A Számítástudomány alapjai

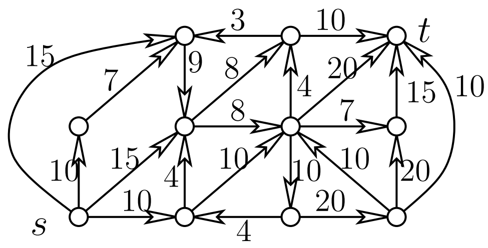
MÁSODIK ZH pótlása 2011. XII. 14. 10^{00}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Íróeszközön és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

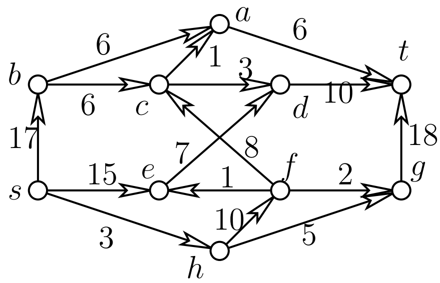
1. Legyen $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{11, 14, 15, 35, 66\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha azok relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Határozzuk meg G-nek egy a „15” csúcsból indított szélességi bejárásához tartozó fáját! A G' gráfot úgy kaptuk, hogy G-hez hozzávettünk egy új v csúcsot, amit G bizonyos csúcsaival összekötöttünk. Tudjuk, hogy G'-ben a 15 és v csúcsok távolsága 4. Határozzuk meg G'-t!

2. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható hálózatban a maximális st-folyam nagyságát.



3. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{(i+j)}{(i-j)} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.

4. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.



5. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a $\overline{G}$ komplementergráf nem síkbarajzolható.

6. Határozzuk meg, hogy a 3^{33} szám kettes számrendszerben felírt alakjának mi az utolsó hat jegye!

Jó munkát!

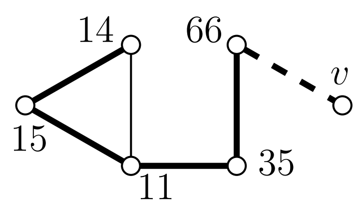
A Számítástudomány alapjai

2. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

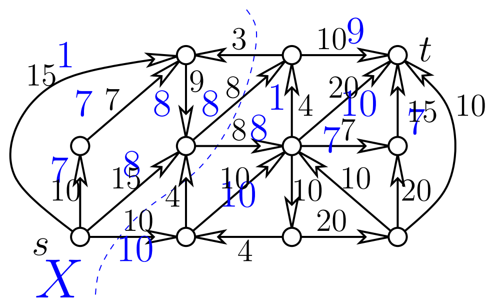
1. Legyen $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{11, 14, 15, 35, 66\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha azok relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Határozzuk meg G-nek egy a „15” csúcsból indított szélességi bejárásához tartozó fáját! A G' gráfot úgy kaptuk, hogy G-hez hozzávettünk egy új v csúcsot, amit G bizonyos csúcsaival összekötöttünk. Tudjuk, hogy G'-ben a 15 és v csúcsok távolsága 4. Határozzuk meg G'-t!

   Az ábrán a G egy diagramja látható. (3 pont)
   A „15” csúcsból indított szélességi bejárás a csúcsokat $15, 14, 11, 35, 66$ sorrendben éri el, és a kapott szélességi fát a vastagon rajzolt élek jelzik. (3 pont)
   Ha a v csúcs távolsága a „15” csúcstól 4, az azt jelenti, hogy v-nek van egy a „15” csúcstól 3 távolságra levő szomszédja, és nincs olyan szomszédja, ami legfeljebb 2 távolságra van a „15” csúcstól. (2 pont)
   Mivel G-ben a „15” csúcstól legtávolabb a „65” csúcs található, és ennek 3 a távolsága, a v csúcs csakis ezzel a csúccsal van összekötve G'-ben. (2 pont)



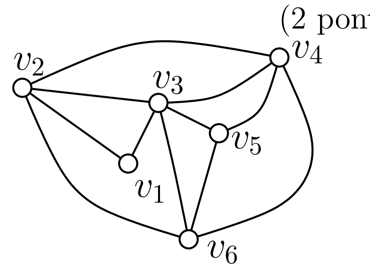
2. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható hálózatban a maximális st-folyam nagyságát.

   Az órán tanult növelő utas algoritmussal kaptuk az ábrán látható folyamot; a nagyobb, kék számok jelzik az egyes éleken a folyam értékét, ahol nincs szám, ott 0 a folyam értéke, azaz nem folyik folyam. (5 pont)
   Ennek a folyamnak a nagysága 26. (2 pont)
   Mivel a szaggatott vonallal jelzett X halmaz által indukált st-vágás 26-os kapacitása felső korlát bármely folyam nagyságára, ezért valóban 26 a keresett folyamnagyság. (3 pont)



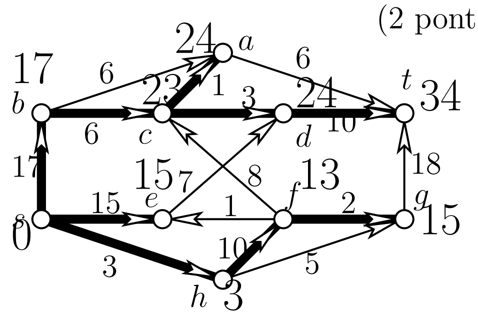
3. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_iv_j : \frac{(i+j)}{(i-j)} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.

   A mellékelt ábrán látható a kérdésben szereplő gráf egy diagramja. (3 pont)
   Mivel G-ben sem izolált pont, sem hurokél nincs, ezért Gallai tételei miatt $\nu(G) + \rho(G) = \alpha(G) + \tau(G) = 6$. (1 pont)
   Mivel v_1v_2, v_3v_5 és v_4v_6 teljes párosítást alkot, ezért $\nu(G) = 3$ (2 pont)
   és (Gallai miatt) $\rho(G) = 3$. (1 pont)
   Másrészt a v_1, v_2 ill a v_3, v_4, v_5, v_6 pontok klikket alkotnak, így egy független ponthalmaz közülük legfeljebb egyet-egyet tartalmazhat. Ezek szerint $\alpha(G) \leq 2$. (1 pont)
   Mivel $\{v_1, v_5\}$ független ponthalmaz, ezért $\alpha(G) = 2$, (1 pont)
   így Gallai miatt $\tau(G) = 4$. (1 pont)



4. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.

Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét, pl. $s, h, f, g, e, b, c, d, a, t$-t. (2 pont)



Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)

Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 34$, (1 pont) és mivel egyetlen kritikus út vezet s-ből t-be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, b, c, d, t. (2 pont)

5. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a $\overline{G}$ komplementergráf nem síkbarajzolható.

   Tanították, hogy egy n csúcsú, egyszerű, sr gráfnak $n > 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (3 pont)
   Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G-nek legfeljebb $3 \cdot 11 - 6 = 27$ éle lehet. (3 pont)
   Ezért aztán $\overline{G}$ élszáma legalább $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ lesz, (3 pont)
   tehát az elsőnek idézett ok miatt $\overline{G}$ nem síkbarajzolható. (1 pont)

6. Határozzuk meg, hogy a 3^{33} szám kettes számrendszerben felírt alakjának mi az utolsó hat jegye!

   Azt kell megállapítanunk, hogy 3^{33} milyen maradékot ad 2^6-tal osztva, és hogy ezt a maradékot kell felírnunk kettes számrendszerben. (3 pont)
   Mivel $(3, 2^6) = 1$, (1 pont)
   és $\varphi(2^6) = (2-1) \cdot 2^5 = 32$, (1 pont)
   ezért alkalmazhatjuk az Euler-Fermat tételt, ami szerint $3^{\varphi(2^6)} = 2^{32} \equiv 1(2^6)$ (2 pont)
   Innen $3^{33} = 3^{32} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 = 3(2^6)$ (2 pont)
   tehát 3^{33} utolsó hat jegye 2-es számrendszerben $\ldots 000011$. (1 pont)