1

$$i_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \qquad i_T(s)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn\cdot T}=\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

pólusai: $1-e^{-sT}=0 \rightarrow 1=e^{jk\cdot 2\pi}$

$\underline{s_k=-k\cdot\frac{2\pi}{T}j}$ $\qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

2

$$i_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \qquad F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(s+jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

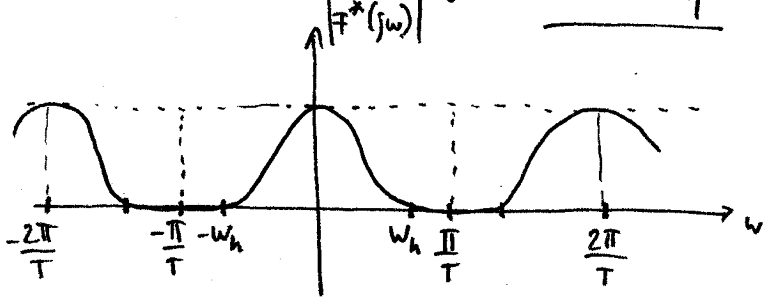
$$f^*(t)=f(t)\cdot i_T(t) \qquad \underline{F^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left[j\left(\omega+k\frac{2\pi}{T}\right)\right]}$$

$F^*(j\omega)$ periodikus $\rightarrow$ periódus hossza $\frac{2\pi}{T}$

3 $f(t)$ analóg sávkorl. jel

$\omega_h=2\pi\cdot f_h$

Shannon-tétel: ha $T\le\frac{\pi}{\omega_h}=\frac{1}{2f_h}$, akkor az analóg jel rekonstruálható a matematikailag mintavételezett jelből egy T erősítésű ideális aluláteresztő szűrővel, amelynek határfrekvenciája: $\underline{\omega_N=\frac{\pi}{T}}$ $\rightarrow$ ez a <u>Nyquist-frekvencia</u>



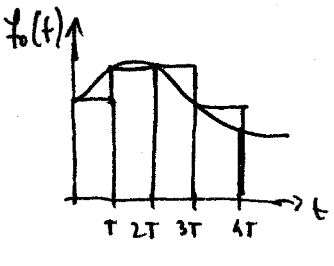
4

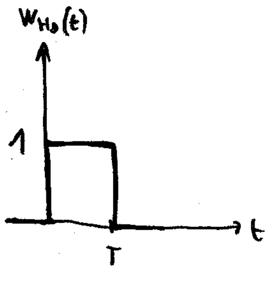
$W_{H0}(t)=1(t)-1(t-T)$ – súlyfgv.

$W_{H0}(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$ – átviteli fgv.

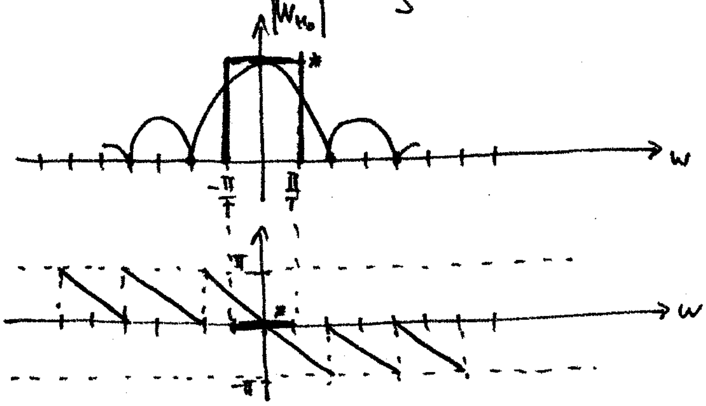
$$\underline{|W_{H0}(j\omega)|=T\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\right|}$$

$$\underline{\varphi_{H0}(\omega)=-\frac{\omega T}{2}+\arg\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}}$$





5 ZOH $\quad W_{H0}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \qquad |W_{H0}(j\omega)| = T \cdot \left|\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right| \qquad \varphi_{H0}(\omega) = -\frac{\omega T}{2} + \arg \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$



* – ideális aluláteresztő am és fm fgv-e

ideális aluláteresztő nem kauzális
↳ ilyen rendszert nem tudunk előállítani

megoldás: tartószerv → id. alulát. viselkedését közelíti, approximálják két mintavételi időpont között

6 analóg szab. W_c adott
↳ mintavételes szab-val közelítjük, T

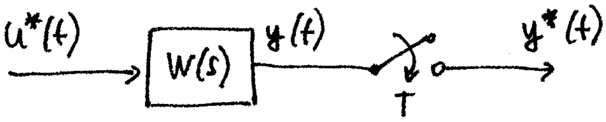
kimeneti DAC → ZOH rontása max $5°$

nulladrendű tartószerv a φ_t-t $\frac{\omega_c T}{2}$-el csökkenti, tehát $\underline{\frac{\omega_c \cdot T}{2} \le 5° \cdot \frac{\pi}{180°}}$

7 $u^*(t)$ jel keresztülküldése $w(t)$ $[W(s)]$-n → keletkezik $y(t)$ $[y^*(t)]$

$$\underline{Y^*(s) = W^*(s) \cdot U^*(s)}$$

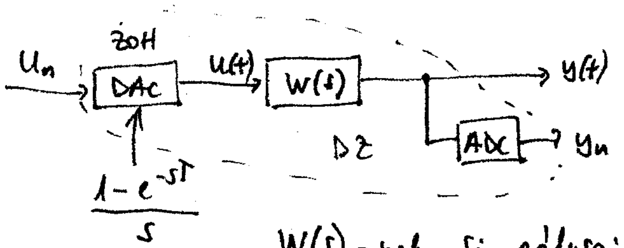
$$\underline{Y^*(s) = \sum_n y(nT)\, e^{-s \cdot n \cdot T}} \qquad \underline{z = e^{sT}}$$



$$\sum y(nT)\, e^{-snT} = \left(\sum w(nT) e^{-snT}\right)\cdot\left(\sum u(nT)\, e^{-snT}\right) \to z = e^{sT} \to \mathcal{Z}\{y(nT)\} = \mathcal{Z}\{w(nT)\}\cdot\mathcal{Z}\{u(nT)\}$$

$$Y^*(s) = W^*(s) \cdot U^*(s)$$

8



$$\underline{D(z) = (1-z^{-1})\cdot \mathcal{Z}\{v(nT)\}} \qquad z = e^{sT}$$

$W(s) \to D(z) \qquad$ D = c2d(W, Ts, 'zoh')

$W(s)$-nek s_i pólusai → $D(z)$-nek $z_i = e^{s_i T}$ pólusai lesznek
zérushelyekre ez nem áll fent

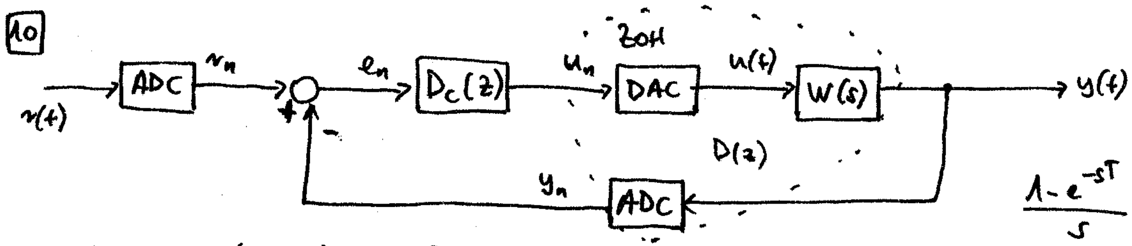
9 $A = \frac{y(\infty)}{u_0}$ – statikus átviteli tényező levezetése $\qquad \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\cdot F(z)$

$Y(z) = D(z)\cdot \frac{u_0}{1-z^{-1}} \qquad \lim y(\infty) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\cdot Y(z) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\cdot D(z)\cdot \frac{u_0}{1-z^{-1}}$

$\underline{A} = \frac{y(\infty)}{u_0} = \underline{D(1)} \qquad y(\infty) = \lim_{z\to 1} D(z)\cdot u_0 = D(1)\cdot u_0$

GY4 EK 2

10



$$\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot W(s) = \left(1-e^{-sT}\right)\cdot \underbrace{\frac{W(s)}{s}}_{\mathcal{L}\{v(t)\}}$$

$$D(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot \mathcal{Z}\left\{v(nT)\right\}$$

$$D_{yr}(z) = \frac{D_c(z)\cdot D(z)}{1+D_c(z)\cdot D(z)} \qquad D_{ur}(z) = \frac{D_c(z)}{1+D_c(z)\cdot D(z)}$$

11

BWD: $\frac{y(t)-y(t-T)}{T} = \frac{dy}{dt} \rightarrow \underline{s = \frac{z-1}{Tz}}$ RSR: $\frac{1}{s} = \frac{Tz}{z-1} \rightarrow \underline{s = \frac{z-1}{Tz}}$

FWD: $\frac{y(t+T)-y(t)}{T} = \frac{dy}{dt} \rightarrow \underline{s = \frac{z-1}{T}}$ LSR: $\frac{1}{s} = \frac{T}{z-1} \rightarrow \underline{s = \frac{z-1}{T}}$

BWD – RSR azonos, FWD – LSR is azonos

12 Tustin-képlet levezetése

$$\underline{s = \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$

$$s\cdot T(z+1) = 2(z-1)$$
$$sTz + sT = 2z - 2$$
$$sTz - 2z = -2 - sT$$
$$z(sT-2) = -(2+sT)$$
$$\underline{z = -\frac{2+sT}{sT-2}}$$

$W(s) \rightarrow D(z)$: D = c2dm (W, Ts, 'zoh')

$D(z) \rightarrow W(s)$: W = d2c (D, 'zoh')

13

$$Y(z) = D(z)\cdot U(z) \qquad u(t) = 1(t) \rightarrow U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{v(nT)\right\}$$

$$D(z) = \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\right\}$$

$$\underline{D(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot\mathcal{Z}\left\{v(nT)\right\}}$$

$W(s) \rightarrow D(z)$: D = c2d (W, Ts, 'zoh') – nulladrendű tartó nem egyenértékű az $1(t)$-vel

14 ideális PID mintavételes közelítése

$$W_{PID}(s) = A_p\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$$

$\frac{1}{sT_i}$ ← RSR $\rightarrow s = \frac{z-1}{Tz}$; sT_d ← LSR $\rightarrow s = \frac{z-1}{T}$

$$D_{PID}(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot\mathcal{Z}\left\{v(nT)\right\}$$

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1\cdot z^{-1} + q_2\cdot z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

$$q_0 = A_p\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)$$
$$q_1 = -A_p\left(1 + \frac{2T_d}{T}\right)$$
$$q_2 = A_p\cdot\frac{T_d}{T}$$

15 közelítő PID

$$W_{PID}(s) = A_p\left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_c}\right) \qquad D_{PID}(z) = \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{v_{PID,n}\right\}$$

$$v_{PID}(t) = A_p + \frac{A_p}{T_i}t + A_p\frac{T_d}{T_c}e^{-\frac{t}{T_c}}$$

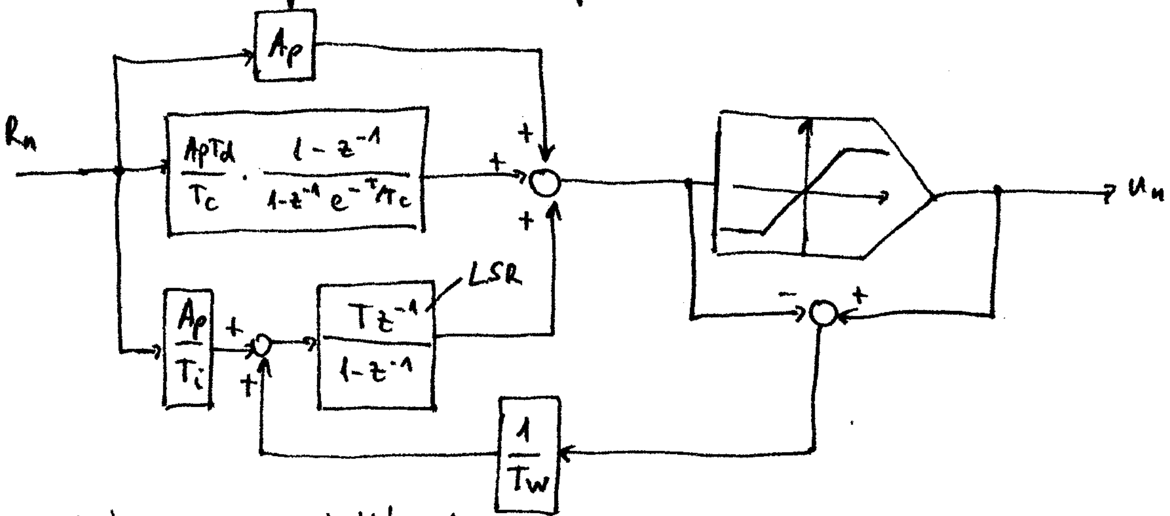
$$\mathcal{Z}\left\{v_{PID,n}\right\} = \frac{A_p}{1-z^{-1}} + \frac{A_p}{T_i}\cdot\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{A_pT_d}{T_c}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}\cdot e^{-\frac{T}{T_c}}}$$

$$D_{PID}(z) = A_p + \frac{A_p}{T_i}\cdot\frac{T\cdot z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{A_pT_d}{T_c}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}e^{-\frac{T}{T_c}}} \rightarrow \text{közös nevező} \quad D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1\cdot z^{-1} + q_2\cdot z^{-2}}{p_0 + p_1\cdot z^{-1} + p_2\cdot z^{-2}}$$

folyt. $q_0 = A_p\left(1+\frac{T_d}{T_c}\right)$ $q_1 = -A_p\left(1+e^{-\frac{T}{T_c}} - \frac{T}{T_i} + 2\frac{T_d}{T_c}\right)$ $q_2 = A_p\left(e^{-\frac{T}{T_c}}\left[1-\frac{T}{T_i}\right] + \frac{T_d}{T_c}\right)$

$p_0 = 1$ $p_1 = -\left(1+e^{-\frac{T}{T_c}}\right)$ $p_2 = e^{-\frac{T}{T_c}}$

$\boxed{16}$ közelítő PID + integrátor antiwindup



azért szükséges a kiegészítés, hogy lecsökkentsük a bemeneten fellépő tranziens hatásainak idejét, a munkapont mindig a lineáris szakasz és a telítési szakasz találkozásánál áll meg

$\boxed{17}$ adott ξ, w_0

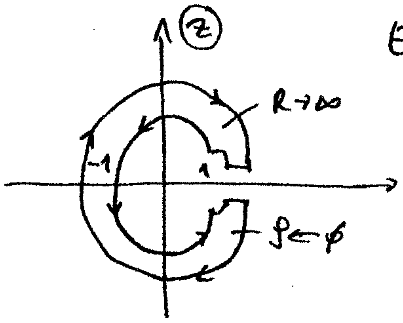
$$s_{1,2} = \overbrace{-\xi\cdot w_0}^{Re} \pm j\,\overbrace{w_0\sqrt{1-\xi^2}}^{Im}$$

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}\cdot T} = e^{-\xi w_0}\cdot\left(\cos\left(w_0\sqrt{1-\xi^2}\,T\right) \pm j\sin\left(w_0\sqrt{1-\xi^2}\,T\right)\right]$$

$$z_{c\infty} = e^{s_{c\infty}\cdot T}$$

$$z_{o\infty} = e^{s_{o\infty}\cdot T}$$

$\boxed{18}$ Nyquist-stabilitáskritérium DI:



$EKVSZ\left(D_0\left(e^{jwT}\right), -1\right) = P$ ← felnyitott kör instabil pólusainak száma

↳ előjeles körülvételek száma

z helyére $z = e^{jwT}$ w pozitív → felső félkör; w negatív → alsó félkör

$w_N = \frac{\pi}{T}$ → Nyquist frekvencia $0 \le w \le w_N$

$\boxed{19}$ Bode-stabilitáskritérium, nincs labilis pólus → $\varphi_t > 0$

w_c – ahol a felnyitott kör erősítése 0dB-re csökken

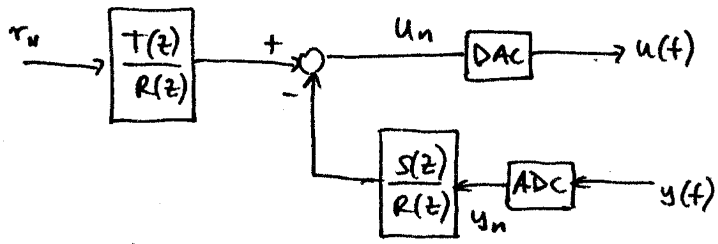
φ_t – w_c helyen az aktuális fázis mennyivel tér el $-180°$-tól

$$\varphi_t = \pi + \arg\{D_0(z=e^{jw_cT})\} > 0$$

$0 \le w \le \frac{\pi}{T}$ $z = e^{jwT}$

↳ dbode esetén

[20] 2-DOF szabályozó:



$$D(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$B(z) = B^+(z) \cdot B^-(z)$$

↳ kiejthető

$$\frac{B(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)} \approx \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot \frac{A_0(z)}{A_0(z)}$$

$$\left.\begin{array}{l} R(z) = B^+ \cdot R_1 = B^+ (z-1)^l \cdot R_1' \\ B_m(z) = B^- \cdot B_m' \end{array}\right\} \text{legyen}$$

$\cancel{T = B_m' \cdot A_0}$

↳ egyenletbe beírva

$$T = B_m' \cdot A_0$$

$$A_m \cdot A_0 = A \cdot R_1' \cdot (z-1)^l + B^- \cdot S$$

[21] 2-DOF

$$D_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

l db integrátor

$B^+ = 1$ $\quad$ gr $A = 3$

gr $B^- = 2$ $\quad$ $l = 1$ $\quad$ gr $R_1' = 2$

gr $A_m = 1 + 2 = 3$ $\quad$ gr $A_0 = 3$ $\quad$ gr $S = 3$

monic: A, B^+, R_1', A_m, A_0

nem monic: B^-, B_m', S

$$A_m = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_{c\infty}) \qquad B^- = b_0 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_2$$

$$A_0 = (z - z_{0\infty})^3$$

$$S = s_0 \cdot z^3 + s_1 z^2 + s_2 \cdot z + s_3$$

$$R_1' = z^2 + r_1 \cdot z + r_2$$

$$A = z^3 + a_1 \cdot z^2 + a_2 \cdot z + a_3$$

$$\bar{A} \cdot X + \bar{B} \cdot Y = C$$

$X = R_1' = z^2 + r_1 \cdot z + r_2$

$\bar{B} = B^-$ $\quad$ $C = A_m \cdot A_0$

$Y = S$ $\quad$ $\bar{A} = A(z-1)$

[22] $\bar{A} \cdot X + \bar{B} \cdot Y = C$

$\bar{A} = A(z-1)$ /$l=1$/ $\quad$ $\bar{B} = B^-$ $\quad$ $C = A_m \cdot A_0$ $\quad$ $B_m' = \frac{A_m(1)}{B^-(1)}$

$X = R_1'$ $\quad$ $Y = S$ $\quad$ $B = B^- \to B^+ = 1$

$$R(z) = B^+ \cdot (z-1) \cdot R_1'$$

$$R(z) = (z-1)(z^2 + r_1 \cdot z + r_2)$$

$$T(z) = B_m' \cdot A_0 \qquad S(z) = \frac{A_m A_0 - A(z-1) \cdot R_1'}{B^-}$$

[23] $z \to w$ bilineáris transzformáció

$$D(z) \to D(w) \longrightarrow w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}},$$

$$(z - z_i) \to \left(\frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}} - z_i \right) = (1 - z_i) \cdot \frac{1 + \frac{wT}{2} \cdot \frac{1+z_i}{1-z_i}}{1 - \frac{wT}{2}}$$

$$(z - 1) \to \left(\frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}} - 1 \right) = \left(\frac{wT}{1 - \frac{wT}{2}} \right)$$

$$D(z) = A_z \cdot \frac{\prod^m (z - z_{0i})}{(z-1)^l \cdot \prod^n (z - z_i)} \to D(w) = A_w \cdot \frac{\left(1 - \frac{wT}{2}\right)^{l+n-m} \cdot \prod^m \left(1 + \frac{wT}{2} \cdot \frac{1+z_{0i}}{1-z_{0i}}\right)}{w^l \cdot \prod^n \left(1 + \frac{wT}{2} \cdot \frac{1+z_i}{1-z_i}\right)}$$

legalább egy zérushely fellép $w = \frac{2}{T}$ -nél

↳ csökkenti $f_t \to \downarrow f_t \downarrow$

$$A_w = A_z \frac{\prod^m (1 - z_{0i})}{T^l \cdot \prod^n (1 - z_i)}$$

$\boxed{24}$

$$W(s) \xrightarrow[\text{'zoh'}]{\text{c2dm}} D(z) \xrightarrow[\text{'tustin'}]{\text{d2cm}} D(w) \xrightarrow{\text{fsolve}} D_c(w) \xrightarrow[\text{'tustin'}]{\text{c2dm}} D_c(z)$$

$$D_c(w) = A_c(w)\,\frac{(1+w\tau_1)(1+w\tau_2)}{w(1+w\tau_c)}$$

$\boxed{25}$ véges beállási idejű szabályozás tervezési célkitűzései

↳ a szabályozás hibája véges sok mintavételi időpont után nullává váljon

$$D(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \qquad \underline{D_c(z^{-1}) = \frac{L(z^{-1})\cdot A(z^{-1})}{1-L(z^{-1})\cdot B(z^{-1})}}$$

dead-beat → <u>zárt rendszer minden pólusa $z = 0$-ban van</u>

$\boxed{26}$ $L(z^{-1}) = l_0 + l_1\cdot z^{-1}$ együtthatóinak megválasztási elve

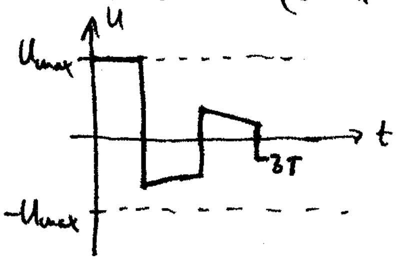
$K = L\cdot B$

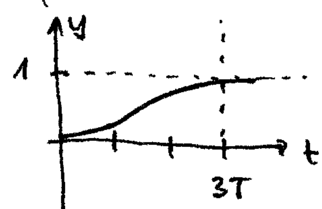
$M = L\cdot A = (l_0 + l_1\cdot z^{-1})(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n})$

<u>legyen $p = 1$</u>

$u_0 = l_0\cdot a_0 \rightarrow \underline{l_0 = \frac{U_{max}}{a_0}}$

$$\underline{l_1 = \frac{1}{b_0+\ldots+b_n} - l_0}$$

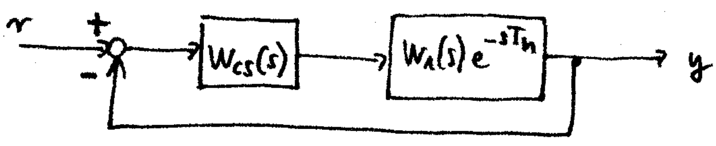




$$\underline{f(T) = \frac{\left|\max\{|u_i|\} - U_{max}\right|}{U_{max}} + \left|\max\{|y_i|\} - 1\right|}$$

$\boxed{27}$ holtidőt is tartalmazó rendszer

$$\frac{W_c\cdot W_1\cdot e^{-sT_h}}{1+W_c\cdot W_1} = \frac{W_{cs}\cdot W_1\cdot e^{-sT_h}}{1+W_{cs}\cdot W_1\cdot e^{-sT_h}}$$



$$\underline{W_{cs}(s) = \frac{W_c(s)}{1+W_1(s)\cdot W_c(s)\left(1-e^{-sT_h}\right)}}$$

$T_h = d\cdot T \qquad e^{-sT_h} = z^{-d}$

$$\underline{D_{cs}(z) = \frac{D_c(z)}{1+(1-z^{-d})\cdot D_c(z)\cdot D_1(z)}}$$