Méréselmélet 1. zárthelyi **2019.03.12. (100 perc) A**

1. N zajos megfigyelésre alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában az $s(n) = sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ vagy a $c(n) = cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ diszkrét időfüggvényű jel van-e jelen? A zaj additív, Gauss eloszlású, nulla várható értékű, σ_w=0.5 szórású valószínűségi változó. H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy az $s(n)$ jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége P_0=0.9. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy a $c(n)$ jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége P_1=0.1. A költségek: C_{10} =C_{01} =10; C_{00} =C_{11} =1. Határozza meg a mért adatok előfeldolgozásának módját, és a hozzátartozó döntési küszöb értékét (max. 5 pont)! Számítsa ki a döntési küszöb numerikus értékét $N = 3$, és $n = 0,1,2$ diszkrét időpontokban vett minták esetére (max. 2 pont)!

Megoldás:

Feltételezve, hogy zaj minták egymással nem korreláltak, a két hipotézishez felírható feltételes sűrűségfüggvények:

$$f(\mathbf{z}|H_0) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_w\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-s(k)\right)^2}, f(z|H_1) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_w\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-c(k)\right)^2}$$

A logaritmikus likelihood arány:

$$ln\Lambda(z) = -\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-c(k)\right)^2 + \frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-s(k)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1} z(k)\left(c(k)-s(k)\right) - \frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(c^2(k)-s^2(k)\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\eta$$

Átrendezve, és behelyettesítve az $s(n) = sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ és $c(n) = cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ értékeket:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z(k)\left(cos\frac{2\pi}{N}k - sin\frac{2\pi}{N}k\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(cos\frac{4\pi}{N}k\right) + \frac{\sigma_w^2}{N}ln\eta,$$

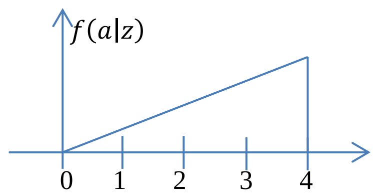
ahol $\eta = \frac{P_0}{P_1}\frac{(C_{10}-C_{00})}{(C_{01}-C_{11})}$. Az előfeldolgozás módja:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z(k)\left(cos\frac{2\pi}{N}k - sin\frac{2\pi}{N}k\right)$$

A döntési küszöb értéke:

$$\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(cos\frac{4\pi}{N}k\right) + \frac{\sigma_w^2}{N}ln\eta = 0 + \frac{0.25}{3}ln9 \approx 0.183$$

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 3 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 2 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) számértékét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő varianciáját (max. 2 pont)?



Megoldás:

$$\hat{a}_{MS} = \int_0^4 af(a|z)da = \int_0^4 \frac{a^2}{8}da = \frac{a^3}{24}\Big]_0^4 = 2\frac{2}{3},$$

mert $f(a|z)$ értéke 4-nél $1/2$, így az egyenes szakasz meredeksége $1/8$.

$$\hat{a}_{ABS} = 2\sqrt{2},$$

mert a nullától eddig terjedően a háromszög területe: $\hat{a}_{ABS}^2/16 = 1/2$.

$$\hat{a}_{MAP} = 4,$$

mert $f(a|z)$ itt veszi fel legnagyobb értékét.

$$var(\hat{a}_{MS}) = \int_0^4 (a - \hat{a}_{MS})^2 f(a|z) da = \int_0^4 (a - \hat{a}_{MS})^2 \frac{a}{8} da =$$

$$= \frac{a^4}{32} - \frac{a^3}{12}\hat{a}_{MS} + \frac{a^2}{16}\hat{a}_{MS}^2 \Big]_0^4 = \frac{8}{9}$$

3. Mérendő egy ismert jel ismeretlen A amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = Acos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + w(n)$, $n = 0,1,\ldots N-1$. Az ismeretlen A paraméter eloszlása nem ismert. A w_k megfigyelési zaj nulla várható értékű, Gauss eloszlású, színes zaj, kovariancia mátrixa C_w. Vezesse le a paraméter legjobb maximum likelihood (ML) becslésének ($\hat{a}_{ML}, C_{\hat{a}_{ML}}$) összefüggéseit (max. 4 pont)! Határozza meg $C_{\hat{a}_{ML}}$számértékét $\sigma_w = 0.1V, \rho = 0.5$ és $C_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$ mellett (max. 3 pont)!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának az A paramétertől függő része:

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)$$

Ennek deriváltja A szerint:

$$\frac{\partial}{\partial A}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)\right] = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A),$$

ahonnan

$$\hat{A}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{z}.$$

A becslő varianciája (kovariancia mátrixa):

$$C_{\hat{A}_{ML}} = E\left[\left(\hat{A}_{ML} - E(\hat{A}_{ML})\right)\left(\hat{A}_{ML} - E(\hat{A}_{ML})\right)^T\right] =$$

$$= \{[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)\}\{[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)\}^T =$$

$$[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1}$$

ahol felhasználtuk, hogy $E(\hat{A}_{ML}) = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}A$, valamint, hogy definíciója szerint

$$(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T = \boldsymbol{C}_w$$

A numerikus értékek meghatározásához:

$$\boldsymbol{U}^T = \left[1 \quad cos\frac{2\pi}{N} \quad \cdots \quad cos\frac{2\pi}{N}(N-1)\right] = [1 \quad -0.5 \quad -0.5]$$

ahol most $N = 3$.

$C_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$ inverze: $\boldsymbol{C}_w^{-1} = \frac{1}{\sigma_w^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho^2} & -\frac{\rho}{1-\rho^2} \\ 0 & -\frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix} = \frac{100}{V^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

$$[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}] = \frac{100}{V^2} [1 \quad -0.5 \quad -0.5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \frac{400}{3V^2}$$

vagyis

$$C_{\hat{A}_{ML}} = var(\hat{A}_{ML}) = 0.0075V^2$$

4. A vizsgált környezetről feltételezzük, hogy jellemezhető $y(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + w(t)$ időfüggvénnyel. Határozza meg polinomiális regresszió szabályai szerint az időfüggvény paramétereinek legkisebb négyzetes hibájú becslőjét (max. 4 pont)!

Megoldás:

Keressük a négyzetes hiba minimumát:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} E\left[\left(y(t) - a_1 u(t) - a_2 u^2(t)\right)^2\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_2} E\left[\left(y(t) - a_1 u(t) - a_2 u^2(t)\right)^2\right] = 0$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$E\left[\left(y(t) - a_1 u(t) - a_2 u^2(t)\right) u(t)\right] = 0, \quad E\left[\left(y(t) - a_1 u(t) - a_2 u^2(t)\right) u^2(t)\right] = 0$$

ahonnan:

$$a_1 = \frac{E[y]E[u]E[u^4] - E[y]E[u^2]E[u^3]}{E[u^4]E[u^2] - E^2[u^3]}, \quad a_2 = \frac{E[y]E^2[u^2] - E[y]E[u]E[u^3]}{E[u^4]E[u^2] - E^2[u^3]}$$

5. Mutassa be, hogy mire szolgál a Cramer-Rao alsó korlát (CRLB): Vektor paraméter esetére adja meg (1) alkalmazásának feltételeit (max. 2 pont); (2) számításának módját (max. 2 pont); (3) az alsó korlát elérésének feltételét (max. 2 pont)!

Megoldás:

A jegyzet alapján:

Tételezzük fel, hogy a mérési (vektor)adatok valószínűség sűrűségfüggvényére teljesül a regularitási feltétel minden $\boldsymbol{a}$ esetében:

$$E\left[\frac{\partial lnf(z; \boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right] = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

Ekkor bármely torzítatlan becslőre igaz, hogy a becslő kovariancia mátrixának és az ún. Fisher információs mátrix inverzének a különbsége pozitív szemidefinit:

$$\boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}} - \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{a}) \geq \boldsymbol{0} \tag{2}$$

A Fisher információs mátrix elemei:

$$\boldsymbol{I}_{ij}(\boldsymbol{a}) = -E\left(\frac{\partial^2 lnf(z; \boldsymbol{a})}{\partial a_i \partial a_j}\right) \tag{3}$$

Egy olyan torzítatlan becslő, amelyik eléri a Cramer-Rao alsó korlátot akkor és csak akkor található, ha:

$$\frac{\partial lnf(z; \boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{g}(z) - \boldsymbol{a}) \tag{4}$$

struktúrájú. Ilyenkor a becslő $\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{g}(z)$, és a kovariancia minimum $\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{a})$.

6. Távolságot mérünk radarral: $R = \tau\frac{c}{2}$, ahol τ a reflektálódott elektromágneses hullám terjedési ideje, c a fénysebesség. A terjedési idő megfigyelésére van lehetőségünk, összesen két megfigyelést végzünk. A megfigyelési egyenlet: $z_k = \tau_k + w_k$, ahol w_k nulla várható értékű, $C_w = \sigma_w^2\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$ kovariancia mátrixú, Gauss eloszlású zaj. Válasszon olyan mérési módszert, amely minimális varianciájú, torzítatlan becslést eredményez! Vezesse le a becslés varianciájának CRLB értékét, és fejezze ki a becslőt és annak szórását (max. 4 pont)! Adja meg a numerikus értékeket is, ha $z_0 = 95\mu s, z_1 = 105\mu s,\ \sigma_w = 5\mu s, \rho = 0.5$ (max. 3 pont)! Ezt követően határozza meg a távolság értékét és szórását ($c = 3\cdot 10^5\frac{km}{s}$) (max. 1 pont)!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának a τ paramétertől függő része:

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)$$

Ennek deriváltja τ szerint:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)\right] = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau),$$

ahonnan

$$\hat{\tau}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z},$$

illetve

$$\frac{\partial lnf(z,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)\right] = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau) = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}([\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}-\tau) =$$

$$= I(\tau)(g(z)-\tau)$$

azaz a becslő varianciája:

$$var(\hat{\tau}_{ML}) = I^{-1}(\tau) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

A numerikus értékek érdekében:

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sigma_w^2(1-\rho^2)}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\rho\\ -\rho & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{2}{\sigma_w^2(1+\rho)},$$

vagyis:

$$var(\hat{\tau}_{ML}) = I^{-1}(\tau) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1} = \frac{\sigma_w^2(1+\rho)}{2}, \hat{\tau}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z} = \frac{z_0+z_1}{2}$$

Tehát:

$$\hat{\tau}_{ML} = 100\mu s, \sqrt{var(\hat{\tau}_{ML})} = \sqrt{18.75} \approx 4.33\mu s$$

A távolság értéke és szórása:

$$\hat{R}_{ML} = \hat{\tau}_{ML}\frac{c}{2} = 10^{-4}\frac{3\cdot 10^5}{2}km = 15km,\ \sqrt{var(\hat{R}_{ML})} = \frac{c}{2}\sqrt{var(\hat{\tau}_{ML})} = \frac{3\cdot 10^5}{2}4.33\cdot 10^{-6} \approx 650m$$

7.*A $z(n) = Asin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) + Bcos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) + w(n)$ összefüggéssel leírható megfigyelési modellt alkalmazunk, ahol $w(n)$ Gauss eloszlású, fehér zaj. Az illesztett jel m egész periódusából 100 mintát veszünk. A jel/zaj viszony: $\frac{A^2+B^2}{2\sigma_w^2} = 10$. Vezesse le a fázisbecslés varianciájának Cramer-Rao alsó korlátját megadó összefüggést, és számítsa ki numerikus értékét (max. 5 pont)!

Megoldás:

Célszerűen a megadott forma ismeretlenjeit keressük először az $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ paraméter vektor bevezetésével. Erre korábbi eredményeink felhasználásával, mivel egészszámú periódust átlagolunk:

$$\boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}} \geq \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_w^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_w^2}{N} \end{bmatrix}$$

A fázist az

$$Asin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) + Bcos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) = Ccos\left(\frac{2\pi}{N}mn + \varphi\right) = Ccos(\varphi)cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) - Csin(\varphi)sin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right)$$

átírás alapján a

$$\varphi = arctg\left(-\frac{A}{B}\right)$$

összefüggés, valamint a jegyzet (122) összefüggés alapján számoljuk:

$$var(\hat{\varphi}) \geq \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial A} & \frac{\partial\varphi}{\partial B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_w^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_w^2}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial A} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial B} \end{bmatrix}$$

mivel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A} = -\frac{B}{A^2 + B^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial B} = \frac{A}{A^2 + B^2}$$

behelyettesítés után

$$var(\hat{\varphi}) \geq \frac{2\sigma_w^2}{N}\frac{1}{A^2 + B^2} = 0.001$$