Dinamikus programozás/2, rendezések

1. Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy pozitív egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy

   (a) hány a szabályoknak megfelelő út van!

   (b) mekkora a legnagyobb értékű, a szabályoknak megfelelő út, ha egy út értéke a benne szereplő számok szorzata!

2. Egy $f$ fokú létrán bizonyos fokok annyira rozogák, hogy ha rálépünk, leszakadnak. Szerencsére tudjuk, hogy melyik fokok ilyenek, hova nem szabad lépnünk. Egy lépéssel legfeljebb 3 fokot tudunk lépni. Adjon dinamikus programozást használó algoritmust ami meghatározza, hogy

   (a) a létra aljától fel tudunk-e jutni a létra legfelső fokára!

   (b) a létra aljától hányféleképpen tudunk feljutni a létra legfelső fokára!

   (Feltehető, hogy a legfelső fokra rá szabad lépni.) Mennyi az algoritmusok lépésszáma?

3. Legyen $s_1 s_2 \dots s_n$ és $t_1 t_2 \dots t_m$ egy $n$ és egy $m$ hosszú karaktersorozat. Azt szeretnénk, hogy az $n \times m$ méretű $A$ mátrix $A[i,j]$ eleme tartalmazza azt a legnagyobb $k$ számot, melyre az $s_1 s_2 \dots s_i$ és a $t_1 t_2 \dots t_j$ sorozatok utolsó $k$ karaktere megegyezik. Adjon eljárást, ami az $A$ tömböt $O(nm)$ lépésben kitölti.

4. Egy $n$ és egy $m$ karakterből álló szövegben meg akarjuk találni a legnagyobb azonos darabot, azaz ha az egyik szöveg $a_1 a_2 \cdots a_n$ és a másik $b_1 b_2 \cdots b_m$, akkor olyan $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le m$ indexeket keresünk, hogy $a_{i+1} a_{i+2} \dots a_{i+t} = b_{j+1} b_{j+2} \dots b_{j+t}$ teljesüljön a lehető legnagyobb $t$ számra. Adjon erre a feladatra $O(nm)$ lépést használó algoritmust.

5. Éllistával adott egy $n$ pontú $e$ élű $G$ irányított gráf, ami egy DAG. Adjon $O(n+e)$ lépésszámú algoritmust, ami minden $v$ pontra meghatározza azoknak az utaknak a számát

   (a) amelyek egy rögzített $s$ pontból $v$-be visznek!

   (b) amelyek $v$-ből egy rögzített $t$ pontba visznek!

6. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban $n$ akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.

7. Adott az $A[1:n]$ tömb, ami $n$ különböző egész számot tartalmaz növekvő sorrendben. Adjon hatékony algoritmust egy olyan $i$ index meghatározására, melyre $A[i] = i$ (feltéve, hogy van ilyen $i$)!

8. Az $A[1:n]$ tömbben levő elemekről tudjuk, hogy $A[1] \neq A[n]$. Adjon $O(\log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely talál egy olyan $i$ indexet, hogy $A[i] \neq A[i+1]$.

9. Rendezze a $3, 12, 1, 34, 4, 6, 0$ számsorozatot beszúrásos rendezéssel! Hány összehasonlításra volt szükség?

10. Rendezze a $7, 3, 15, 1, 5, 4, 8, 2$ sorozatot gyorsrendezéssel úgy, hogy mindig a tömb első elemét választja particionáló elemnek!

11. Egy tömbön gyorsrendezést futtatva az első particionálás után az eredmény: $4, 2, 3, 1, 6, 8, 11$. Mi lehetett a particionáló elem?

12. Adjon minél kevesebb összehasonlítást használó algoritmust, ami $n$ elem közül megtalálja a legkisebbet és a legnagyobbat is!

13. Adjon minél kevesebb összehasonlítást használó algoritmust, ami $n$ elem közül megtalálja a két legkisebbet!