Jelek és rendszerek

2. házi feladat

Érvényes: 2012/2013. tavaszi félév

Név
Neptun kód
Házi feladat kódja
Beadási határidő Lásd a "Számonkérés rendje" c. táblázatban
Gyakorlatvezető neve: .... (**kitöltendő!**)

Megjegyzések: *A házi feladat megoldását a **feladatlappal együtt** kell beadni. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni, **nem elegendő a végeredményeket közölni!** A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE, stb.), de **a megoldás elvi lépéseit** ekkor is **részletesen** ismertetni kell.*

	a	b	c	d	e	$\sum$	Javító
2	/ 2	/ 3,6	/ 2	/ 1,6	/ 0,8	/ 10	
						/ 10*	

* a házi feladat végső pontszáma a részpontok összegéből kerekített egész szám.

2.a Számítsa ki és írja fel normál alakban az állapotváltozós leírással adott *FI* illetve *DI* rendszer átviteli karakterisztikáját! (1+1 pont)
A *FI* rendszer állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}1 \\ -0{,}3 & -0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + (0{,}4)u(t)
\end{aligned}$$

A *DI* rendszer állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -0{,}73 \\ 4 & -1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} u[k] \\
y[k] &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + (1{,}5)u[k]
\end{aligned}$$

2.b Adja meg az alábbi (periodikus) DI bemeneti jel valós alakú Fourier-sorát, és a periodikus FI bemeneti jelnek valós alakú Fourier polinomját, mely (az állandó összetevőn kívül) legalább három nem nulla harmonikust tartalmaz! (1,8+1,8 pont)

$$\begin{array}{lll} u(t) = 3{,}5t + -14\varepsilon(t)t, & -6 \le t \le 2, & u(t+8) = u(t) \\ u[k] = 4 + -2|k|, & -2 \le k \le 3, & u[k+6] = u[k] \end{array}$$

2.c Számítsa ki az állapotváltozós leírással adott DI rendszer válaszjelét és a FI rendszer válaszjelének Fourier-polinom közelítését, majd ábrázolja a válaszjelek egy periódusát ($k =$ 0-tól, illetve $t = 0$-tól kezdődően)! (1+1 pont)

2.d A DI illetve az FI rendszer gerjesztése az az impulzus jel, amely megegyezik a periodikus bemeneti jelnek a k = 0 illetve a t = 0 változó értékkel kezdődő alap periódusával, és az alapperiódus intervallumán kívül a jel érték nulla. Számítsa ki a rendszerek válaszjelének Fourier transzformáltját, és ábrázolja a válaszjelek amplitúdó spektrumát (DI esetben a $0 \le \vartheta \le \pi$, folytonos esetben a $0 < \omega \le 5$ intervallumon)! (0,8+0,8 pont)

2.e Az előző pont eredménye alapján állapítsa meg a FI rendszer válaszjelének sávszélességét, ha az amplitúdó spektrum maximumának huszadrészénél kisebb értékeit tekintjük elhanyagolhatónak (szükséges lehet az amplitudó spektrum ábrázolása az előző pontban megadott frekvencia intervallumon kívül is)! (0,8 pont)

Jelek és rendszerek második házi feladat

1 A feladat

1.1 Folytonos idejű rendszer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,1 \\ -0,3 & -0,2 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,9 \end{bmatrix} \quad D = 0,4$$

Az átviteli karakterisztika:

$$H(j\omega) = \underline{C}^T \cdot \left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \cdot \underline{B} + D$$

$$H(j\omega) = \underline{C}^T \cdot \frac{\operatorname{adj}\left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)}{\det\left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)} \cdot \underline{B} + D$$

$$H(j\omega) = \frac{\underline{C}^T \cdot \operatorname{adj}\left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) \cdot \underline{B} + \det\left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) \cdot D}{\det\left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)}$$

A tagok kiszámítása:

$$j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & j\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,6 & 0,1 \\ -0,3 & -0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega + 0,6 & -0,1 \\ 0,3 & j\omega + 0,2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = (j\omega + 0,6) \cdot (j\omega + 0,2) - (0,1) \cdot (-0,3) = (j\omega)^2 + 0,8j\omega + 0,09$$

$$\operatorname{adj}\left(j\omega \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = \begin{bmatrix} j\omega + 0,2 & 0,1 \\ -0,3 & j\omega + 0,6 \end{bmatrix}$$

$$H(j\omega) = \frac{\begin{bmatrix} 1,1 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j\omega + 0,2 & 0,1 \\ -0,3 & j\omega + 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} + \left((j\omega)^2 + 0,8j\omega + 0,09\right) \cdot 0,4}{(j\omega)^2 + 0,8j\omega + 0,09}$$

$$H(j\omega) = \frac{1,31j\omega + 0,355 + 0,4(j\omega)^2 + 0,4 \cdot 0,8j\omega + 0,4 \cdot 0,09}{(j\omega)^2 + 0,8j\omega + 0,09}$$

$$H(j\omega) = \frac{0,4(j\omega)^2 + 1,63j\omega + 0,391}{(j\omega)^2 + 0,8j\omega + 0,09}$$

1.2 Diszkrét idejű rendszer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -073 \\ 4 & -1,2 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \quad D = 1,5$$

Az átviteli karakterisztika:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\underline{C}^T \cdot \operatorname{adj}\left(e^{j\vartheta} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) \cdot \underline{B} + \det\left(e^{j\vartheta} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) \cdot D}{\det\left(e^{j\vartheta} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)}$$

A tagok kiszámítása:

$$e^{j\vartheta}\cdot\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}e^{j\vartheta} & 0\\ 0 & e^{j\vartheta}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -0,73\\ 4 & -1,2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{j\vartheta}-2 & 0,73\\ -4 & e^{j\vartheta}+1,2\end{bmatrix}$$

$$\det\left(e^{j\vartheta}\cdot\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}\right)=(e^{j\vartheta}-2)\cdot(e^{j\vartheta}+1,2)-(0,73)\cdot(-4)=(e^{j\vartheta})^2-0,8e^{j\vartheta}+0,52$$

$$\operatorname{adj}\left(e^{j\vartheta}\cdot\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}\right)=\begin{bmatrix}e^{j\vartheta}+1,2 & -0,73\\ 4 & e^{j\vartheta}-2\end{bmatrix}$$

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{\begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{j\vartheta}+1,2 & -0,73\\ 4 & e^{j\vartheta}-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,8\\ -0,5\end{bmatrix}+\left((e^{j\vartheta})^2-0,8e^{j\vartheta}+0,52\right)\cdot 1,5}{(e^{j\vartheta})^2-0,8e^{j\vartheta}+0,52}$$

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{2,6e^{j\vartheta}-7,52+1,5(e^{j\vartheta})^2-1,2e^{j\vartheta}+0,78}{(e^{j\vartheta})^2-0,8e^{j\vartheta}+0,52}$$

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{1,5(e^{j\vartheta})^2+1,4e^{j\vartheta}-6,74}{(e^{j\vartheta})^2-0,8e^{j\vartheta}+0,52}$$

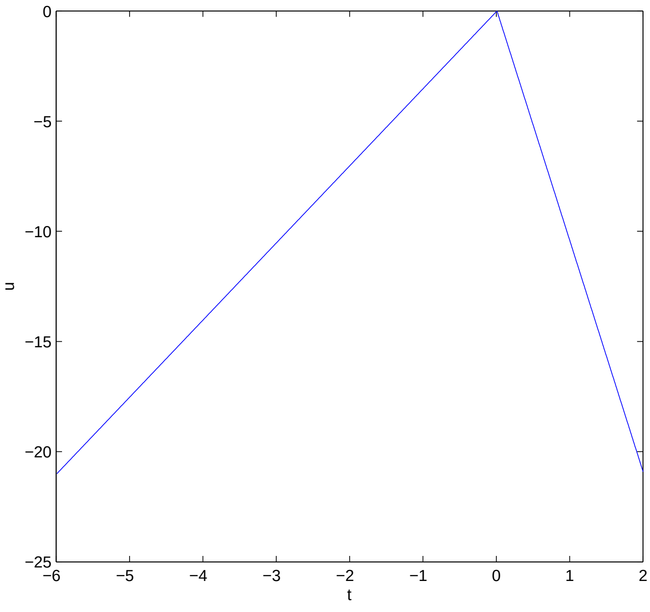
2 B feladat

2.1 Folytonos idejű rendszer

A bemeneti jel:

$$u(t)=3,5t-14\varepsilon(t)\cdot t \qquad -6\le t\le 2 \quad t(t+8)=u(t)$$

A bemeneti jel egy periódusa:



Mivel $u(t+8)=u(t)$, ezért a jel periódusa $T=8$, így $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$.
A Fourier-polinom felírásához szükséges komplex együtthatókat az alábbi egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$u_p=\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=u(x)\cdot e^{-jp\omega_0 x}\;\;dx$$

Ez behelyettesítve:

$$u_p=\frac{1}{8}\cdot\int_{-6}^{2}(3,5x-14\cdot\varepsilon(x)\cdot x)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{4}x}\;\;dx$$

$$u_p=\frac{3,5}{8}\cdot\int_{-6}^{0}x\cdot e^{-jp\frac{\pi}{4}x}\;\;dx-\frac{10,5}{8}\cdot\int_{0}^{2}x\cdot e^{-jp\frac{\pi}{4}x}\;\;dx$$

Ez $p = 0$-ra

$$u_0 = \frac{3,5}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-6}^{0} - \frac{10,5}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = -10,5$$

$p \neq 0$-ra parciálisan integráljuk a két tagot:

$$\int_a^b x \cdot e^{cx} \ dx = \left[x\frac{e^{cx}}{c}\right]_a^b + \int_a^b \frac{e^{cx}}{c} \ dx = \left[x\frac{e^{cx}}{c}\right]_a^b + \left[\frac{e^{cx}}{c^2}\right]_a^b = \left[\frac{(xc+1)\cdot e^{cx}}{c^2}\right]_a^b$$

Így az egyenlet:

$$u_p = \frac{3,5}{8} \cdot \left[\frac{(x(-jp\frac{\pi}{4})+1)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{4}x}}{(-jp\frac{\pi}{4})^2}\right]_{-6}^{0} - \frac{10,5}{8} \cdot \left[\frac{(x(-jp\frac{\pi}{4})+1)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{4}x}}{(-jp\frac{\pi}{4})^2}\right]_{0}^{2}$$

$$u_p = \frac{\frac{3,5}{8} \cdot \left[(x(-jp\frac{\pi}{4})+1)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{4}x}\right]_{-6}^{0} - \frac{10,5}{8} \cdot \left[(x(-jp\frac{\pi}{4})+1)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{4}x}\right]_{0}^{2}}{(-jp\frac{\pi}{4})^2}$$

$$u_p = \frac{\frac{3,5}{8} \cdot \left(1 - (jp\frac{6\pi}{4}+1)\cdot e^{jp\frac{6\pi}{4}}\right) - \frac{10,5}{8} \cdot \left((-jp\frac{\pi}{2}+1)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{2}} - 1\right)}{(-jp\frac{\pi}{4})^2}$$

$$u_p = \frac{28 - (10,5jp\pi + 7)\cdot e^{jp\frac{3\pi}{2}} + (10,5jp\pi - 21)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{2}}}{16 \cdot (-jp\frac{\pi}{4})^2}$$

$$u_p = \frac{28 - (10,5jp\pi + 7)\cdot e^{jp\frac{3\pi}{2}} + (10,5jp\pi - 21)\cdot e^{-jp\frac{\pi}{2}}}{-p^2\pi^2}$$

Az integrálok segítségével megadható az alábbi táblázat

p	u_p	$\|u_p\|$	ϑ_p
0	-10,5	-	-
1	-2,837 - 2,837j	4,0121	$\frac{5\pi}{4}$
2	-1,4185	1,4185	π
3	-0,3152 + 0,3152i	0,4457	$\frac{3\pi}{4}$

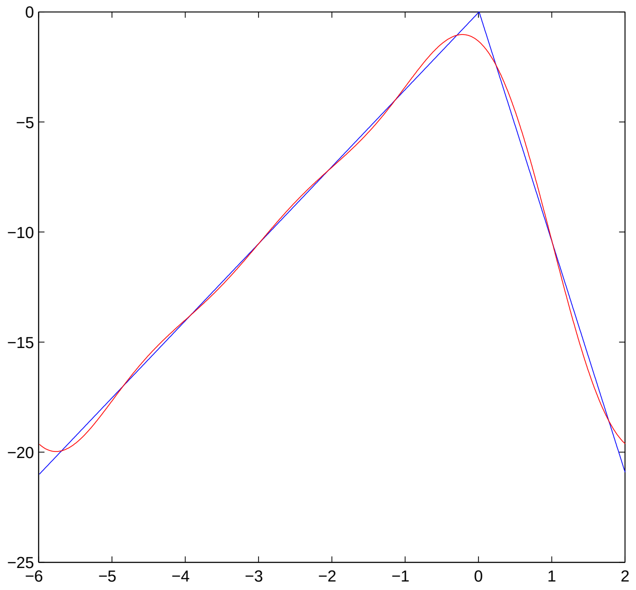
Ahhoz hogy a polinom három nem nulla harmonikust tartalmazzon, $u(t)$-t $u_3(t)$-vel közelítjük az alábbi képlettel:

$$u(t) \cong u_3(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot |u_i| \cdot \cos\left(i\frac{\pi}{4}t + \vartheta_i\right)$$

A behelyettesítéssel az alábbi polinomot kapjuk:

$$\begin{aligned} u(t) \cong u_3(t) &= -10,5 - \sum_{i=1}^{3} 2 \cdot |u_i| \cdot \cos\left(i\frac{\pi}{4}t + \vartheta_i\right) \\ &= -10,5 - 2 \cdot 4,0121 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{4}\right) - 2 \cdot 1,4185 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) - 2 \cdot 0,4457 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$u(t) \cong -10,5 - 8,0242 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{4}\right) - 2,837 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) - 0,8914 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

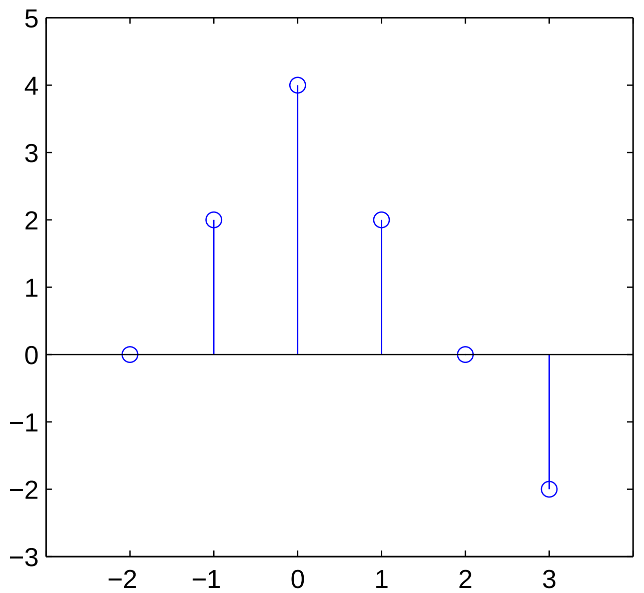


2.2 Diszkrét idejű rendszer

A bemeneti jel:

$$u[k] = 4 - 2|k| \quad -2 \leq k \leq 3 \quad u[k+6] = u[k]$$

A bemeneti jel egy periódusa:



Mivel $u[k+6] = u[k]$, ezért a jel periódusa $K = 6$, így $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
A Fourier-sor felírásához szükséges komplex együtthatókat az alábbi egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$u_p = \frac{1}{K} \cdot \sum_{x=0}^{K-1} u[p] \cdot e^{-jp\vartheta_0 x}$$

Behelyettesítve a formulába az alábbi egyenletet kapjuk:

$$u_p = \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=-2}^{3} (4 - 2|x|) \cdot e^{-jp\frac{\pi}{3}x} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=-2}^{3} (-2|x|) \cdot e^{-jp\frac{\pi}{3}x}$$

$$u_p = 4 + \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=-2}^{0} (-2(-x)) \cdot e^{-jp\frac{\pi}{3}x} + \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=0}^{3} (-2x) \cdot e^{-jp\frac{\pi}{3}x} - \frac{1}{6} u[0]$$

$$u_p = 4 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{x=-2}^{0} x \cdot e^{-jp\frac{\pi}{3}x} - \frac{1}{3} \cdot \sum_{x=0}^{3} x \cdot e^{-jp\frac{\pi}{3}x}$$

Az egyenlet segítségével kitölthetjük az alábbi táblázatot

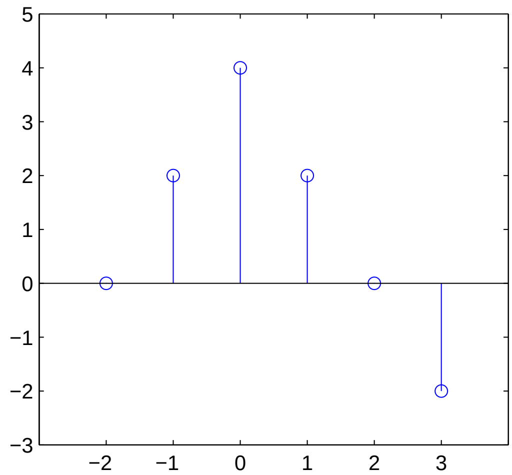
p	u_p	$\lvert u_p\rvert$	ϑ_p
0	1	-	-
1	$1\frac{1}{3}$	-	-
2	0	-	-
3	$\frac{1}{3}$	-	-

Mivel a jel periódusa páros, így a Fourier sort az alábbi képlettel számoljuk:

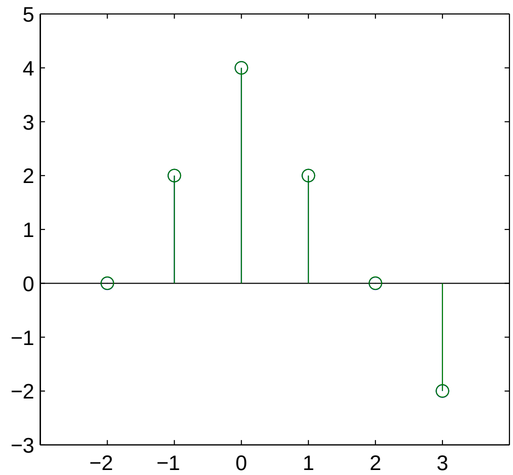
$$u[k] = u_0 + \sum_{i=1}^{\frac{K}{2}-1} 2 \cdot |u_i| \cdot \cos(i\vartheta_0 k + \varphi_i) + u_{\frac{K}{2}} \cdot (-1)^k$$

$$u[k] = 1 + 2\frac{2}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \frac{1}{3} \cdot (-1)^k$$

Ha összevetjük a két függvény képét, azok egybeesnek; azaz a Fourier sor pontosan reprezentálja az eredeti jelet.



Bemeneti jel



Fourier-sor

3 C feladat

3.1 Folytonos idejű rendszer

A folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája az A feladatrész alapján:

$$H(j\omega) = \frac{0,4(j\omega)^2 + 1,63j\omega + 0,391}{(j\omega)^2 + 0,8j\omega + 0,09}$$

A feladat során felhasználjuk az előző feladatban kapott u_n értékeket.

$$H(0) = \frac{0,4(0)^2 + 1,63 \cdot 0 + 0,391}{(0)^2 + 0,8 \cdot 0 + 0,09} = \frac{0,391}{0,09} = 4,3\dot{4}$$

$$H\left(\frac{j\pi}{4}\right) = \frac{0,4(\frac{j\pi}{4})^2 + 1,63 \cdot \frac{j\pi}{4} + 0,391}{(\frac{j\pi}{4})^2 + 0,8 \cdot \frac{j\pi}{4} + 0,09} = 1,0833 - 1,1380j = 1,5712 \cdot e^{-0,81j}$$

$$H\left(\frac{j\pi}{2}\right) = \frac{0,4(\frac{j\pi}{2})^2 + 1,63 \cdot \frac{j\pi}{2} + 0,391}{(\frac{j\pi}{2})^2 + 0,8 \cdot \frac{j\pi}{2} + 0,09} = 0,6409 - 0,7382j = 0,9776 \cdot e^{-0,8558j}$$

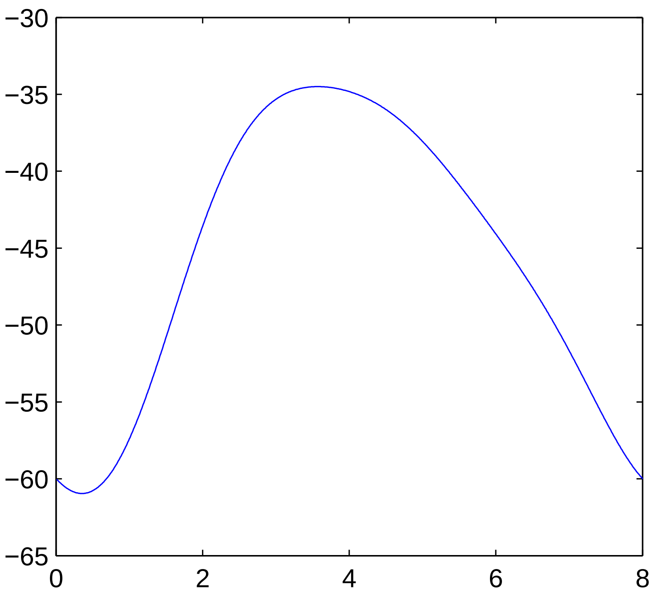
$$H\left(\frac{j3\pi}{4}\right) = \frac{0,4(\frac{j3\pi}{4})^2 + 1,63 \cdot \frac{j3\pi}{4} + 0,391}{(\frac{j3\pi}{4})^2 + 0,8 \cdot \frac{j3\pi}{4} + 0,09} = 0,5162 - 0,5250j = 0,7363 \cdot e^{-0,7939j}$$

i	u_i	$H_i = H(j\omega)\|\omega = i \cdot \omega_0$	$y_i = H_i \cdot u_i$
0	-10,5	$4,3\dot{4}$	$-45,61\dot{6}$
1	$4,0121 \cdot e^{j\frac{5\pi}{4}}$	$1,5712 \cdot e^{-0,81j}$	$6,3038 \cdot e^{3,117j}$
2	$1,4185 \cdot e^{j\pi}$	$0,9776 \cdot e^{-0,8558j}$	$1,3867 \cdot e^{2,2858j}$
3	$0,4457 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$	$0,7363 \cdot e^{-0,7939j}$	$0,3282 \cdot e^{1,5623j}$

A $u_3(t)$ gerjesztésre a rendszer által adott válasz közelítése:

$$y(t) \cong y_0 + \sum_{i=1}^{N} 2|y_i| \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$y(t) \cong -45,61\dot{6} + 2 \cdot 6,3038 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t + 3,117\right) + 2 \cdot 1,3867 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t + 2,2858\right) + 2 \cdot 0,3282 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} \cdot t + 1,5623\right)$$



3.2 Diszkrét idejű rendszer

A diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája az A feladatrész alapján:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1,5(e^{j\vartheta})^2 + 1,4e^{j\vartheta} - 6,74}{(e^{j\vartheta})^2 - 0,8e^{j\vartheta} + 0,52}$$

A feladat során felhasználjuk az előző feladatban kapott u_n értékeket.

$$H(e^0) = \frac{1,5(e^0)^2 + 1,4e^0 - 6,74}{(e^0)^2 - 0,8e^0 + 0,52} = -5,6\dot{1}$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{3}}) = \frac{1,5(e^{j\frac{\pi}{3}})^2 + 1,4e^{j\frac{\pi}{3}} - 6,74}{(e^{j\frac{\pi}{3}})^2 - 0,8e^{j\frac{\pi}{3}} + 0,52} = 17,2890 + 1,2712j = 17,3357 \cdot e^{0,0734j}$$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{3}}) = \frac{1,5(e^{j\frac{2\pi}{3}})^2 + 1,4e^{j\frac{2\pi}{3}} - 6,74}{(e^{j\frac{2\pi}{3}})^2 - 0,8e^{j\frac{2\pi}{3}} + 0,52} = -1,2680 - 4,9123j = 5,0733 \cdot e^{-1,8234j}$$

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1,5(e^{j\pi})^2 + 1,4e^{j\pi} - 6,74}{(e^{j\pi})^2 - 0,8e^{j\pi} + 0,52} = -2,8621$$

i	u_i	$H_i = H(e^{j\vartheta})\vert\vartheta = i \cdot \vartheta_0$	$y_i = H_i \cdot u_i$
0	1	$-5,6\dot{1}$	$-5,6\dot{1}$
1	$1\frac{1}{3}$	$17,3357 \cdot e^{0,0734j}$	$23,1142 \cdot e^{0,0734j}$
2	0	$5,0733 \cdot e^{-1,8234j}$	0
3	$\frac{1}{3}$	$-2,8621$	$-0,954$

A u[k] gerjesztésre a rendszer által adott válasz:

$$y[k] = y_0 + \sum_{i=1}^{\frac{K}{2}-1} 2 \cdot |y_i| \cdot \cos(i\vartheta_0 k + \varphi_i) + y_{\frac{K}{2}} \cdot (-1)^k$$

$$y[k] = -5,6\dot{1} + 2 \cdot 23,1142 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}k + 0,0734\right) - 0,954 \cdot (-1)^k$$