad (FIR) \end{array}$$

K $\forall$ pólusa $z = 0$ -ban van.

$$D_c = \frac{LA}{1 - LB} \quad ; \quad y_\infty = r \Rightarrow K(1) = 1 = L(1) \cdot B(1)$$

$$L(1) = \frac{1}{B(1)}$$

$$H(z) = F(z) \cdot G(z)$$

$$h_i = \sum_{k=0}^{i} f_k g_{i-k}$$

Annál jobb a rendszer, minél kisebb l.

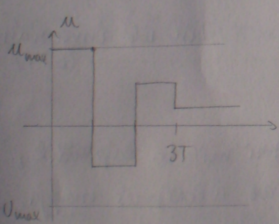
$$M = LA \quad , \quad M = (l_0 + l_1 z^{-1})(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n})$$

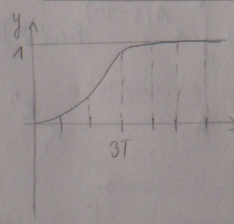
$$m_0 = l_0 a_0 = u_{max} \longrightarrow \boxed{l_0 = \frac{u_{max}}{a_0}}$$

$$m_1 = (l_0 a_1 + l_1 a_0)$$

$$\vdots$$

$$l_0 + l_1 = \frac{1}{b_0 + b_1 + \ldots + b_m} \Rightarrow \boxed{l_1 = \frac{1}{b_0 + b_1 + \ldots + b_m} - l_0}$$





A tranziens legyen aperiódikus.

Ebben a tartományban kell maradnunk.

Ez feltétel.

$$f(T) = \frac{\left| \max\{|u_i|\} - U_{max} \right|}{u_{max}} + \left| \max\{|y_i|\} - 1 \right| \quad ; \quad \boxed{f(T) = 0}$$

$T = ?$

$$U(z^{-1}) = M(z^{-1})\,R(z^{-1}) = M(z^{-1})\,\mathcal{Z}\{1,1,\dots\}$$

Erre alkalmazzuk a konvolúciót!

$$\boxed{u_i = m_0 + m_1 + \dots + m_i}$$

$$\left.\begin{aligned} &Y(z^{-1}) = K(z^{-1})\,R(z^{-1}) \\ &\boxed{y_i = k_0 + k_1 + \dots + k_i} \end{aligned}\right\}\quad i = 0, 1, \dots, n+1$$

fsolve-val fogjuk megoldani $\boxed{f(T)=0}$-t.

$$T \longmapsto W(s) \xrightarrow[\text{'zoh'}]{c2d} D(z) \longrightarrow D(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xrightarrow[u_{max}]{} l_0, l_1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow K(z^{-1})M(z^{-1}) \longrightarrow \{u_i, y_i : i = 0, \dots, n+1\} \longrightarrow f(T)$$

Állapot …

(pl.: repülő, helikopter szabályozása, ezek instabilak)

$$(\tau, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, x(t))$$

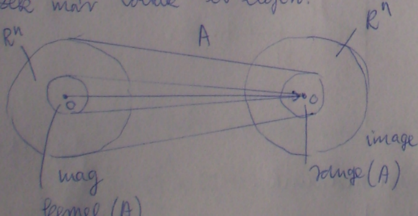
pillanat állapot

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) \quad \text{Nem lineáris rendszer} \quad (NL)$$

$$x(t) = \Phi(t,\tau)x + \int_\tau^t \Phi(t,\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)\,d\vartheta \quad \text{Lineáris, időben változó (LTV)}$$

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}\cdot x + \int_\tau^t e^{A(t-\vartheta)}Bu(\vartheta)\,d\vartheta \quad \text{Lin. idő invariáns (LTI)}$$

Ezek már voltak év elején.



Ami nullába képződik, az a leképezés magja.

X.27.szd
7.h

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A=A^T} \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^n = \text{range}(A) + \text{kernel}(A) \\ x = x_a + x_b \end{array}}$$

① irányíthatóság (irányítható állapot)

1.1 Legyen a rendszer a τ pillanatban az x állapotban.
Azt mondom, hogy az x állapot nullába irányítható, ha $\exists$ véges $t \geq \tau$ és $u(\cdot): (\tau, t) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, hogy

$$0 = x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) \qquad (\tau, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, 0)$$

1.2 A rendszer teljesen irányítható, ha $\forall \tau$ és $\forall x$ irányítható.

② Elérhető állapot (elérhetőség)

2.1 $(\tau, 0) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, x)$

2.2 A rendszer teljesen elérhető, ha $\forall \tau$ kezdeti pillanatból $\forall x$ állapot elérhető.

$\boxed{\text{LTV}}$ irányíthatóság

$$0 = X(t) = \Phi(t, \tau)x + \int_\tau^t \Phi(t, \vartheta) B(\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta$$

$$\Phi(t, \vartheta) = \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, \vartheta_t) \ ; \quad \exists [\Phi(t, \tau)]^{-1} \ (\text{inverze})$$

$$0 = X(t) = \Phi(t, \tau)\left\{x + \int_\tau^t \underline{\Phi(T, \vartheta) B(\vartheta)} u(\vartheta) d\vartheta\right\}$$

$$\boxed{x = -\int_\tau^t \Phi(\tau, \vartheta) B(\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta}$$

irányíthatósági Gram-mátrix: $\mathbb{R}^n = \text{range}(P) + \text{kernel}(P)$

$$P(\tau, t) = \int_\tau^t (\Phi(\tau, \vartheta) \underbrace{B^T(\vartheta)}_{B(\vartheta)} \Phi^T(\tau, \vartheta) d\vartheta$$

T1 (τ, x) esemény nem irányítható $\iff x \in \text{kernel}(P) \iff 0 = Px$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ P_x}}{0} = \langle 0, x\rangle = \langle \int_\tau^t \Phi(\tau, \vartheta) B(\vartheta) B^T(\vartheta) \Phi^T(\tau, \vartheta) d\vartheta\, x, x\rangle =$$

$$= \int_\tau^t \langle \underbrace{\Phi(\tau, \vartheta) B(\vartheta)}_{} B^T(\vartheta) \Phi^T(\tau, \vartheta) x, x\rangle d\vartheta = \quad \rightarrow$$

$$= \int_\tau^t \| B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta) x \|^2 d\vartheta \Rightarrow B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\, x \equiv 0 \,, \forall \vartheta$$

$$x^T \Phi(\tau,\vartheta) B(\vartheta) = 0 \qquad , \forall \vartheta$$

$\boxed{T2}$ (τ, x) esemény nullába irányítható $\Longleftrightarrow$ $x \in$ range (P)

$\exists\, \hat{x}$, hogy $x = P\hat{x}$, $u(\vartheta) \overset{\text{def}}{=} -B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\hat{x}$

$$x(t) = \Phi(t,\tau)x + \int_\tau^t \Phi(t,\vartheta)\, B(\vartheta) \left[-B^T(\vartheta)\Phi^T(\tau,\vartheta)\, \hat{x} \right] d\vartheta$$

$$x(t) = \Phi(t,\tau) \Big\{ x - \underbrace{\underbrace{\int_\tau^t \Phi(\tau,\vartheta) B(\vartheta) B^T(\vartheta) \Phi^T(\tau,\vartheta)\, d\vartheta}_{P}\, \hat{x}}_{P\hat{x} = x} \Big\} = 0$$

Állapottér: $R_n = \underbrace{\text{range}(P)}_{\text{irányítható állapotok}} + \underbrace{\text{kernel}(P)}_{\text{nem ir. áll.-ok}}$

$\boxed{LTI}$ $\tau = 0$ választható

$$P(0,t) = \int_0^t \Phi(0,\vartheta)\, B B^T \Phi^T(0,\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^t e^{-A\vartheta}\, BB^T e^{-A^T\vartheta}\, d\vartheta$$

$\boxed{T3}$ $L = \text{Span}\{ B, AB, \dots, A^{n-1}B \}$ $\leftarrow$ Ez egy kifeszített altér. Az altér : L

$R^n = L + L^\perp$ $\leftarrow$ L ortogonális

$$R^n = \underbrace{\text{range}(P)}_{L} + \underbrace{\text{range}(P)}_{L^\perp}$$

$\boxed{T1}$ miatt: $x \in \text{kernel}(P) \Longleftrightarrow x^T e^{-A\vartheta} B \equiv 0 \,, \forall \vartheta$

$x^T \cdot B = 0$ / ezt deriváljuk ϑ szerint

$x^T e^{-A\vartheta}(-A) B \equiv 0 \,,\quad \vartheta = 0 \Rightarrow x^T \cdot A \cdot B = 0$

$\rightarrow$

Ha tovább deriváljuk:

$x^T e^{-A\tau}(-A)^i B = 0$, $\tau = 0 \Rightarrow x^T A^i B = 0$, $\forall i$

Ez jelenti, hogy merőleges

$A \to \varphi(s) = \det(sI - A)$ KP

$s^i = r(s) + \varphi(s)\cdot q(s)$, $\operatorname{gr} r < n$

$A^i = r(A) + \cancel{\underbrace{\varphi(A)}_{\emptyset}\, q(A)}$

$\emptyset$, Cayley – Hamilton tétel

$\Rightarrow$ itt elég $(n-i)$-ig

$R^n = \operatorname{range}(P) + \operatorname{kernel}(P)$

$R^n = L + L^{\perp}$

$\operatorname{range}(P) = L = \operatorname{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ ir. állapotok

$\operatorname{kernel}(P) = L^{\perp}$ nem ir. áll.-ok

$\boxed{T4}$ Az LTI rendszer <u>teljesen</u> irányítható, hogyha a range (P) a teljes tér, azaz:

$$\operatorname{range}(P) = L = R^n \Leftrightarrow \operatorname{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \dim x = n$$

$M_C = [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$ irányíthatósági mátrix

Teljesen irányítható rendszer $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} M_C = n = \dim x$

L altér A invariáns, azaz $A(L) \subset L$

$$\begin{array}{ccccccc}
R^n & \xrightarrow{I} & R^n & \xrightarrow{A} & R^n & \xrightarrow{I} & R^n \\
L\left\{\begin{matrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{matrix}\right. & & e_1 & & e_1 & & \left.\begin{matrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{matrix}\right\} L \\
L^{\perp}\left\{\begin{matrix} g_{k+1} \\ \vdots \\ g_n \end{matrix}\right. & & \vdots & & \vdots & & \left.\begin{matrix} g_{k+1} \\ \vdots \\ g_n \end{matrix}\right\} L^{\perp} \\
 & & e_n & & e_n & & \\
R^n & \xrightarrow[T^{-1}]{} & R^n & \xrightarrow{A} & R^n & \xrightarrow[T]{} & R^n
\end{array}$$

identikus leképezés

$$\hat{A} = TAT^{-1}$$

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad & & g_k & & g_n \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}$$

irányíthatósági lépcsős alak

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\right\} \text{LTI}$$

$\exists T$ koord. tr., hogy

$$\hat{x} = \begin{pmatrix}\hat{x}_a \\ \hat{x}_b\end{pmatrix} = Tx \longrightarrow \hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb}\end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{x}_a \\ \hat{x}_b\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_a \\ \hat{x}_b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ 0\end{bmatrix} u$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} sI - A_{aa} & -A_{ab} \\ 0 & sI - A_{bb}\end{bmatrix} = \det(sI - A_{aa})\det(sI - A_{bb})$$

<u>Állapot-visszacsatolás</u> : Pólus áthelyezésre szolgál

$$\boxed{u = -Kx}$$

$$u = -\hat{K}\hat{x} = -\underbrace{\hat{K}T}_{K}x \Longrightarrow K = \hat{K}T$$

$$\hat{K} = [K_a \quad K_b]$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} - \hat{B}\hat{K}\hat{x} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})\hat{x}$$

$$\hat{A} - \hat{B}\hat{K} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb}\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} B_a \\ 0\end{bmatrix}[K_a \quad K_b]}_{\begin{bmatrix} B_aK_a & B_aK_b \\ 0 & 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} A_{aa} - B_aK_a & A_{ab} - B_aK_b \\ 0 & A_{bb}\end{bmatrix}$$

Zárt Rend. Kar. egy.:

ZRKE : $\varphi_c(s) = \underbrace{\det(sI - (A_{aa} - B_aK_a))}_{\text{kimozdíthatók}}\underbrace{\det(sI - A_{bb})}_{\text{nem mozdíthatók ki}}$

$\longrightarrow$

Def: Az LTI rendszer stabilizálható, ha $\det(sI - A_{bb}) = 0$
s_i gyökei stabilak, $\operatorname{Re} s_i < 0$

Teljesen irányított rendszer minden pólusa kimozdítható.

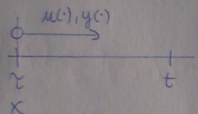
$$(A, B) \xrightarrow[M_c]{\varphi_c(s)} K$$

$$u = -Kx$$

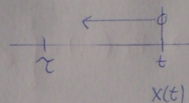
SISO: Ackermann-képlet

$$\boxed{K = (0 \ldots 0\,1)\, M_c^{-1}\, \varphi_c(A)}$$

Matlab: acker fv.



$((\tau, x)$ megfigyelhető$)$



$(t, x(t))$ rekonstruálható

Megfigyelhetőség: LTV

$$x(\vartheta) = \Phi(\vartheta, \tau)x + \int_\tau^\vartheta \Phi(\vartheta, \sigma) B(\sigma) u(\sigma)\, d\sigma$$

$$y(\vartheta) = C(\vartheta) \cdot x(\vartheta) + D(\vartheta) u(\vartheta) =$$

$$= C(\vartheta)\left\{\Phi(\vartheta, \tau)\, x + \int_\tau^\vartheta \Phi(\vartheta, \sigma) B(\sigma) u(\sigma)\, d\sigma\right\} + D(\vartheta) u(\sigma)$$

$$y(\vartheta) := y(\vartheta) - C(\vartheta) \int_\tau^\vartheta \Phi(\vartheta, \sigma) B(\sigma) u(\sigma)\, d\sigma - D(\vartheta) u(\vartheta)$$

$$\boxed{y(\vartheta) = C(\vartheta)\Phi(\vartheta, \tau)\, x}$$

Azt mondjuk, hogy x nem megfigyelhető, ha
$$y(\vartheta) = C(\vartheta)\, \Phi(\vartheta, \tau)\, x \equiv 0, \quad \forall \vartheta$$

: Transzponálttal szorzás, majd integrálás:
↓

$$\int_\tau^t \Phi^T(\vartheta,\tau)\, C^T(\vartheta)\, y(\vartheta)\, d\vartheta = \int_\tau^t \Phi^T(\vartheta,\tau)\, C^T(\vartheta)\, C(\vartheta)\, \Phi(\vartheta,\tau)\, x\, d\vartheta$$

$$Q(\tau,t) = \int_\tau^t \Phi^T(\vartheta,\tau)\, C^T(\vartheta)\, C(\vartheta)\, \Phi(\vartheta,\tau)\, d\vartheta$$ megfigyelhetőségi Gram-mátrix

$\mathbb{R}^n = \mathrm{range}\,(Q) + \mathrm{kernel}\,(Q)$

<u>LTI</u>: $Q(0,t) = \int_0^t e^{A^T\vartheta}\, C^T C\, e^{A\vartheta}\, d\vartheta$

Dualitás:

$(A, C)_I \longrightarrow Q_I(0,t)$

$(-A^T, -C^T)_{II} \longrightarrow P_{II}(0,t) = \int_0^t e^{-(-A^T)\vartheta}\, (-C^T)(-C^T)^T\, e^{-(-A^T)^T\vartheta}\, d\vartheta$

$= \int_0^t e^{A^T\vartheta}\, C^T C\, e^{+A\vartheta}\, d\vartheta = Q_I(0,t)$

$\mathbb{R}^n = \mathrm{range}(Q) + \mathrm{kernel}(Q) = \mathrm{range}(P_{II}) + \mathrm{kernel}(P_{II})$

Megfigyelhető altér : $\mathrm{Span}\,\{-C^T, (-A^T)(-C^T), \dots, (-A^T)^{n-1}(-C^T)\}$

$= \mathrm{Span}\,\{C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T\}$

<u>LTI rendszer</u>

$M_{CII} = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ C\cdot A \\ \vdots \\ C\cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$ (Az eredeti) megfigyelhetőségi mátrix

Az LTI rendszer <u>teljesen</u> megfigyelhető, ha

$\mathrm{rank}\, M_O = \mathrm{rank}\, M_{CII} = n = \dim x$

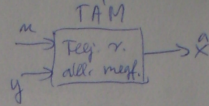
$\hat{x} = Tx$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}$$

$\hat{C} = [C_a \quad 0]$

Teljes rendű megfigyelő

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gy + Hu$$



$$\tilde{x} = \underbrace{x - \hat{x}}_{\text{becslési hiba}} \to 0$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - F\hat{x} - G\underbrace{Cx}_{y} - Hu + \underbrace{(Fx - Fx)}_{0} =$$

$$= (A - GC - F)x + (B - H)u + F\underbrace{(x - \hat{x})}_{\tilde{x}}$$

(1) $F = A - GC$

(2) $H = B$

(3) $\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x}$ stabilnak és gyorsnak kell lennie. $F = A - GC$

balra van

$$\varphi_o(s) = \det(sI - F) = \det(sI - (A - GC)) =$$

$$\varphi_c(s) = \det(sI - (A - BK))$$

jobbra van

$$= \det(sI - (A^T - C^T G^T))$$

így már ez is jobbra van

$$(A, C)_I \to (A^T, C^T)_{II} \xrightarrow[M_{c\,II}]{\varphi_o(s)} K_{II} \to G = K_{II}^T$$

$F = A - GC$

$H = B$

ackermann képlettel megoldható

Ezek már 1960-ban ismertek voltak!

„Engedjék meg, hogy elmondjam mi volt ma órán!...”