Körintegrálos feladatok

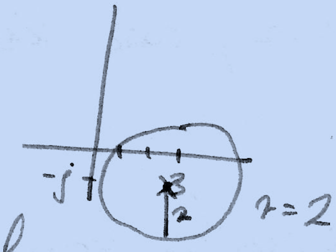
$$\oint f(\dots)\,dz$$

$|z - \dots| = r$

↳ r sugarú, −jel után álló középpontú körről beszélünk
ha simán z, akkor (0,0) a kp.

Pl: $|z+j-3| = |z-(3-j)| = 2$

↳ ez a kp.



szinguláris pont: f függvényben ahol a nevező 0, lehet több is

1. eset: a szinguláris pont a körön kívül van: ekkor a f reguláris, Cauchy-féle alaptétel miatt az int. = 0.

2. eset: a pont rajta a körön: nem értelmezett az integrál

3. eset: a pont a körben van:

Cauchy-féle integrálási formulát kell használni

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

↖ ilyen alakra kell hozni:

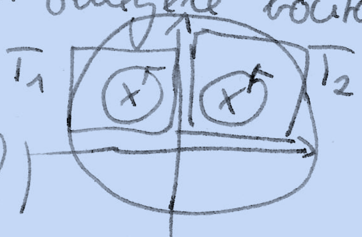
ekkor $f(z)$ reguláris lesz, innentől formula:

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi j}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0)$$

↳ a szinguláris pont

4. eset: több szinguláris pont: 2 integrál összegére bontani; majd 3. eset mind 2-re

Ábra: (pl)



Polárkoordináták:

$x = r \cdot \cos \varphi$

$y = r \cdot \sin \varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Jacobi-det.

$$|J| = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

átváltás után $|J|$-vel szorozni !

Hengerkoordináták

ugyanaz, csak térben, $z = z$ is hozzájön

Harmonikus komplex fv.

$f(z) = u(x,y) + j \cdot v(x,y)$

$u'_x = v'_y \quad u'_y = -v'_x$ ← ha ezek igazak z_0 pontban, ott diff. ható

+ u és v legyen totálisan deriválható (összes parc. derivált $\exists$ és folytonos)

$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + j \cdot v'_x(x_0, y_0)$ → ezt a felső 2 egyenlettel át lehet alakítani

Komplex izék algebrai alakja

$$e^z = e^{x+j\cdot y} = e^x(\cos y + j\cdot \sin y)$$

$|e^z| = e^x$ $\quad$ $\operatorname{arc}(e^z) = y$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ $\operatorname{arc}(z)$: a szög amit bezár x tengely pozitív részével

$\ln z = \ln|z| + j\cdot \operatorname{arc} z$ $\quad$ $-\pi \le \operatorname{arc} z < \pi$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + j\cdot(\operatorname{arc}(z) + 2k\pi)$ $\quad$ $k \in \mathbb{Z}$

$\sin(jx) = j\cdot \operatorname{sh} x$ $\quad$ $\operatorname{sh}(jx) = j\cdot \sin x$

$\cos(jx) = \operatorname{ch} x$ $\quad$ $\operatorname{ch}(jx) = \cos x$

$\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ $\quad$ $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$

$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$

+ info: vonalintegrálós feladatokhoz:

felparaméterezni: $z(t)$ lesz vmi ábra alapján, innentől:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L f(t) \cdot z'(t)\,dt$$

„kezdő" és végpont ábra alapján

Gradienses feladatokhoz:

$g(x,y)$ fv. van megadva, és az, hogy

$\underline{e} \parallel (x,y)$ -val

párhuzamos

Kérdés: $\left.\dfrac{dg}{de}\right|_{(x_0,y_0)} = ?$

Kell: g'_x, g'_y

behelyettesítem a parc. deriváltakba

$\left.\operatorname{grad} g\right|_{(x_0,y_0)} : \begin{pmatrix} g'_x(x_0,y_0) \\ g'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$: sima pont lesz!

Innentől:

$e: \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ → leosztani a hosszával

$\left.\dfrac{dg}{de}\right|_{x_0,y_0}$ = a kapott gradiens és egységvektor skaláris szorzata

Taylor-sorok + Binomiális

f fv. x_0 bázispontú n-ed rendű T-polinomja:

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad |x| \le 1$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

^ ezeket lederiválós - visszaintegrálós tétellel lehet bizonyítani is

+ geometriai sor is kellett lenni !

Binomiális sor:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n}$$

$$R = 1$$

Fourier sor (elvileg nem lesz)

f 2π periodikus

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{a}^{a+2\pi} \text{—— " ——} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad k = 1, 2 \ldots$$