INFO AN1 PZH2 | – 1 – | 2018. 12. 06

α - variáns (részletes)

1, a, $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon>0$ esetén $\exists\, \delta(\varepsilon)>0$, melyre

$0<|x-x_0|<\delta$, $x\in D_f$ esetén $|A-f(x)|<\varepsilon$. (4)

b, $\boxed{14}$ $f(x)=\sqrt{13-x^2}$; $A=3$; $x_0=2$

$$|A-f(x)| = \left|3-\sqrt{13-x^2}\right| \overset{(2)}{=} \frac{|9-(13-x^2)|}{\sqrt{13-x^2}+3} \overset{(4)}{=} \frac{|x+2|\cdot|x-2|}{\sqrt{13-x^2}+3} \overset{(2)}{\le}$$

$$\le \frac{5\cdot|x-2|}{3} \overset{(4)}{<} \varepsilon$$

ha $|x-2|<1$, azaz $x\in(1,3)$

Tehát $\delta(\varepsilon)=\min\{1, \frac{3}{5}\varepsilon\}$ (2)

2, a, $\boxed{9}$ f minden $x\neq0$ pontban folytonos és deriválható, hiszen ilyen függvényekből van kialakítva a négy alapművelet és a függvény kompozíció segítségével, és a nevező $\neq 0$. (3)

$f(0-0)=f(0)=(-3)^5\cdot(0-5)=3^5\cdot5$ (1)

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(5x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\Big(\underbrace{\dfrac{\sin(5x)}{5x}}_{\to 1}\Big)^2\cdot\dfrac{25}{3}=\dfrac{25}{3}$ (3)

$f(0-0)\neq f(0+0)$, tehát f nem folytonos, és így nem deriválható az origóban! (2)

b, $\boxed{8}$ Ha $x>0$:

$$f'(x)=\frac{2\cdot5\cdot\sin(5x)\cos(5x)\cdot3x^2-\sin^2(5x)\cdot6x}{9x^4} \quad (4)$$

Ha $x<0$:

$$f'(x)=5(x-3)^4\left(\sin^2(3x)-5\right)+(x-3)^5\cdot2\cdot3\cdot\sin(3x)\cos(3x) \quad (4)$$

3, $\boxed{17}$ $-1\le3x-1\le+1 \Rightarrow 0\le x\le\frac23 \Rightarrow D_f=[0,\frac23]$ (2)

$R_{\arccos}=[0,\pi] \Rightarrow R_f=[\pi,2\pi]$ (2)

$x\mapsto 3x-1$ szig. mon. nő;
$x\mapsto \arccos x$ szig. mon. csökken } $\Rightarrow$ f szig. monoton csökken
$\Rightarrow$ f invertálható. (4)

(Másik megoldás :

$$f'(x)=\frac{(-1)\cdot 3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}<0 \Rightarrow f \text{ szig. mon. csökken} \Rightarrow \exists f^{-1} \;)$$

$$y=\pi+\arccos(3x-1) \Rightarrow 3x-1=\cos(y-\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=x=\frac{1}{3}\big(\cos(y-\pi)+1\big)^{3}=\frac{1-\cos y}{3}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=[\pi,2\pi];\qquad R_{f^{-1}}=D_f=[0,2/3] \quad 3$$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{3}\sin(x-\pi)^{3}=\frac{\sin x}{3}$$

— o —

4, a, $\boxed{10}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-x-1)}{\operatorname{arctg}(x-2)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{2x-1}{x^2-x-1}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)_{3}}=\frac{(3/1)}{1/1}=3 \quad 2$$

2

b, $\boxed{10}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{3x}-1}-\frac{1}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x-(e^{3x}-1)}{3x(e^{3x}-1)} \;2\; \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-3e^{3x}}{3(e^{3x}-1)+9xe^{3x}}\;3\; \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-9e^{3x}}{9e^{3x}+9e^{3x}+27xe^{3x}}\;3\;=-\frac{1}{2}\;2$$

c, $\boxed{10}$

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ch}x)^{\frac{2}{\operatorname{sh}^2x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2\ln(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{sh}^2x}}\;4\;=e^{\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{sh}^2x}}\;2$$

a kitevő

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{sh}^2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\cancel{\operatorname{sh}x}}{\operatorname{ch}x}\right)}{2\,\cancel{\operatorname{sh}x}\,\operatorname{ch}x}=1 \quad 3$$

Tehát az eredeti határérték: $e^1=e$ 1

5, 18

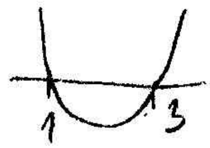
$f(x) = (x^2+1)e^{-x}$

$f'(x) = 2x\,e^{-x} + (x^2+1)\cdot(-1)e^{-x} = (-x^2+2x-1)e^{-x}$ (4)

$f''(x) = (-2x+2)\,e^{-x} + (-x^2+2x-1)\cdot(-1)e^{-x} = (+x^2-4x+3)\underbrace{e^{-x}}_{>0} =$ (4)

$= (x-3)(x-1)e^{-x}$ (4)

x	$x<1$	1	$1<x<3$	3	$3<x$
f''	+	0	−	0	+
f	$\cup$	infl. p.	$\cap$	infl. p.	$\cup$

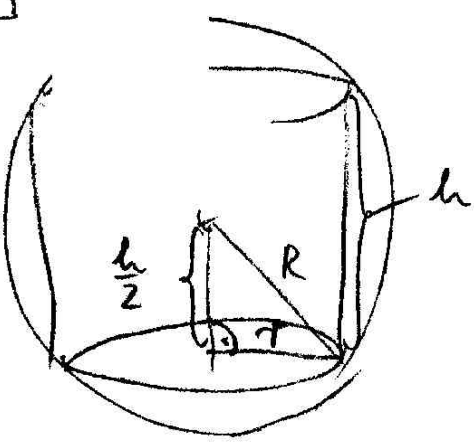


f konvex a $(-\infty, 1]$ és a $[3, +\infty)$ intervallumon. (2)

f konkáv az $[1, 3]$ intervallumon. (2)

Inflexiós pontok helye: 1, 3. (2)

IMSc 8



Ha a henger magassága h $(0<h<2R)$, akkor alapkörének sugara $r = \sqrt{R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}$, (2) és térfogata:

$V(h) = r^2\pi h = \pi\left(R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)h = -\frac{\pi}{4}h^3 + \pi R^2 h$ (2)

$V'(h) = -\frac{3\pi}{4}h^2 + \pi R^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow h^* = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ (2) (1)

$V''(h) = -\frac{3}{2}\pi h < 0$, tehát V-nek h^*-ban valóban maximuma van. (1)

(β variáns) (tömör)

1, a, – mint α. ④

[14] b, $\left|2-\sqrt{5-x^2}\right|$ ② $=\dfrac{\left|4-(5-x^2)\right|}{2+\sqrt{5-x^2}}$ ④ $=\dfrac{|x+1|\cdot|x-1|}{2+\sqrt{5-x^2}}$ ② $\le \dfrac{3\cdot|x-1|}{2+0}$ ④ $<\varepsilon$

ha $|x-1|<1$, $x\in(0,2)$

$\Longrightarrow \delta(\varepsilon)=\min\left\{1,\frac{2}{3}\varepsilon\right\}$ ②

2, a, α-hoz hasonló. $x\neq 0$ esetén f folyt. és diff.-ható, mert... ③

[9] $f(0-0)=f(0)=16\cdot 4$ ① $\neq f(0+0)=\frac{9}{4}$ ③ $\Rightarrow$ f nem folyt, nem diff.-ható 0-ban ②

[8] b, $x>0$: $f'(x)=\dfrac{2\cdot 3\cdot\sin(3x)\cos(3x)\cdot 2x^2-\sin^2(3x)\cdot 4x}{4x^4}$ ④

$x<0$: $f'(x)=4(x-2)^3\cdot(\cos^2(4x)+3)+(x-2)^4\cdot 2\cdot 4\cos(4x)\cdot(-1)\sin(4x)$ ④

---

[17] 3, $-1\le 2x-3\le +1 \Longrightarrow D_f=[1,2]$ ②; $R_f=\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ ②

$x\mapsto 2x-3\ \nearrow$, arccos $\searrow$ $\Longrightarrow f\searrow \Longrightarrow \exists f^{-1}$ ④

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(\sin(\pi-x)+3\right)=\dfrac{\sin x+3}{2}$ ③; $D_{f^{-1}}=\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$; $R_{f^{-1}}=[1,2]$ ③; $(f^{-1})'=\dfrac{\cos x}{2}$ ③

4, a, [10] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H ②}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\frac{2x+1}{x^2+x-1}\right)}{\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right)}$ ③ ③ $=\dfrac{(3/1)}{(1/1)}=3$ ②

[10] b, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{e^{2x}-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{2x\cdot(e^{2x}-1)}$ ② $\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-2}{2(e^{2x}-1)+4xe^{2x}}$ ③ $=$

$\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{2x}}{4e^{2x}+4e^{2x}+8xe^{2x}}$ ③ $=\dfrac{1}{2}$ ②

[10] c, $(\operatorname{ch}x)^{\frac{3}{\operatorname{sh}^2 x}}=e^{\frac{3\ln(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{sh}^2 x}}$ ④

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{sh}^2 x}$ ② $\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{3\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)}{2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}$ ③ $=\dfrac{3}{2}\Longrightarrow$

eredmény: $e^{3/2}$ ①

5, [18] $f(x)=(x^2-7)e^{-x}$

$f'(x)=(-x^2+2x+7)e^{-x}$ (4)

$f''(x)=(x^2-4x-5)e^{-x}$ (4) $=(x-5)(x+1)e^{-x}$ (4)

x	$x<-1$	-1	$-1<x<5$	5	$5<x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	infl.	$\cap$	infl	$\cup$

konvex: $(-\infty,-1]$ és $[5,+\infty)$ (2)

konkáv: $[-1,5]$ (2)

inflexió: -1 és 5 helyen (2)

IMSC: mint L.