## 1. feladat — 10 pont

Adja meg a

$$p(z) = (1+\imath)z^2 + (3-\imath)z - 4$$

polinom gyökeinek szorzatát trigonometrikus alakban!

**Megoldás:** Az algebra alaptétele szerint létezik $z_1$ és $z_2$ gyökök, melyekre

$$p(z) = (1+\imath)(z-z_1)(z-z_2). \boxed{\textbf{4p.}}$$

Innen $z_1 z_2 = \dfrac{-4}{1+\imath}$, ahonnan $|z_1 z_2| = \dfrac{|-4|}{|1+\imath|} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,\boxed{\textbf{2p.}}$, és $\arg(z_1 z_2) = \arg(-4) - \arg(1+\imath) = \pi - (\pi/4) = 3\pi/4\,\boxed{\textbf{3p.}}$. Vagyis

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + \imath \sin 3\pi/4). \boxed{\textbf{1p.}}$$

## 2. feladat — 4+6+6 pont

Mondja ki, és bizonyítsa be a sorozatoknál tanult, a határérték monotonitásáról szóló tételt!

$$\lim \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n^2} = ?$$

**Megoldás:** **Tétel:** Ha $a_n \le b_n$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és mindkét sorozat konvergens, akkor

$$\lim a_n \le \lim b_n. \boxed{\textbf{4p.}}$$

*Bizonyítás:* Indirekt tegyük fel, hogy $A = \lim a_n > \lim b_n = B$, és legyen

$$\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0!$$

Ekkor létezik $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$n > N_1 \quad \text{esetén} \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

$$n > N_2 \quad \text{esetén} \quad B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon,$$

így

$$n > \max\{N_1, N_2\} \text{ esetén } b_n < B + \varepsilon = A - \varepsilon < a_n$$

adódik, ami ellentmondás. $\boxed{\textbf{6p.}}$

$\lim = \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n = \lim \dfrac{\left(1 + \dfrac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1 - \dfrac{1/2}{n}\right)^n} = \dfrac{e^{3/2}}{e^{-1/2}} = e^2$ Így $2 \le \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$, ha $n$ elég nagy. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Alkalmazható a speciális rendőrelv: $\infty \leftarrow 2^{3n} \le \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n^2}$, miatt $\lim \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n^2} = \infty$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

## 3. feladat — 4 pont

Mondja ki a differenciálszámítás Lagrange-féle középértéktételét!

**Megoldás:** Legyen $f$ deriválható $]a,b[$-n, és folytonos $a$-ban és $b$-ben. Ekkor létezik $\xi \in ]a,b[$: $f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a)$. $\boxed{\textbf{4p.}}$

## 4. feladat — 3+4+5 pont

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x^3} = ?$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = ?$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{1/x} = ?$

**Megoldás:**

(a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0} \underbrace{\sin x}_{\text{korl.}} = 0 \;\boxed{\textbf{3p.}}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \;\boxed{\textbf{2p.}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \;\boxed{\textbf{2p.}}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x} \;\boxed{\textbf{1p.}} = \mathrm{e}^0 = 1$, mert $\mathrm{e}^x$ folytonos a 0-ban $\boxed{\textbf{2p.}}$, és

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\operatorname{ch} x}{x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} x}\cdot(\operatorname{sh} x)}{1} = 0. \;\boxed{\textbf{2p.}}$$

## 5. feladat — 12 pont

Vizsgálja monotonitás és konvexitás szempontjából az

$$f(x) = (x+4)^8(x-1)^2$$

függvényt!

**Megoldás:** $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 8(x+4)^7(x-1)^2 + 2(x+4)^8(x-1)$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$0 = f'(x) = (x+4)^7(x-1)[8(x-1) + 2(x+4)] = (x+4)^7(x-1)10x$ megoldásai $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ és $x_3 = 0$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$f''(x) = 7(x+4)^6(x-1)10x + (x+4)^7 10x + (x+4)^7(x-1)10$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$0 = f''(x) = (x+4)^6[7(x-1)10x + (x+4)10x + 10(x+4)(x-1)] = (x+4)^6(90x^2-40)$ megoldásai $x_1 = -4$, $x_{4,5} = \pm 2/3$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

| | $]-\infty,-4[$ | $-4$ | $]-4,-\frac{2}{3}[$ | $-\frac{2}{3}$ | $]-\frac{2}{3},0[$ | $0$ | $]0,\frac{2}{3}[$ | $\frac{2}{3}$ | $]\frac{2}{3},1[$ | $1$ | $]1,\infty[$ | **2p.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\downarrow\cup$ | l. min.$\cup$ | $\uparrow\cup$ | $\uparrow$infl. | $\uparrow\cap$ | l. max.$\cap$ | $\downarrow\cap$ | $\downarrow$infl. | $\downarrow\cup$ | l. min.$\cup$ | $\uparrow\cup$ | **4p.** |
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | **1p.** |
| $f''$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | **1p.** |

**6. feladat*** **8+8 pont**

(a) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{(x-1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = ?$

**Megoldás:**

(a) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x \boxed{\textbf{4p.}} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c \boxed{\textbf{4p.}}.$

(b) $\displaystyle\frac{4x^2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \qquad / \cdot (x-1)(x^2+2)\boxed{\textbf{2p.}}$

$4x^2 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (-B+C)x + 2A - C \implies A = 4/3,\ B = 8/3,\ C = 8/3 \boxed{\textbf{2p.}}$

Így $\displaystyle\int \frac{4x^2}{(x-1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4/3}{x-1} + \frac{8}{3}\frac{x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4/3}{x-1} + \frac{4}{3}\frac{2x}{x^2+2} + \frac{4}{3}\frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln(x^2+2) + \frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2}) + c \boxed{\textbf{4p.}}$

**7. feladat*** **8+8 pont**

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x = ?$ ($t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel)

**Megoldás:**

(a) $\displaystyle\int_1^2 \underbrace{x}_{g}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'}\,\mathrm{d}x = \left[\underbrace{x}_{g}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{f}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{1}_{g'}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{f}\,\mathrm{d}x \boxed{\textbf{4p.}} = [x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_1^2 = (2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2) - (1\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1) = \mathrm{e}^2 \boxed{\textbf{4p.}}.$

(b) $\displaystyle x = t^2 \implies \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, így $\displaystyle\int_{x=1}^4 \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x = \int_{t=\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} \frac{1}{t+t^2}2t\,\mathrm{d}t \boxed{\textbf{5p.}} = [2\ln(1+t)]_1^2 = 2\ln 3 - 2\ln 2 \boxed{\textbf{3p.}}$

**8. feladat*** **6+8 pont**

Mondja ki az integrálfüggvény folytonosságáról és deriválhatóságáról szóló tételt! (Integrálszámítás (II.) alaptétele.)

Legyen

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in [0,1] \\ t^2, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

Adja meg $x \geq 0$ esetén az $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ függvényt! Határozza meg, hogy hol deriválható, és adja meg a deriváltját!

**Megoldás:** Ha $f$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor $F$ integrálfüggvénye folytonos. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Ha még valamely $\xi \in [a,b]$ esetén $f$ folytonos $\xi$-ben, akkor $F$ deriválható itt, és $F'(\xi) = f(\xi)$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Ha $x \in [0,1]$, akkor $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Ha $x > 1$, akkor $F(x) = \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3+2}{3}$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Mivel $f$ mindenütt folytonos, ezért $F$ mindenütt deriválható, és $F' = f$. $\boxed{\textbf{2p.}}$