Analízis (1) ALÁÍRÁSÉRT 2001. dec. 20.
VIK, Informatika MEGOLDÁS Munkaidő: 90 perc

1. Feladat (10 pont)

⑤ a.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1}+2^{n+1}}{4^n+5} = ?$

⑤ b.) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^n = ?$

a.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 3^n+2\cdot 2^n}{4^n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \dfrac{0+0}{1+0} = 0,$

mert $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a|<1$.

b.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-5/2}{n}\right)^n} = \dfrac{e^{3/2}}{e^{-5/2}} = e^4$

2. Feladat (19 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

⑧ a.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\,8^{n+1}}{(n+1)!}$ ⑥ b.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n-1}{5^n+3^n}$ ⑤ c.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{2n+3}}$

a.) Hányadoskritériummal (+ tagú a sor)

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)\,8^{n+2}\,(n+1)!}{(n+2)!\;n\,8^{n+1}} = \underbrace{\dfrac{n+1}{n}}_{=\frac{1+\frac{1}{n}}{1} \to 1} \; \underbrace{\dfrac{8}{n+2}}_{\searrow 0} = 0<1 \Rightarrow \sum a_n$ konv.

b.) $\sum\limits^{\infty} b_n$; $b_n>0$

$b_n < \dfrac{2^n}{5^n}$ és $\sum\limits^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ konv. geom. sor $(q=\frac{2}{5})$

$\Rightarrow \sum\limits^{\infty} b_n$ konv. (majoráns krit.)

c.) Váltakozó előjelű a sor és Leibniz típusú, mert $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \searrow 0$. Így konvergens.

3. Feladat (10 pont)

Hol és milyen szakadása van az

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2\sqrt{x^2+2x+1}}$$

függvénynek?

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x^2\,|x+1|}$$ Szakadása van: $x=0$-ban és $x=-1$-ben

(4) $\lim\limits_{x\to 0\pm} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\downarrow\ +\infty} \underbrace{\frac{x+1}{|x+1|}}_{=1} \underbrace{(x-3)}_{\downarrow\ -3} = -\infty$: másodfajú szakadás

(6) $\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}} \frac{x-3}{x^2} = -4$; $\lim\limits_{x\to -1-0} \underbrace{\frac{x+1}{-(x+1)}}_{=-1} \frac{x-3}{x^2} = 4$

$x=-1$-ben véges ugrása van (elsőfajú szakadás)

4. Feladat (10 pont)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,\sin\sqrt[3]{x}$$

$f'(x) = ?$, ha $x \neq 0$

$f'(0) = ?$ (A derivált definíciójával dolgozzon!)

Ha $x\neq 0$, akkor deriválható függvények összetételéről van szó és

(5) $$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

(5) $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}\sin\sqrt[3]{h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2}}\,\frac{\sin\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h}} = 1$$

5. Feladat (16 pont)

a.) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3x-6}$, $\quad f'(x) = ?$, ha $x \neq 2$

b.) $g(x) = (3+x^4)^{\operatorname{sh}(2x)}$, $\quad g'(x) = ?$

Írja fel a g függvény $x_0 = 0$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

a) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{3x-6}\right)^2} \cdot \frac{2\cdot(3x-6)-(2x+1)\cdot 3}{(3x-6)^2}$, ha $x \neq 2$

5

b) $g(x) = e^{\operatorname{sh}2x \ln(3+x^4)}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

6 $\quad g'(x) = (3+x^4)^{\operatorname{sh}2x}\left(2\operatorname{ch}2x \ln(3+x^4) + \operatorname{sh}2x \frac{1}{3+x^4}\cdot 4x^3\right)$, $x \in \mathbb{R}$

$y_é = g(0) + g'(0)(x-0)$

$g(0) = 3^0 = 1$; $g'(0) = 1\cdot(2\cdot 1\cdot \ln 3 + 0) = 2\ln 3 (= \ln 9)$

5 $\quad y_é = 1 + 2\ln 3\, x$

6. Feladat (20 pont)

$$f(x) = \frac{x^3-4}{x^2}$$

Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!

Van-e lineáris aszimptotája a $\pm\infty$-ben?

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; f nem páros, nem páratlan, nem periodikus

$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ $\qquad y_a = x$ (lineáris aszimptota $\pm\infty$-ben) 4

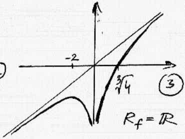
$\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$ 2 ; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = \pm\infty$

$f(x) = 0$: $x^3 - 4 = 0 \to x = \sqrt[3]{4}$ 1

$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$ 2

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	szak. pont	$\nearrow$ (2)

$f(-2)=-3$



(3)

$R_f=\mathbb{R}$

$f''(x)=-\dfrac{24}{x^4}$, ha $x\neq 0$ (2)

f konvex $(-\infty,0)$-án ill. $(0,\infty)$-en. Inflexiós pont nincs (2)

7. Feladat (15 pont)

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 8x^3}{\operatorname{sh} 2x^3} = ?$

b.) $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 \ln \sqrt[3]{x} = ?$

c.) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2e^{5x}-e^{2x}+1}{e^x-e^{5x}+3} = ?$

---

a.) $\frac{0}{0}$ alakú; L'H alkalmazható.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x^3}{\operatorname{sh} 2x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-64x^6}}\cdot 24x^2}{\operatorname{ch} 2x^3 \cdot 6x^2} = \frac{24}{6} = 4$$

b.) $$\lim_{x\to 0+} \underbrace{x^3 \ln\sqrt[3]{x}}_{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0+}\underbrace{\frac{\frac{1}{3}\ln x}{x^{-3}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{3}\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-1}{9}x^3 = 0$$

c.) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{5x}-e^{2x}+1}{e^x-e^{5x}+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-e^{-3x}+e^{-5x}}{e^{-4x}-1+3e^{-5x}} = \frac{2}{-1} = -2$$