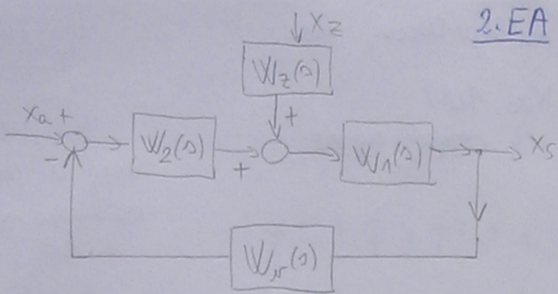
2. EA

IX. 21. p.
2. h.



$$x_s = W_1 \{ W_z x_z + W_2 (x_a - W_v x_s) \} =$$

$$= W_1 W_z x_z + W_1 W_2 x_a - W_1 W_2 W_v x_s \quad \Big| \quad (1 + W_1 W_2 W_z) x_s = W_1 W_2 x_a + W_1 W_z x_z$$

$$x_s = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_v} x_a + \frac{W_1 W_z}{1 + W_1 W_2 W_v} x_z$$

$$W_{x_s, x_a} = \frac{W_1 W_2}{1 + \underbrace{W_1 W_2 W_v}_{W_0}} \quad ; \quad W_{x_s, x_z} = \frac{W_1 W_z}{1 + \underbrace{W_1 W_2 W_v}_{W_0}}$$

$W_0(s)$ – a felnyitott kör átviteli fv.-e

ZRKE: $1 + W_0(s) = 0 \Rightarrow s_i$, $\mathrm{Re}\, s_i < 0$ Stabilitás

$W_0(s) = \frac{K}{s^i} W_{01}(s)$, ahol $W_{01}(0) = 1$; K = körerősítés, i = típusszám

$$W_0(s) = \frac{K}{s^i} \underbrace{\frac{\Pi(1 + s\tau_i)\,\Pi(1 + 2\mu_i \tau_i s + \tau_i^2 s^2)}{\Pi(1 + sT_i)\,\Pi(1 + 2\xi_i T_i s + T_i^2 s^2)}}_{W_{01}(s),\ \text{ahol}\ W_{01}(0) = 1}$$

Végérték tétel:

$f(t) \longrightarrow F(s)$

$f(\infty) = \lim_{s \to 0} s F(s)$, csak ha az $F(s)$ pólusai <u>stabilak</u>

Zavarójel hatása állandósult állapotban, ha

$$x_z(t) = x_{z0}\, 1(t)$$

egység ugrás

Nagy K-ra csökken a hiba!

$$X_z(s) = \frac{x_{z0}}{s}$$

$$x_s(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{W_1(s)\, W_z(s)}{1+W_0(s)} \frac{x_{z0}}{\cancel{s}}$$

1.) $W_0(s) = K \cdot W_{01}(s)$, tehát $i=0$. $\Rightarrow$ $x_s(\infty) = \dfrac{W_1(0)\, W_z(0)\, x_{z0}}{1+K}$

2.) $W_0(s) = \dfrac{K}{s} \cdot W_{01}(s)$, $i = 1$ $\Rightarrow$ $x_{s\infty} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{W_1(0)\, W_z(0)\, x_{z0}}{1+\frac{K}{s}} = 0$

↳ itt nulla a hiba, ez a legjobb!

Zárt Rendszer Karakterisztikus Egyenlete: ZRKE

$$1 + \underbrace{W_0(s)}_{W_1 W_2 W_\sigma} = 0 = 1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \frac{N_\sigma(s)}{D_\sigma(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$D_1(s)\, D_2(s)\, D_\sigma(s) + N_1(s)\, N_2(s)\, N_\sigma(s) = 0$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

↳ Meg lehet-e mondani ebből hol vannak a gyökök? (csupán az együtthatókból?)

Erre jó:

<u>Hurwitz-kritérium</u>

1.) $\forall a_i \geq 0$ és nem nulla, vagyis: $\underline{\forall a_i > 0}$

2.) $n \times n$ méretű Hurwitz séma:

(ha nincs több, akkor nullák...)

$$\begin{array}{cccc}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\
0 & a_n & a_{n-2} & \dots \\
0 & 0 & a_{n-1} & \dots \\
\vdots & & &
\end{array}$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$

$$\underline{\forall \Delta_i > 0}$$

(ami nem fér azt elhagyjuk)

pl.: $W_0(s) = \dfrac{K}{(1+sT)^3}$ IX. 21. p. 2h.

ZRKE: $1 + \dfrac{K}{(1+sT)^3} = 0 \Rightarrow (1+sT)^3 + K = 0$

$$T^3 s^3 + 3T^2 s^2 + 3Ts + 1 + K = 0$$

1, Feltétel igaz-e?

$T > 0, \quad 1+K > 0 \Leftrightarrow K > -1$ Ez igaz.

2, Igaz-e?

$$\begin{array}{ccc} 3T^2 & 1+K & 0 \\ T^3 & 3T & 0 \\ 0 & 3T^2 & 1+K \end{array}$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3

$\Delta_1 = 3T^2 > 0$ ✓

$\Delta_2 = 9T^3 - T^3(1+K) \overset{?}{>} 0$

$\Delta_2 = T^3(8-K) \overset{?}{>} 0$

$\Downarrow$

$8 - K > 0$

$\underline{8 > K}$

$\Delta_3 = (1+K)\Delta_2 > 0$ ✓

Tehát stabil, ha:

$$\boxed{\begin{array}{l} T > 0 \text{ és} \\ -1 < K < 8 \end{array}}$$

<u>Kritikus körerősítés:</u> K_{krit}

Mikor a rendszer a stabilitás határán van: minden feltétel teljesül, de az egyik pont nulla.

<u>Strukturális stabilitás:</u>

Zárt rendszer valamelyik paraméter függvényében a rendszerjellemző minden értékénél stabil.

pl.: $W_0(s) = \dfrac{K(1+saT)}{s(1+sT)^2}$; $T > 0$ ✓,

Mekkora a, hogy K bármely értéke a rendsz. stabil legyen?
$K > 0$ ZR

ZRKE: $1 + \dfrac{K(1+saT)}{s(1+sT)^2} = 0 \Rightarrow s\underbrace{(1+sT)^2}_{T^2s^2 + 2Ts + 1} + K(1+saT) = 0$

$\rightarrow$

$T^2 s^3 + 2T s^2 + (1 + KaT)s + K = 0$

1.) $1 + KaT > 0 \Rightarrow a > 0$

2.) $\begin{array}{ccc} 2T & K & 0 \\ T^2 & 1+KaT & 0 \\ 0 & 2T & K \end{array}$ $\quad \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$\Delta_1 = 2T > 0$ ✓

$\Delta_2 = 2T(1 + KaT) - KT^2 \overset{?}{>} 0$

$2 + KT(\underbrace{2a-1}) > 0$, $\forall K$-ra

$\Delta_3 = K \cdot \Delta_2 > 0$ ✓

$2a - 1 > 0$

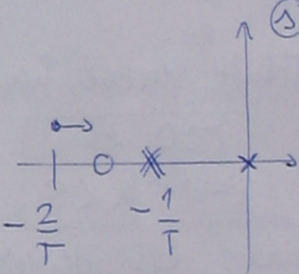
$a > \frac{1}{2}$

Ha $a > \frac{1}{2}$, akkor bármely $K > 0$-ra stabil a ZR.

~~Ha~~ $z_1 = -\underbrace{\frac{1}{aT}}_{-\frac{2}{T}\,?}$

$s_1 = 0$

$s_2 = -\frac{1}{T}$ (kétszeres pólus)

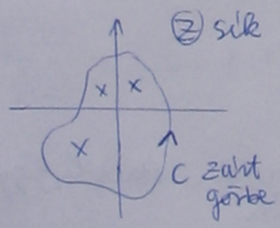


Kérdés?

$W_0(j\omega)$-ból következik-e, hogy ZR stabil?

Komplex fv.-ek

Residuum: $w = f(z)$



x – pólusok

Residuum-tétel:

pólusok száma

$$\oint f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Res}_{z_i} f(z)$$

Argumentum-elv:

IX. 21. p. 2h.

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ szingularitás ott van: – ahol $\overset{\text{deriválVt}}{\downarrow}$ $f'(z)$ nem létezik (pólus)

– vagy ahol $f(z)$ nullává válik (zérus)

Tekintsük az $f(z)$ pólusait! Legyen: z_0, multiplicitása: m ← Ennyiszeres pólus.

①

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$$; ahol $h(z)$ reguláris (diffható, Taylor sorba fejthető)

és $h(z_0) \neq 0$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)\frac{1}{(z-z_0)^m} + h(z)\frac{-m}{(z-z_0)^{m+1}}}{\frac{h(z)}{(z-z_0)^m}} = \underbrace{\frac{h'(z)}{h(z)}}_{\text{reguláris}} + \underbrace{\frac{-m}{z-z_0}}_{\text{Laurent sor } -1\text{-es tagja}}$$

⇓

$-m$ a reziduum

② $f(z)$-nek z_0, k-szoros zérushelye!

$f(z) = (z-z_0)^k \cdot h(z)$, ahol $h(z)$ reguláris és $h(z_0) \neq 0$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)\cdot(z-z_0)^k + h(z)\cdot k\cdot(z-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k\cdot h(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$ – reguláris

↳ k a reziduum

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left(\ln f(z)\right)' = \frac{1}{f(z)}\cdot f'(z) \quad ✓ ;$$

$$\ln f(z) = \ln\left\{|f(z)|\cdot e^{j\arg f(z)}\right\} = \ln|f(z)| + j\arg f(z)$$

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_C d\,\{\ln f(z)\} = \underbrace{\oint_C d\,\ln|f(z)|}_{\emptyset\text{, mert valóst integrálunk}} + \oint_C j\,d\arg f(z) =$$

$$= j\,\Delta_C \arg f(z) = 2\pi j\,(z-p)^*$$

Tehát: $w = f(z)$

$$C \xrightarrow[\text{leképzése}]{f(z)} w = f(C)$$

Legyen: z = zérusok db száma, p = pólusok db -"- } multiplicitással a C-görbe belsejében

$\Sigma m_i = p$

$\Sigma k_i = z$

$$^* \quad \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = z - p$$

$$\boxed{\text{EKVSZ}\,(f(C), 0) = z - p}$$

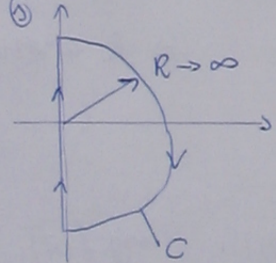
Előjeles körülvételek száma

argumentum-elv

ZRKE: $1 + W_0(s) = 0 \Rightarrow s_i \Rightarrow \operatorname{Re} s_i < 0$

$f(s) = 1 + W_0(s)$:
- zérusok ott, ahol a ZR pólusa
- pólusok ott, ahol $W_0(s)$ pólusai vannak

} jobb félsíkon



$\text{EKVSZ}\,(f(C), 0) = p - z$

$\text{EKVSZ}\,(W_0(j\omega), -1) = p - z$ ← $\boxed{0}$ Stabilitás

p: a $W_0(s)$ felnyitott kör instabil pólusainak száma

z: a ZR instabil pólusainak a száma

↳ STABIL, ha $\boxed{z = 0}$

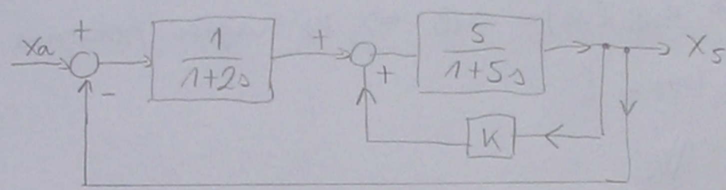
Nyquist-kritérium

Jelölje P a $W_0(s)$ felnyitott kör instabil (jobb félsíkon lévő) pólusainak számát.

ZR stabil, ha a teljes Nyquist görbe a -1 pontot az óramutató járásával ellentétes irányban P-szer veszi körül.

$$\mathrm{EKVSZ}\left(W_0(j\omega), -1\right) = P$$

Pl.:



$\boxed{K = 0.3}$

Ekkor stabil-e?

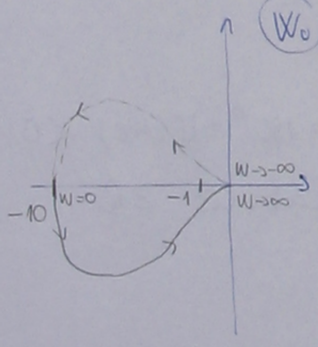
$$W_0 = \frac{1}{1+2s} \cdot \frac{\frac{5}{1+5s}}{1 - \frac{5}{1+5s}K} = \frac{5}{1+2s\,(1+5s-5K)} = \frac{\frac{5}{1-5K}}{(1+2s)\left(1+\frac{5}{1-5K}s\right)}$$

$$\frac{5}{1-5K} = -10 \qquad W_0 = \frac{-10}{(1+2s)(1-10s)}$$

$$W_0(s) = -10\,\frac{1}{(1-10s)(1+2s)}$$

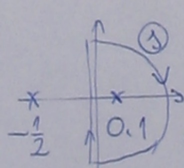
$$W(j\omega) = -10\,\frac{1}{(1-10j\omega)(1+2j\omega)} \Rightarrow \left|W(j\omega)\right| = \frac{10}{\sqrt{1+100\omega^2}\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \mathrm{arctg}(10\omega) - \mathrm{arctg}(2\omega)$$



$$\mathrm{EKVSZ}\left(W_0(j\omega), -1\right) = 1$$

$\to$ A -1-et egyszer veszi körül a Nyquist görbe



$p = 1$

$\to$ ZR stabil

Bode-kritérium

Feltevés: $p=0$ (a felnyitott kör stabil)

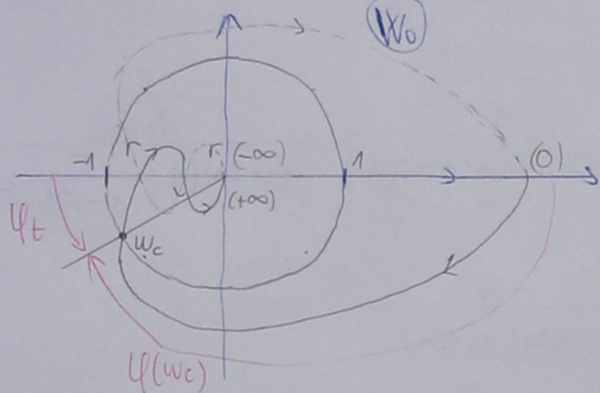
$KVSZ\,(W_0(j\omega), -1) = 0$

Körül vételek száma

Vagyis, ne vegye körül a teljes Nyquist-görbe a -1 pontot.

$|W_0(j\omega_c)| = 1 \longleftrightarrow a_{dB}(\omega_c) = 0\,dB \Rightarrow \omega_c$ vágási frekvencia

Csak 1 ω_c legyen!

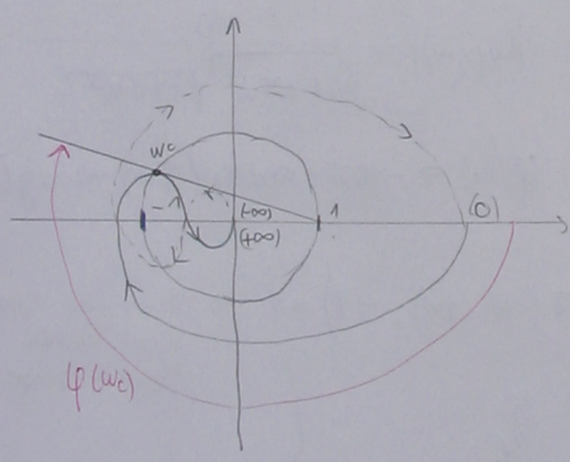


Itt a Nyquist-g. nem fogja körbe a -1 pontot!

$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) > 0$!

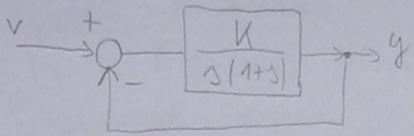
Stabilis ZR

Ha körül fogja:



$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) < 0$!

Labilis ZR



K = körerősítés

$$ZR:\ W_{zárt} = \frac{\frac{K}{s(1+s)}}{1+\frac{K}{s(1+s)}} = \frac{K}{s(1+s)+K} = \frac{1}{1+\frac{1}{K}s+\frac{1}{K}s^2} =$$

$$= \frac{1}{1+2\xi T s + T^2 s^2} \Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{K}}\ ; \quad 2\xi T = 2\xi\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{K} \Rightarrow \underline{\xi = \frac{1}{2\sqrt{K}}}$$

$$\underline{\underline{\Delta v}} = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{4K-1}}\right)$$

$$\ln\Delta v = -\frac{\pi}{\sqrt{4K-1}} \Rightarrow \frac{1}{\ln^2\Delta v} = \frac{4K-1}{\pi^2} \Rightarrow \underline{\underline{K}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2/4}{\ln^2\Delta v}$$

$$W_0(j\omega_c) = \frac{K}{j\omega_c(1+j\omega_c)} = \frac{K}{-\omega_c^2 + j\omega_c}$$

$$|W_0(j\omega_c)| = 1 = \frac{K}{\sqrt{\omega_c^4+\omega_c^2}} \Rightarrow \omega_c^4 + \omega_c^2 - K^2 = 0$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4K^2}}{2}}$$

$$\varphi_t = 180° - 90° - \mathrm{arctg}\,\omega_c = 90° - \mathrm{arctg}\,\omega_c$$

pl.:

Δv % = túllövés %-ban

Δv%	K	ω_c	φ_t
1	0,366	0,346	70,9
5	—	—	64,6
10	—	—	58,6
20	—	—	48,1
30	—	—	39,1
40	—	—	31,2
50	—	—	24,3
60	—	—	18,2
70	19,645	4,376	12,9