A variáns:

1*, [6] a, $$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2+1}}\,dx = \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arsh}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x\right) + C$$ (3) (3)

[6] b, $$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x\,(2x^2+3)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot(2x^2+3)^{1/2} + C$$ (3) (3)

$f'\cdot f^{1/2}$ alak

[6] c, $$\int \underset{u}{(3x+2)}\,\underset{v'}{e^{2x}}\,dx = (3x+2)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{3}{2}e^{2x}\,dx = \frac{3x+2}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C =$$ (3)

$u' = 3$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$= e^{2x}\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C$$ (3)

[6] d, $$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \Rightarrow x = A(x-2)+B = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{A}\,x + \underbrace{(B-2A)}_{0}$$ (2)

$A = 1,\quad B = 2$ (2)

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - 2\,\frac{1}{x-2} + C$$ (2)

— o —

2*, a, Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f Riemann-int.-ható $[a,b]$-n,

[3] $\boxed{\text{vagy}}$ ha f monoton $[a,b]$-n, — " — " —

[3] b, $$K = \frac{1}{3}\int_2^5 f(x)\,dx$$

— o —

3*, [10] $$s = \int_0^1 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+(4x)^2}\,dx = \int_0^{\mathrm{arsh}\,4} \mathrm{ch}\,t\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{ch}\,t\,dt =$$ (3) (1) (3)

$4x = \mathrm{sh}\,t$

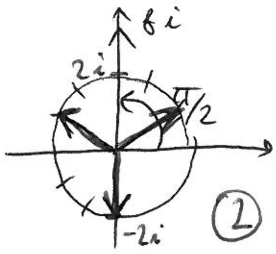
$dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{ch}\,t\,dt$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\mathrm{arsh}\,4} \left(e^t + e^{-t}\right)^2 dt = \frac{1}{16}\int_0^{\mathrm{arsh}\,4} e^{2t} + 2 + e^{-2t}\,dt = \frac{1}{16}\left[\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{\mathrm{arsh}\,4} =$$ (3)

$$\left(= \frac{\mathrm{arsh}\,4}{8} + \frac{1}{16}\,\mathrm{sh}(2\,\mathrm{arsh}\,4) = \frac{\mathrm{arsh}\,4}{8} + \frac{1}{8}\cdot\underbrace{\mathrm{sh}(\mathrm{arsh}\,4)}_{4}\,\underbrace{\mathrm{ch}(\mathrm{arsh}\,4)}_{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{arsh}\,4)}} = \frac{\mathrm{arsh}\,4}{8} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

4, $\boxed{\cancel{10}}$ $\boxed{12}$

$$8i = 8\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = z^3 \quad ②$$



$$\Rightarrow z_k = \sqrt[3]{8}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right)} \; ③ \quad (k=0,1,2)$$

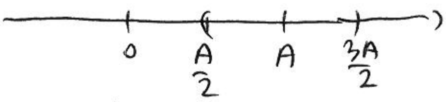
$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \underline{\underline{\sqrt{3}+i}} \; ②, \quad z_1 = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} = \underline{\underline{-\sqrt{3}+i}} \; ②$$

$$z_2 = 2\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = \underline{\underline{-2i}} \; ①$$

— ∘ —

5, Ha $a_n \to A$, és $A \neq 0$, akkor elég nagy indexre $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$, tehát

$\boxed{10}$ $a_n \neq 0$, ha $n > N_0$.



$$\underbrace{\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right|}_{③} = \left|\frac{A - a_n}{A a_n}\right| \underbrace{\leq}_{\text{Ha } n>N_0,\ |a_n| > \frac{A}{2}} \underbrace{\frac{|A - a_n|}{A^2/2}}_{\text{Helyes becslés } ⑤} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad ② \text{ (végeredmény)}$$

— ∘ —

6, a, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, ha x_0 a D_f torlódási pontja, és

$\boxed{4}$ $\forall P > 0$ esetén $\exists \delta(P) > 0$, melyre $f(x) > P$, ha $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, $x \in D_f$.

b, $\boxed{12}$ $f(x) = \left(x + \frac{1}{2x}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-3}\right)$ $\qquad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,3\}$

f a $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,3\}$ halmaz minden pontjában folytonos, mert itt a törtek nevezője nem nulla, f folytonos függvények kompozíciója, szorzata. ②

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \left(\underset{\downarrow\,0}{x} + \underset{\downarrow\,\pm\infty}{\frac{1}{2x}}\right) \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-3}\right)}_{\downarrow\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) < 0} = \mp\infty \; ④ \Rightarrow \text{másodfajú szakadás van } x=0\text{-ban.} \; ①$$

$$\lim_{x\to 3\pm 0} \left(\underset{\downarrow\,3}{x} + \underset{\downarrow\,1/6}{\frac{1}{2x}}\right) \operatorname{arctg}\left(\underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\downarrow\,\pm\infty}\right) = \left(3+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \; ④ \Rightarrow \text{Elsőfajú, véges ugrás} \; ①$$

[10] 7, a, **T.:** Ha f diff.-ható x_0-ban, és f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0)=0$. (3)

(7) **B.:** Tegyük fel, hogy f-nek lokális minimuma van x_0-ban.

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0+}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\frac{+}{+}>0}\geq 0$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0-}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\frac{+}{-}<0}\leq 0$$

de $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$, tehát $f'(x_0)=0$.

[12] b, $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$; $f'(x)=\dfrac{3x^2(1-x)-x^3(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{-2x^3+3x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}$ (4)

$(x\neq 1)$

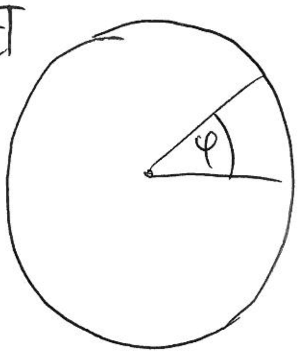
(4) $\begin{cases} x^2\geq 0 \\ (1-x)^2\geq 0 \\ 3-2x>0 \iff x<\frac{3}{2} \end{cases}$

x	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}<x$
f'	$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	vízszintes infl. pont	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Tehát f-nek a $\frac{3}{2}$-ben lokális maximuma van. Máshol nincs lokális szélsőértéke. (4)

IMSC

14 pont



Legyen a φ szöggel jellemzett pontban a hőmérséklet $T(\varphi)$.

T folytonos, (2) 2π-szerint periodikus függvény. (2)

Legyen $\Delta(\varphi) = T(\varphi) - T(\varphi+\pi)$. (3) Pontosan akkor azonos hőmérsékletű két ~~átellenes~~ szemben levő pont, ahol $\Delta(\varphi) = 0$.

$$\Delta(\varphi+\pi) = T(\varphi+\pi) - \underbrace{T(\varphi+2\pi)}_{T(\varphi)} = -\Delta(\varphi), \quad (3)$$

Δ folytonos,

Tehát $\Delta(0)$ és $\Delta(\pi)$ ellentétes előjelű. A Bolzano-tételt alkalmazva a Δ függvényre és a $[0,\pi]$ intervallumra, (4) azt kapjuk, hogy $\exists\, \xi \in (0,\pi)$, melyre $\Delta(\xi)=0$, tehát $T(\xi) = T(\xi+\pi)$ ✓

Pontozás:

$T(\varphi)$ folytonos: (2) periodikus (2)

$\Delta(\varphi)$ bevezetése: (3) $\Delta(\varphi) = -\Delta(\varphi+\pi)$ (3)

Bolzano-tétel: (4)

B variáns:

1* a, $\boxed{6}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^2+1}}\,dx = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arsh}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\,x\right)+C \quad (3) \quad (3)$$

b, $\boxed{6}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+2}}\,dx = \frac{1}{10}\int \underbrace{10x\,(5x^2+2)^{-1/2}\,dx}_{f'\cdot f^{-1/2}\text{ alak}} \quad (3) \quad = \frac{1}{10}\cdot 2\cdot\sqrt{5x^2+2}+C \quad (3)$$

c, $\boxed{6}$

$$\int (2x+5)e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(2x+5)e^{3x} - \int \frac{2}{3}e^{3x}\,dx \quad (3) \quad = \frac{2x+5}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x}+C =$$

$u = 2x+5$, $v' = e^{3x}$

$u' = 2$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$= \frac{2}{3}x\,e^{3x} + \frac{13}{9}e^{3x} + C \quad (3)$$

d, $\boxed{6}$

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \quad (2) \quad \Longrightarrow \quad x = A(x-3)+B = \underbrace{A}_{1}x + \underbrace{(B-3A)}_{0}$$

$$\Longrightarrow A = 1;\ B = 3 \quad (2)$$

$$\int\left(\frac{1}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}\right)dx = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C \quad (2)$$

2* a, $\boxed{3}$ mint α; b, $\boxed{3}$ $K = \frac{1}{4}\int_3^7 f(t)\,dt$

3* $\boxed{10}$

$$S = \int_0^1 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \quad (3) \quad = \int_0^1 \sqrt{1+36x^2}\,dx \quad (1) \quad = \int_0^{\mathrm{arsh}\,6} \mathrm{ch}\,t\cdot\frac{1}{6}\,\mathrm{ch}\,t\,dt =$$

$6x = \mathrm{sh}\,t$

$dx = \frac{1}{6}\,\mathrm{ch}\,t\,dt$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\mathrm{arsh}\,6}\left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)dt = \frac{1}{24}\cdot\left[\frac{e^{2t}}{2}+2t+\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{\mathrm{arsh}\,6} \quad (3) \quad =$$

$$\left(= \frac{\mathrm{arsh}\,6}{12} + \frac{1}{24}\underbrace{\mathrm{sh}(2\,\mathrm{arsh}\,6)}_{2\,\underbrace{\mathrm{sh}(\mathrm{arsh}\,6)}_{6}\,\underbrace{\mathrm{ch}(\mathrm{arsh}\,6)}_{\sqrt{1+6^2}=\sqrt{37}}} = \frac{\mathrm{arsh}\,6}{12} + \frac{\sqrt{37}}{2} \right)$$

4, $\boxed{12}$

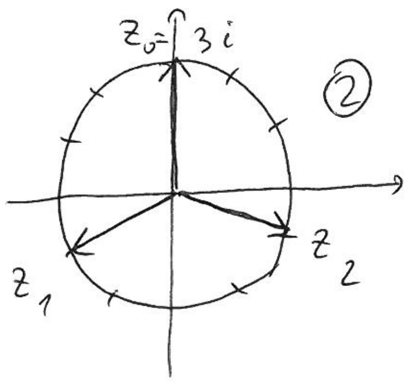
$z^3 = -27i = 27 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$ (2)

$z_k = \sqrt[3]{27} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \cdot k\right)}$ (3) ; $k = 0, 1, 2$

$z_0 = 3\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{3i}}$ (1)

$z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{7\pi}{6}} = \underline{\underline{-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}}$ (2)

$z_2 = 3 \cdot e^{i\frac{11\pi}{6}} = \underline{\underline{+\frac{\sqrt{3}\cdot 3}{2} - \frac{3}{2}i}}$ (2)



5, Mint α, $\boxed{10}$

6, a, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, ha x_0 a D_f torlódási pontja, és

$\boxed{4}$ $\forall P > 0$ esetén $\exists\, \delta(P) > 0$, hogy $f(x) < -P$, ha $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, $x \in D_f$.

$\boxed{12}$ b, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ halmazon f folytonos, mert itt a nevezők nem nullák, és f folytonos függvényekből van „összerakva" a négy alapművelettel és a függvény kompozícióval. (2)

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} \Big(\underbrace{x}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{1}{3x}}_{\downarrow\, \pm\infty}\Big) \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right)}_{\downarrow\ \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{2}\right) < 0} = \mp\infty$$ (4) $\Longrightarrow$ 0-ban másodfajú szakadás van. (1)

$$\lim_{x \to 2 \pm 0} \Big(\underbrace{x}_{\downarrow\, 2} + \underbrace{\frac{1}{3x}}_{\downarrow\, \frac{1}{6}}\Big) \underbrace{\operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\downarrow\, \pm\infty}\Big)}_{\to\, \pm\frac{\pi}{2}} = \pm\left(2 + \frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{2}$$ (4) $\Longrightarrow$ 2-ben elsőfajú, véges ugrás van. (1)

7, a, mint X.

$\boxed{10}$

$\boxed{12}$ b, $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$; $f'(x)=\dfrac{3x^2(x+1)-x^3\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}=$ 4

$x\neq -1$

$=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\cdot(2x+3)$

x	$x<-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\nearrow$
		lok. min.				vízszintes inf. pont.	

$\left.\begin{array}{l} x^2\geq 0 \\ (x+1)^2\geq 0 \\ 2x+3>0 \iff x>-\frac{3}{2} \end{array}\right\}$ 4

$\left.\begin{array}{l} -\frac{3}{2}\text{-nél lokális minimum van.} \\ \text{Máshol nincs lokális szélsőérték.} \end{array}\right\}$ 4

IMSC - mint X.