

**1. feladat (15 pont)**

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = f(x)$$

- Határozza meg  $f(x) = 0$  esetén a fenti differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozza meg  $f(x) = e^{2x}$  esetén a fenti differenciálegyenlet általános megoldását!
- Milyen alakban kereshető  $f(x) = 3 \sin(2x)$  esetén a fenti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása? (A differenciálegyenletet nem kell megoldani.)

**2. feladat (15 pont)**

- Mit nevezünk binomiális sornak? Mennyi a konvergenciasugara? Definiálja az általánosított binomiális együtthatót! ( $\binom{\alpha}{n} = ?$ )
- Írja fel az  $f(x) = (8+3x^3)^{-1/3}$  függvény origó középpontú Taylor-sorát, és határozza meg a sor konvergenciasugarát! Írja fel elemi műveletekkel  $f$  ötödrendű Taylor-polinomját!

**3. feladat (15 pont)**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \operatorname{arctg}(x).$$

Határozza meg  $f$  és  $g$  origó középpontú hatványsorát, és adja meg mindkét esetben a konvergenciasugarát! (A  $g$  függvény sorfejtéséhez felhasználhatja az  $f$  sorfejtését.)

**4. feladat (15 pont)**

- Definiálja az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétváltozós függvény  $(x_0, y_0)$  pontban vett határértékét!
- Mondja ki többváltozós függvény határértékére az átviteli elvet!
- 

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2 \cos(y^2)} = ?$$

**5. feladat (6+4+9=19 pont)\***

- a) Ismertesse a síkbeli polárkoordinátákat, és számolja ki a síkbeli polártranszformáció Jacobi-determinánsát!
- b) Ismertesse a gömbi polárkoordinátákat! (Ábrán mutassa meg jelentésüket!)
- c) Számolja ki az  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  és a  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$  egyenlőtlenségekkel megadott térrész térfogatát!

**6. feladat (8 pont)\***

Határozza meg az összes  $z \in \mathbb{C}$  komplex számot, melyre az

$$e^3 \cdot e^{2z} = 2(i - 1)$$

egyenlőség teljesül!

**7. feladat (13 pont)\***

Legyen  $L$  a  $2i$  pontból az  $1$  pontba mutató irányított egyenes szakasz! Határozza meg a következő vonalintegrálok értékét algebrai alakban!

$$a) \quad \int_L \operatorname{Re}(z) \, dz = ? \qquad b) \quad \int_L \sin(iz) \, dz = ?$$

---

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

**8. feladat (10 pont)**

Határozza meg az

$$y' = y^3 \cdot \cos(3x)$$

differenciálegyenletnek az  $y(\frac{\pi}{4}) = 4$  kezdeti feltételhez tartozó megoldását!

**9. feladat (10 pont)**

Határozza meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2} x^n$$

---

A \*-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!