

# Fizika űrmérnököknek

## **Koordinátarendszerek alkalmazása**

Beneda Károly adjunktus

# Tartalom

- Példák koordinátarendszerek használatára
- Koordináta-transzformációk

# Példák koordinátarendszerek használatára

- Egy koordinátarendszert egyértelműen meghatároz:
  - Az origó helyzete
  - A fősík iránya
  - A főtengely iránya a fősíkon
- Origó:
  - Topocentrikus – a megfigyelő rögzített helyzete egy bolygó felszínén
  - Égitest centrikus: az adott égitest tömegközéppontja
  - Barycentrikus: Egy adott égitestcsoport (pl. Föld-Hold) közös tömegközéppontja

# Példák koordinátarendszerek használatára

- Fő sík iránya:
  - A fő sík áthalad az origón
  - A síkot a pozitív normálvektora határozza meg
  - A normálvektor legtöbbször:
    - Égitest saját tengelye körüli forgásának szögsebesség vektora
    - Az égitest keringésének perület/szögsebesség vektora ( $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$ )
    - Több égitest együttes keringésének perület vektora
- Főtengely iránya:
  - Fő síkban fekvő irányított egyenes
  - Általában az x tengely
  - Irányát valami kitüntetett irány adja (távoli csillag, földrajzi nevezetesség, égtáj, stb.)

# Föld Közepontú Inercia – ECI (Earth Centered Inertial, Geocentric Inertial – GCI)

- Origója a föld középpontjához rögzített
- Z tengelye a föld forgástengelyével párhuzamos és iránya az északi földrajzi pólus irányába mutat.
- Fő síkja a z tengelyre merőleges vektorok által kifeszített sík, az egyenlítői sík.
- A fő sík kb.  $23,4^\circ$ -os szöget zár be az ekliptikával
- x tengely irányát a föld nap körüli keringési síkjának és az egyenlítői síknak a metszésvonala határozza meg úgy, hogy
- az x tengely a tavaszpontba, azaz a föld nap körüli keringési pályájának felszálló csomójába mutat.

# Föld Középpontú Inercia – ECI (GCI)

- Ezért a koordináta rendszer nem forgó rendszer
- De nem igazi inercia rendszer
- A koordináta rendszer orientációja a térben nem állandó
- a föld forgástengelyének precessziója és nutációja miatt periódikusan változik a tavaszpont helyzete.
- Ezt EPOCHÁ használataival küszöbölik ki, pl:
  - J2000: 2000 január 1. 12:00-ra meghatározott tavaszpont helyzetét tekinti referenciának
  - GCRF: Geocentric Celestial Reference Frame, ami az ICRF (International Celestial Reference Frame) rendszer megfelelője, kvazárokhoz viszonyítják a pozíciót úgy, hogy az x tengely közel egybeessen a J2000-es rendszer tavaszpontjával

# Föld Közepontú, Földhöz Rögzített - ECEF

- Földdel együtt forgó koordináta rendszer
- origója a Föld középpontjában van
- z tengelye az északi pólus felé mutat
- x és y tengelyei kifeszítik az egyenlítői síkot
- x tengely a kezdő meridián (greenwichi délkör) felé mutat
- y tengely a jobb sodrású rendszer miatt, pedig kelet felé
- Használata során a vizsgált objektum pozícióját x,y,z koordináták segítségével adják meg
- előnye a földrajzi koordinátákkal szemben, hogy nem szükséges hozzá egy ellipszoid modell használata.

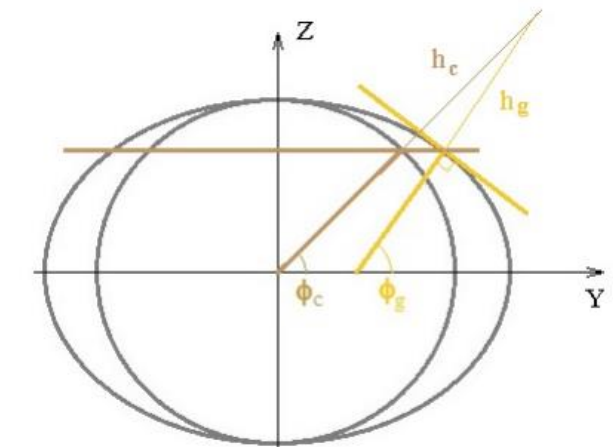
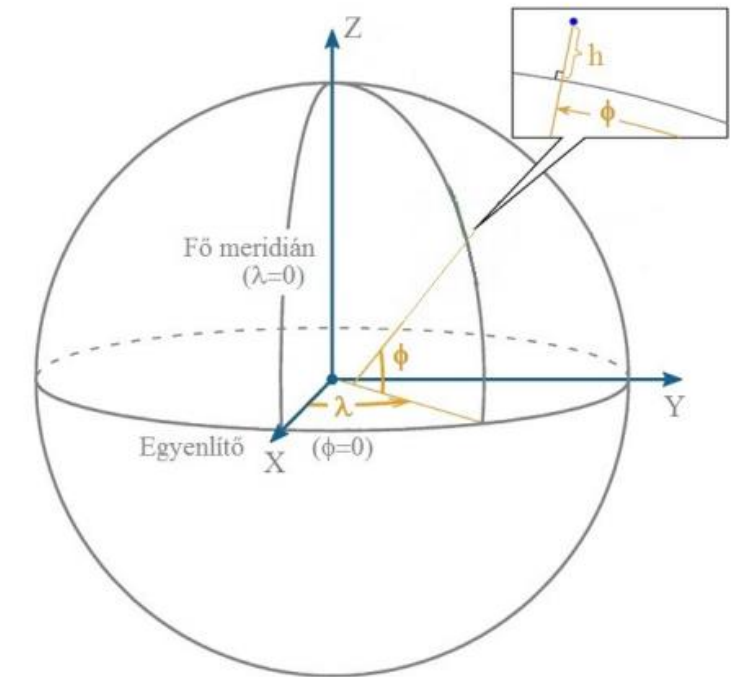
# ECI és ECEF kapcsolata

- A két rendszer orientációja csak a Z tengely körüli szögelfordulásban tér el egymástól
- A Z tengely körüli szögsebességet a sziderális nap hossza határozza meg (Föld esetében átlagosan 23:56:4,0916, de a nutáció miatt változik a tényleges értéke)
- A két rendszer közötti szögeltérés (Earth Rotation Angle – ERA)  
$$\theta(t_u) = 2\pi(0,7790572732640 + 1,00273781191135448 \cdot t_u)$$
- Ahol  $t_u$  a Julián dátum mínusz 2451545.0, ami 2000 január 1. 12:00 megfelelő földi idő.



# Földrajzi koordináta-rendszer

- A gyakorlatban elterjedten használják a szélesség, hosszúság és magasság koordinátákat (pl. GPS koordináták)
- Térképen így könnyebb feltűntetni a pozíciót
- Két különböző rendszer:
  - Geocentrikus: gömb modell
  - Geodetikus: ellipszoid modell
- Geocentrikus: nem veszi figyelembe a föld alakját, űrkutatási, műholdas navigációs célokra alkalmas, a földsugárhoz képest nagy magasságban a hibája elhanyagolható



Forrás: [Bauer P.: Koordinata rendszerek és transzformációk](#)

# Földrajzi koordináta-rendszer

- Geodetikusrendszer: kell hozzá a föld alakját leíró ellipszoid modell, pl.: WGS84 (World Geodetic System 84)

$$P_g = \begin{bmatrix} \lambda \\ \varphi \\ h \end{bmatrix}$$

Ahol:

$\lambda$ : geodetikus hosszúság

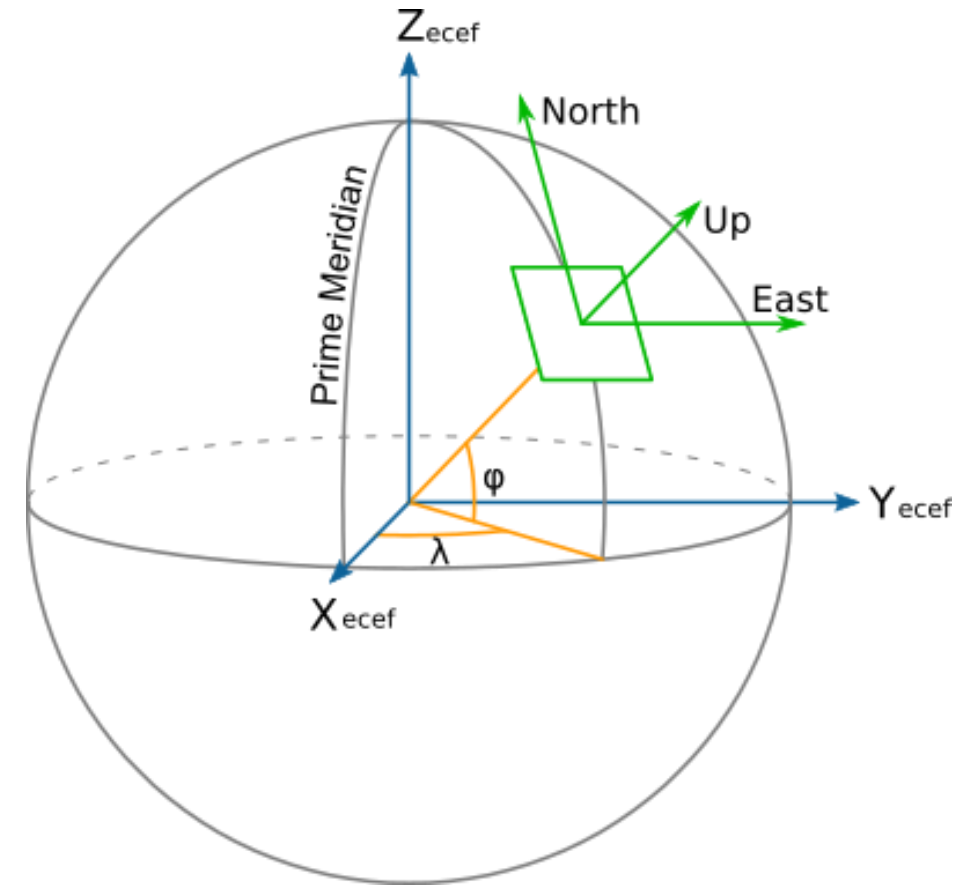
$\varphi$ : geodetikus szélesség

$h$ : geodetikus magasság

Fél nagytengely	$R_A = 6378137 \text{ m}$
Ellipszoid lapultsága	$f = 1/298,257223563$
Fél kistengely	$R_B = R_A \cdot (1 - f) = 6356752,31424518 \text{ m}$
Első numerikus excentricitás	$e = \frac{\sqrt{R_A^2 - R_B^2}}{R_A} = 0,08181919$
Második numerikus excentricitás	$e' = \frac{\sqrt{R_A^2 - R_B^2}}{R_B} = 0,0820944$

# Topocentrikus horizontális koordináta-rendszerek

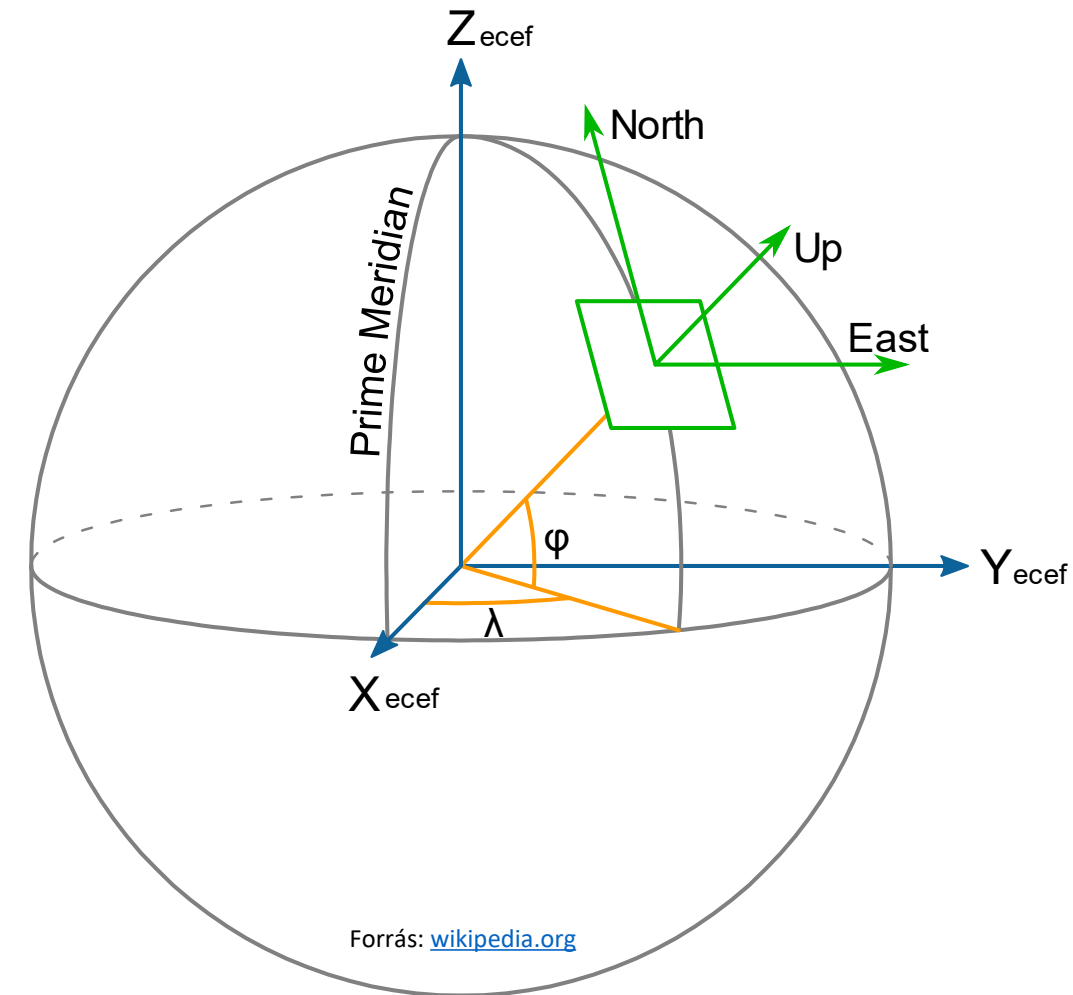
- Olyan koordináta-rendszerek, melyek fősíkja a Föld egy adott pontján (topocentrikus origó) vett felszínének érintője
- Főtengelye valamely égtáj felé mutat
- Általában jobb sodrású rendszer
- A koordináták megadhatók:
  - Derékszögű, vagy
  - Gömbi koordinátákkal (azimut és magasság)
- Pl: NED, ENU, stb.



Forrás: <https://proj.org/operations/conversions/topocentric.html>

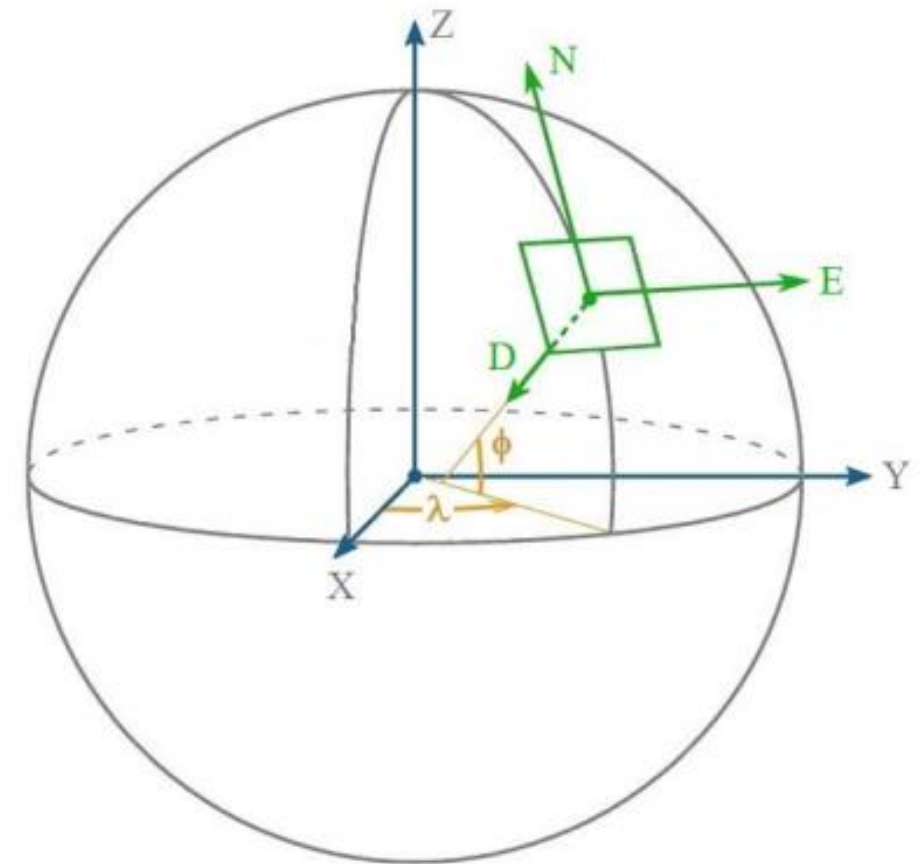
# ENU – East North Up koordináta-rendszer

- Topocentrikus, jobbsodrású rendszer
- Origója a megfigyelő
- X tengelye kelet felé
- Y tengelye észak felé
- Z tengelye felfelé mutat
- földi és légi navigációs célokra alkalmazzák



# NED – North East Down koordináta-rendszer

- Topocentrikus, jobbsodrású rendszer
- Origója a megfigyelő
- X tengelye észak felé
- Y tengelye kelet felé
- Z tengelye lefelé mutat
- földi és légi navigációs célokra alkalmazzák
  
- Egyéb orientációkat is elterjedten alkalmaznak, pl. csillagászati megfigyelésre a dél-kelet-fel rendszert



Forrás: [Bauer P.: Koordinata rendszerek és transzformációk](#)

# Test koordináta-rendszer

- Járműhöz, űreszközhöz rögzített koordináta rendszer
- Origója a szerkezeten definiált pont,
- De gyakran alkalmazzák a súlypontot is origónak
- X tengely előre mutat a jármű szimmetria síkjában (hossztengely)
- Z tengely a szerkezeten meghatározott irányba mutat (pl. alapsíkra merőlegesen,
- Y tengely a jobbsodrású rendszereknek megfelelő irányba mutat
- A jármű mozgásegyenletét ebben a rendszerben célszerű felírni

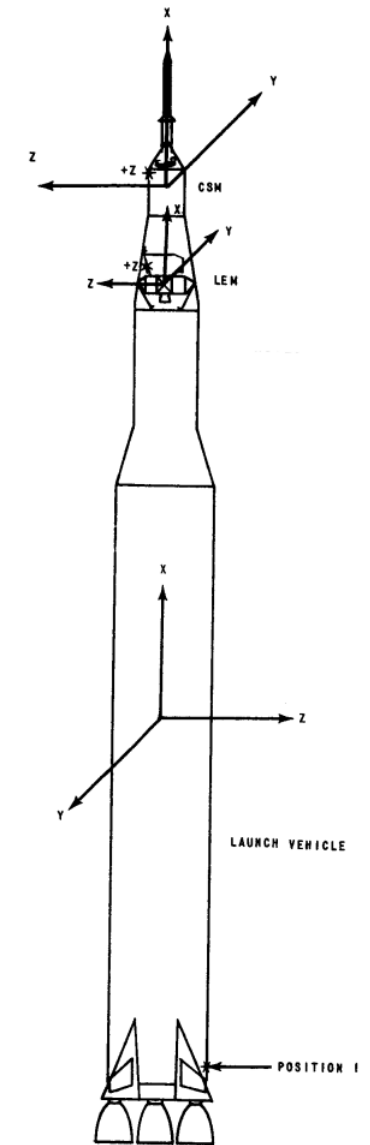
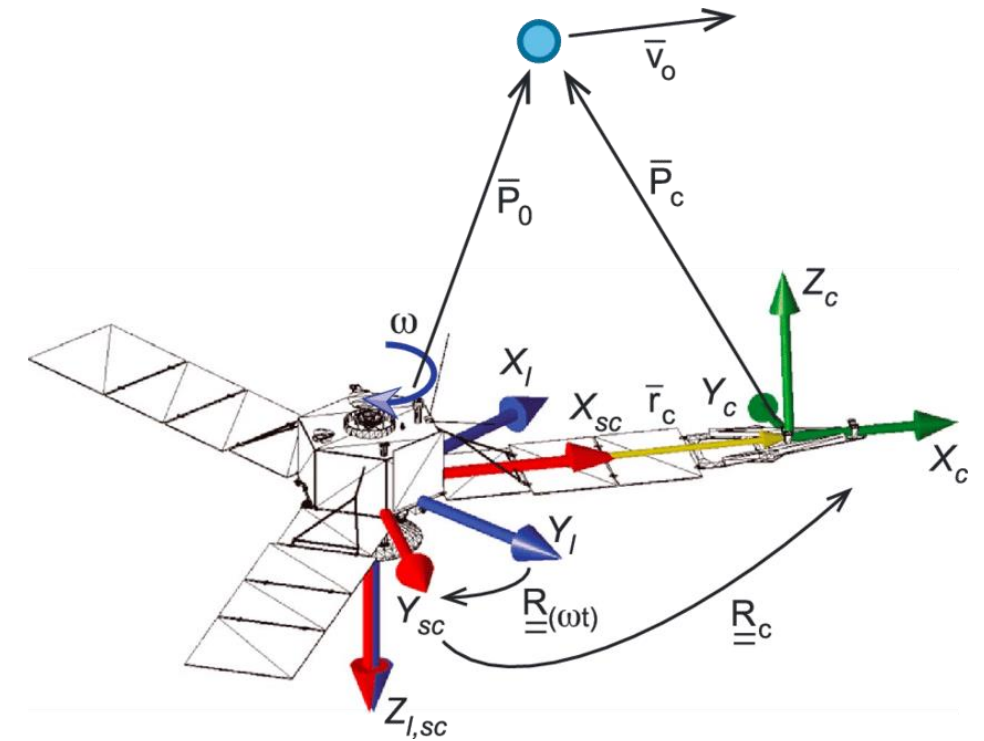


FIGURE B-2

# Egyéb TEST koordináta-rendszerek

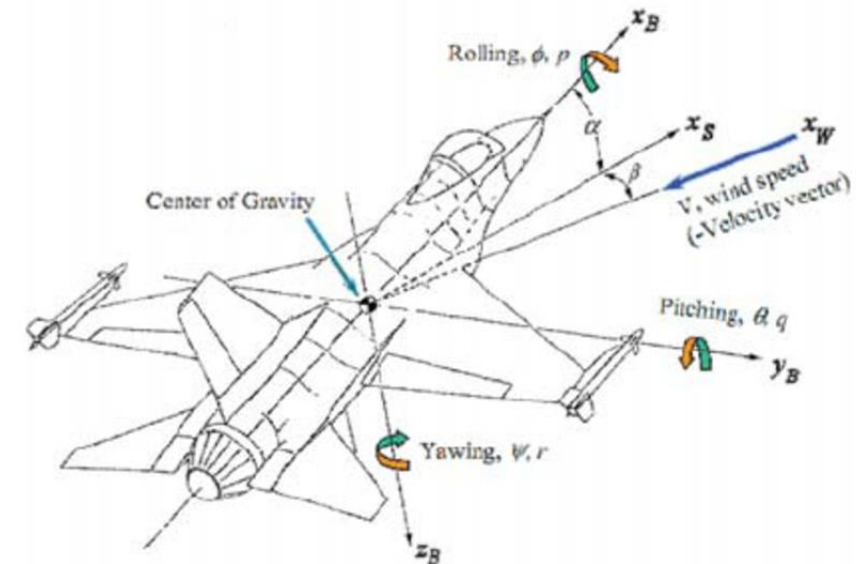
- A jármű különböző részegységeinek pozíciójának és orientációjának leírására szolgáló koordináta rendszerek
- Pl. napelem panelek, kamerák, szenzorok, szenzor platformok, stb.



Forrás: [www.researchgate.net](http://www.researchgate.net)

# Szél koordináta-rendszer

- Origója a súlypont, vagy a szerkezet definiált pontja
- X tengely iránya a járművet érő zavartalan áramlás iránya
- A test koordináta rendszerrel az állászög ( $\alpha$ ) és a csúszási szög ( $\beta$ ) teremti a kapcsolatot.
- A légkörben mozgó testekre ható aerodinamikai erők számításához használatos koordináta rendszer

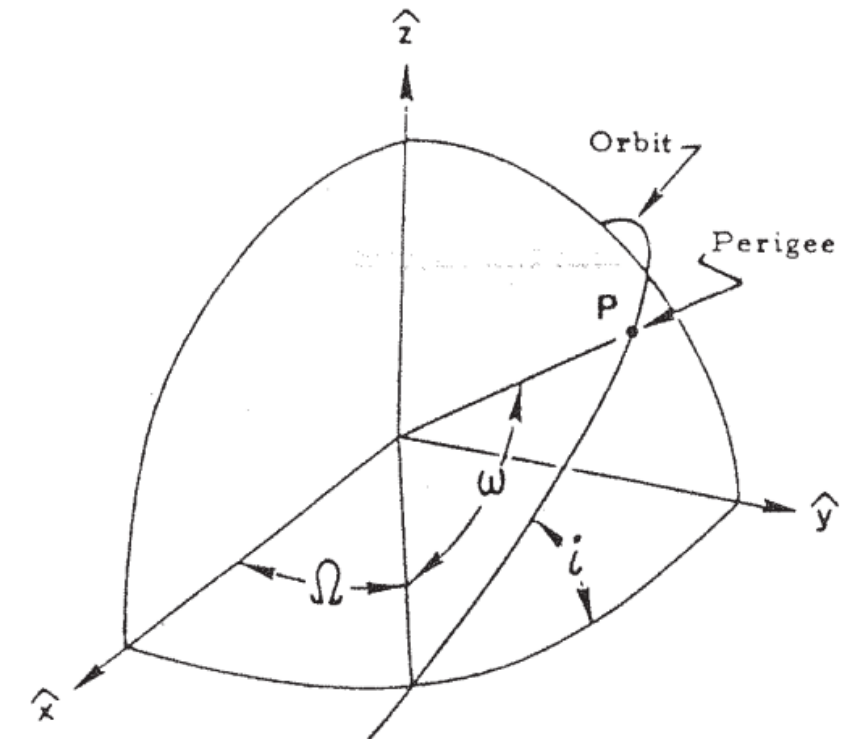


Forrás: [www.researchgate.net](http://www.researchgate.net)



# Pálya koordináta-rendszer

- Fő síkja a keringési pálya síkja
- Origója a keringési pálya azon fókuszja ami körül kering a test
- Főtengelye az excentricitás vektor iránya, ami a periapszisba mutat.
- Az ECI koordináta rendszerrel a kapcsolat:
  - $\Omega$ : felszálló csomó hossza
  - $i$ : inklináció
  - $\omega$ : periapszis hossza



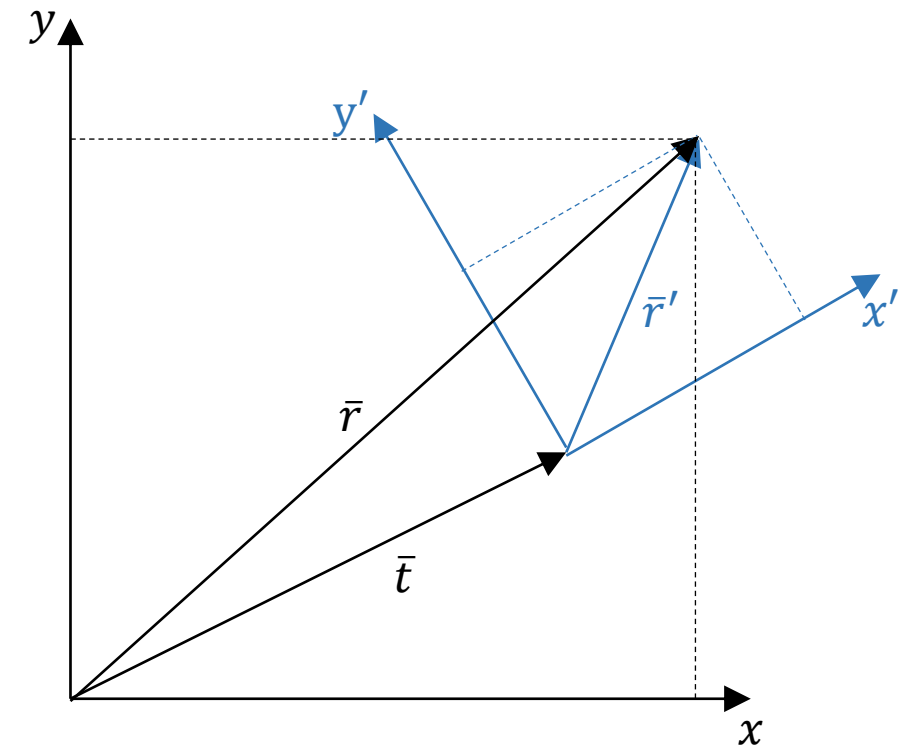
Forrás: [M.Peet: Spacecraft Dynamics](#)

# Koordináta-transzformációk

- Célja egy tárgypont új koordináta-rendszerre vonatkozó koordinátáinak meghatározása
- A transzformáció során a vizsgált tárgy változatlan, csak a nézőpont változik!
- A művelet hasonló, de nem ugyanaz, mint a vektor forgatása!
- A transzformációk lehetnek
  - Eltolás
  - Forgatás (Orientáció)
  - (Skálázás)

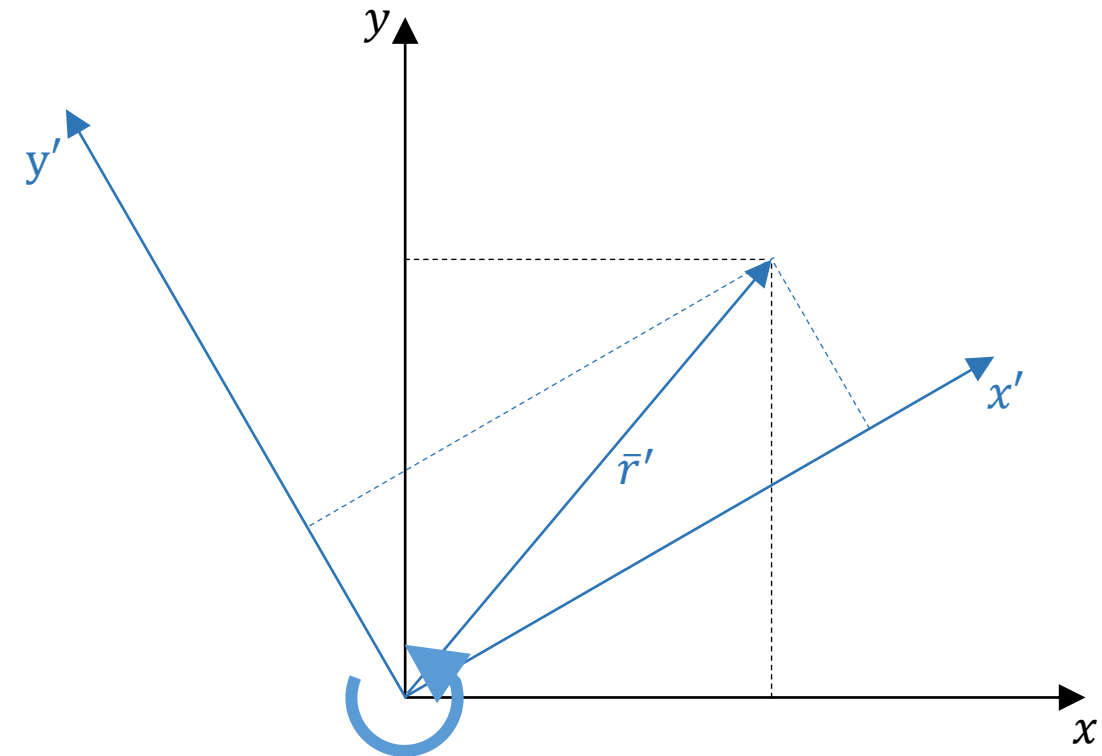
# Koordináta-transzformációk

- $\vec{r} = s \cdot \bar{\bar{R}} \cdot \vec{r}' + \vec{t}$
- Ahol:
  - $\vec{t}$ : eltolás
  - $\bar{\bar{R}}$ : forgatást leíró mátrix
  - $s$ : méretarány  $\left( s = \frac{|i|}{|i'|} = \frac{|j|}{|j'|} = \frac{|k|}{|k'|} \right)$
- A mozgások különböző koordináta-rendszerekben leíró transzformációi esetén a méretarány egységnyi



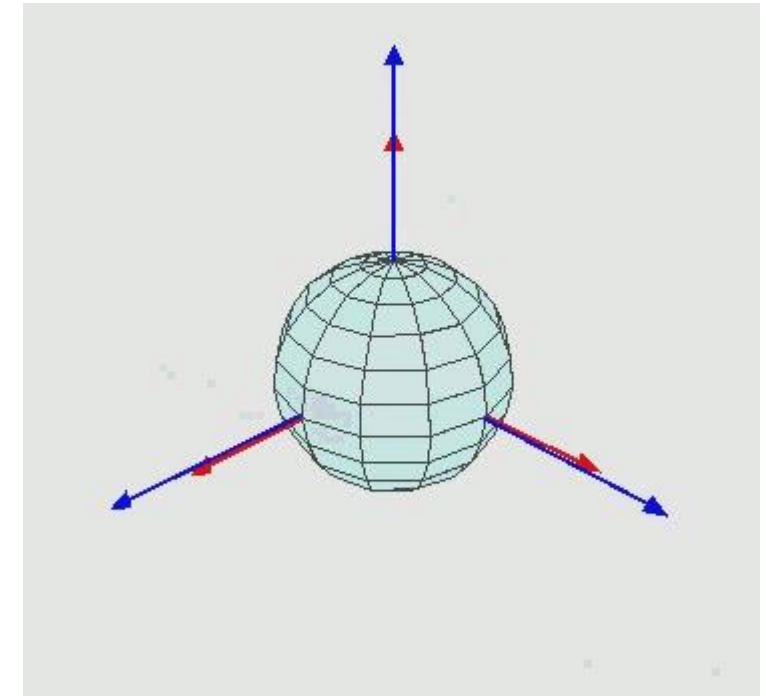
# Koordináta-transzformációk

- Az orientációk leírásával foglalkozunk
- A különböző koordináta rendszerek origóit egybeesőnek tekintjük
- vagy feltételezzük, hogy az eltolási transzformációt már elvégeztük.
- Két koordináta rendszer közötti forgatási transzformációt 1 tengely körüli elforgatással kapjuk.
- Tetszőleges térbeli orientációhoz 3 egymás után következő forgatás szükséges



# Koordináta-transzformációk

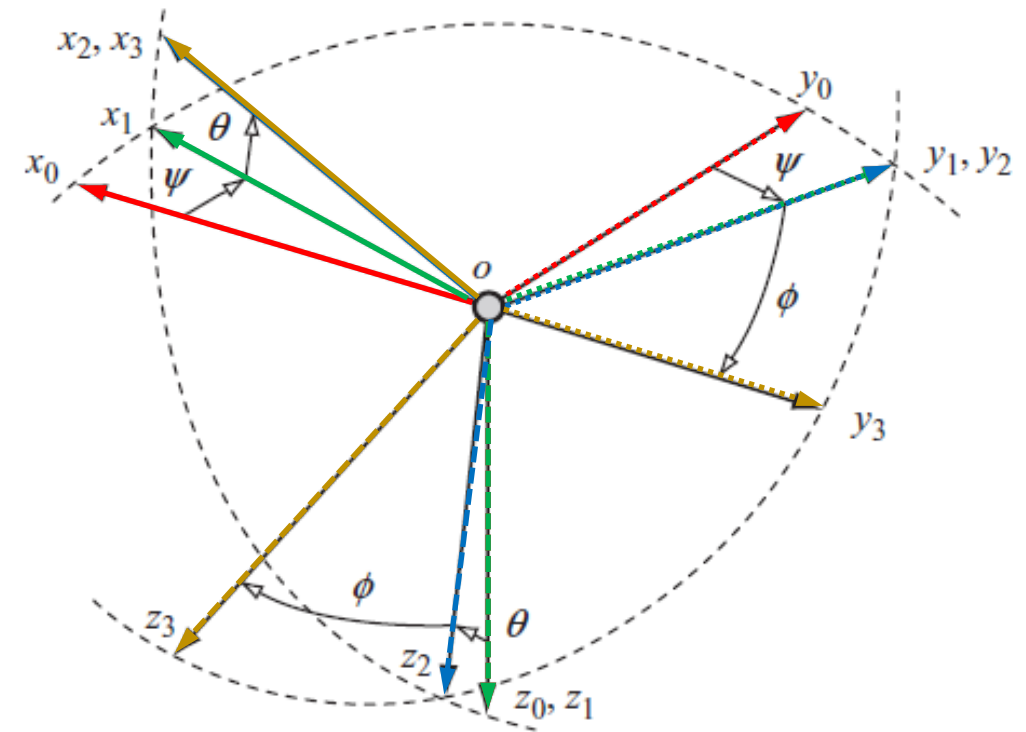
- A teljes forgatás felbontható 3 elemi forgatási mátrix szorzatára
- A térbeli helyzet 3 szöggel írható le
- A forgatások sorrendje tetszőleges
- A szögek és a forgatások sorrendje később már nem változtatható, együtt határozzák meg a forgatást!
- 12 lehetséges forgatás:
  - Euler szögek:  $z-x-z$ ,  $x-y-x$ ,  $y-z-y$ ,  $z-y-z$ ,  $x-z-x$ ,  $y-x-y$
  - Tait-Bryan (Cardan) szögek:  $x-y-z$ ,  $y-z-x$ ,  $z-x-y$ ,  $x-z-y$ ,  $z-y-x$ ,  $y-x-z$



Forrás: [wikipedia.org](http://wikipedia.org)

# NED és Test koordináta-rendszer kapcsolata

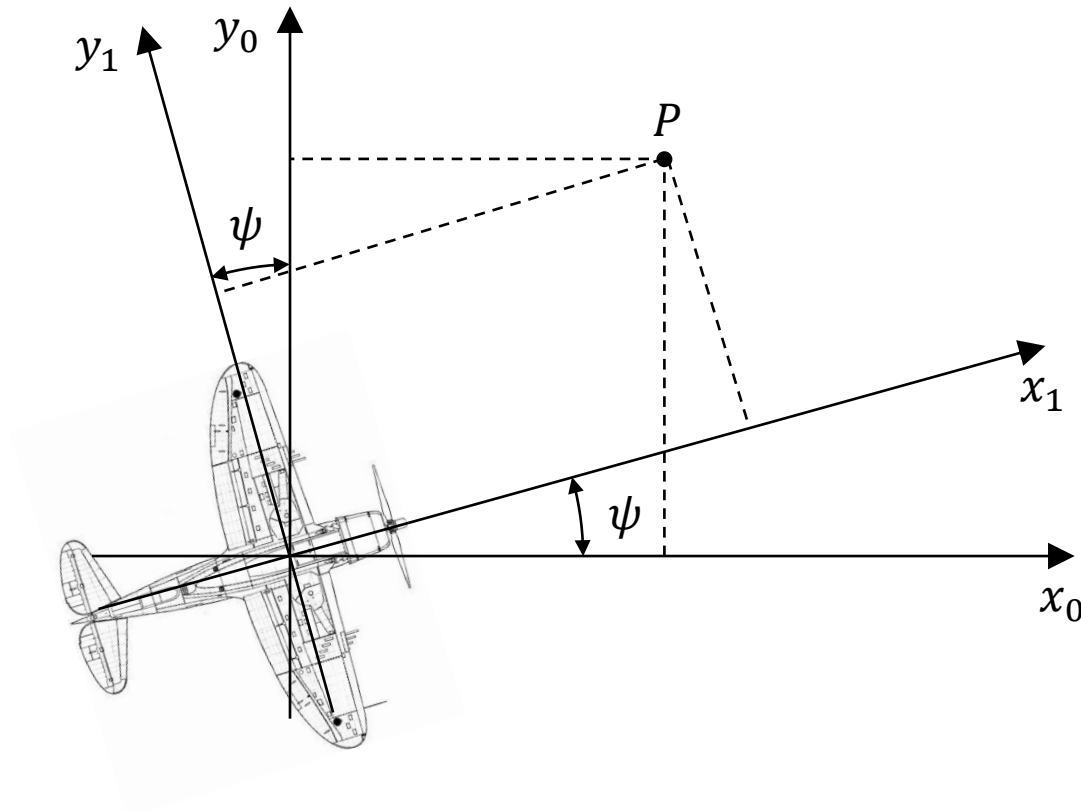
- $O, x_0, y_0, z_0$ : NED
- $O, x_3, y_3, z_3$ : Test
- Euler szögek:
  - $\psi$ : legyezési szög (irányszög) - yaw
  - $\theta$ : bólintási szög - pitch
  - $\phi$ : bedöntési szög - roll



Forrás: Cook: Flight Dynamics Principles, Elsevier, 2007

# NED és Test koordináta-rendszer kapcsolata

- Forgatás Z tengely körül pozitív irányba 0-ból 1-es rendszerbe

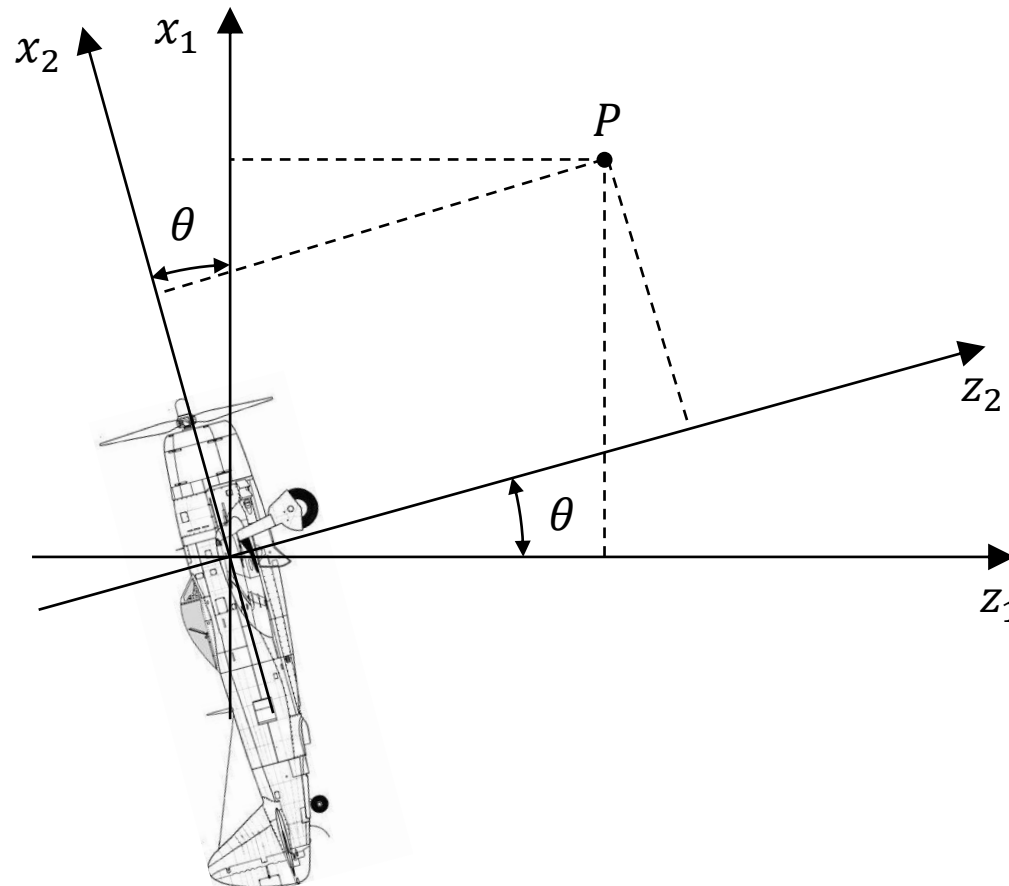


$$\bar{\bar{R}}_Z = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}_Z \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

# NED és Test koordináta-rendszer kapcsolata

- Forgatás Y tengely körül pozitív irányba 1-ből 2-es rendszerbe



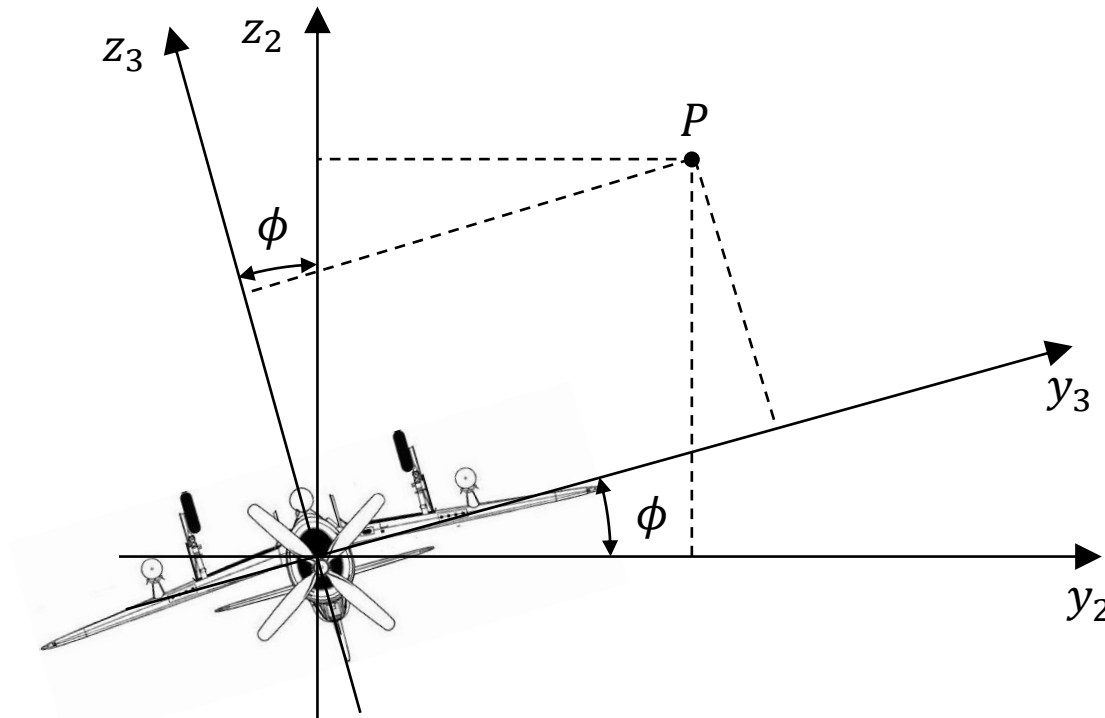
$$\bar{\bar{R}}_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}_y \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$



# NED és Test koordináta-rendszer kapcsolata

- Forgatás X tengely körül pozitív irányba 2-ből 3-as rendszerbe



$$\bar{\bar{R}}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}_x \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

# NED és Test koordináta-rendszer kapcsolata

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}_x \cdot \bar{\bar{R}}_y \cdot \bar{\bar{R}}_z \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}_{30} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{R}}_{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\bar{\bar{R}}_{30} = \bar{\bar{R}}_{B \leftarrow NED} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

# NED és Test koordináta-rendszer kapcsolata

## Transzformáció visszafelé

- A forgatási mátrix **ortogonális**
  - Ezért inverze megegyezik a mátrix transzponáltjával
  - $\bar{\bar{R}}^{-1} = \bar{\bar{R}}^T$
- Inverz forgatási mátrix
  - $\bar{\bar{R}}_i^{-1}(\varphi) = \bar{\bar{R}}_i(-\varphi)$
- A forgatási mátrix **determinánsa mindig eggyel** egyenlő
- Az előző példában alkalmazva:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}_{30}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}_z(-\psi) \cdot \bar{\bar{R}}_y(-\theta) \cdot \bar{\bar{R}}_x(-\phi) = \bar{\bar{R}}_{03} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

# Példa 1.

Írja fel a gravitációs térerősség vektort test koordináta rendszerben! Az űrsikló bedöntési szöge (roll)  $+25^\circ$ , bólintási szöge (pitch)  $-12^\circ$ , irányszöge (yaw)  $176^\circ$ . Az űrsikló orientációja NED rendszerben értelmezett!

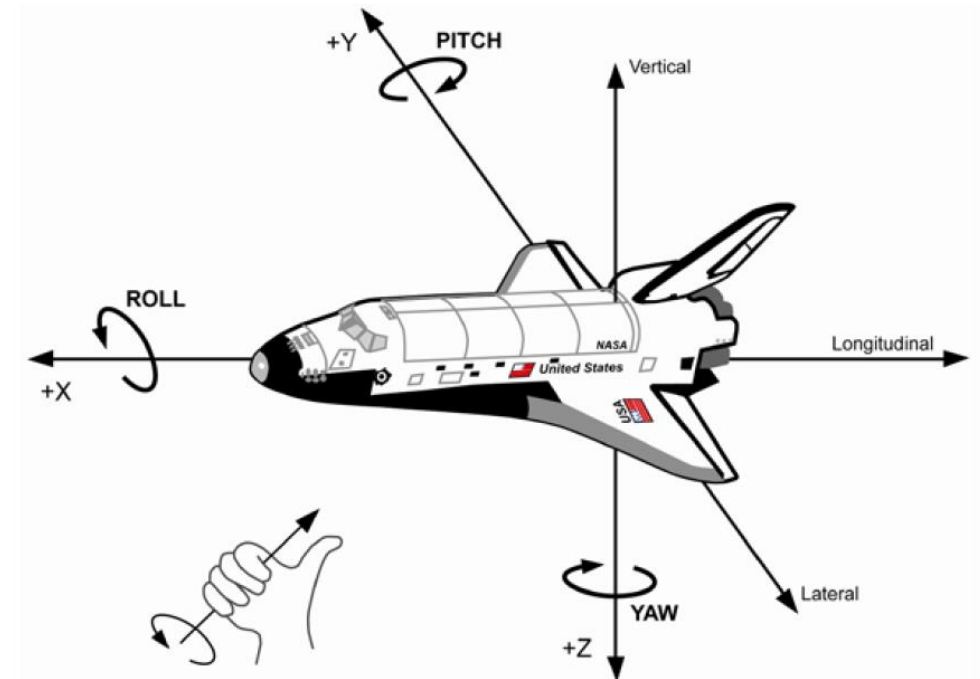
A gravitációs térerősség iránya topocentrikus rendszerben mindig a fősíkra merőlegesen lefelé mutat. NED rendszerben ez a pozitív z tengely iránya:

$$\vec{g}_{NED} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,81 \end{bmatrix}$$

Jelöljük a test koordináta-rendszert B indexszel! A

forgatás:  $\vec{g}_B = \vec{R}_{B \leftarrow NED} \cdot \vec{g}_{NED}$

<https://www.mathworks.com/help/fusion/gs/spatial-representation-coordinate-systems-and-conventions.html>



[https://www.nasa.gov/pdf/519348main\\_AP\\_ST\\_Phys\\_RollManeuver.pdf](https://www.nasa.gov/pdf/519348main_AP_ST_Phys_RollManeuver.pdf)

## Példa 1.

$$\bar{\bar{R}}_{B \leftarrow NED} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi = 25^\circ \\ \theta = -12^\circ \\ \psi = 176^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin \phi = 0,4226 \quad \cos \phi = 0,9063 \\ \sin \theta = -0,2079 \quad \cos \theta = 0,9781 \\ \sin \psi = 0,0698 \quad \cos \psi = -0,9976 \end{array}$$

$$\bar{\bar{R}}_{B \leftarrow NED} = \begin{bmatrix} \cos(-12^\circ) \cos(176^\circ) & \cos(-12^\circ) \sin(176^\circ) & -\sin(-12^\circ) \\ \sin(25^\circ) \sin(-12^\circ) \cos(176^\circ) - \cos(25^\circ) \sin(176^\circ) & \sin(25^\circ) \sin(-12^\circ) \sin(176^\circ) + \cos(25^\circ) \cos(176^\circ) & \sin(25^\circ) \cos(-12^\circ) \\ \cos(25^\circ) \sin(-12^\circ) \cos(176^\circ) + \sin(25^\circ) \sin(176^\circ) & \cos(25^\circ) \sin(-12^\circ) \sin(176^\circ) - \sin(25^\circ) \cos(176^\circ) & \cos(25^\circ) \cos(-12^\circ) \end{bmatrix}$$

## Példa 1.

$$\begin{aligned}\sin \phi &= 0,4226 & \cos \phi &= 0,9063 \\ \sin \theta &= -0,2079 & \cos \theta &= 0,9781 \\ \sin \psi &= 0,0698 & \cos \psi &= -0,9976\end{aligned}$$

$$\bar{\bar{R}}_{B \leftarrow NED} = \begin{bmatrix} 0,9781 \cdot (-0,9976) & 0,9781 \cdot 0,0698 & 0,2079 \\ 0,4226 \cdot (-0,2079) \cdot (-0,9976) & 0,4226 \cdot (-0,2079) \cdot 0,0698 & 0,4226 \cdot 0,9781 \\ -0,9063 \cdot 0,0698 & +0,9063 \cdot (-0,9976) & \\ 0,9063 \cdot (-0,2079) \cdot (-0,9976) & 0,9063 \cdot (-0,2079) \cdot 0,0698 & 0,9063 \cdot 0,9781 \\ +0,4226 \cdot 0,0698 & -0,4226 \cdot (-0,9976) & \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{R}}_{B \leftarrow NED} = \begin{bmatrix} -0,9758 & 0,0683 & 0,2079 \\ 0,0876 - 0,0633 & -0,00613 - 0,0913 & 0,4133 \\ 0,1880 + 0,0295 & -0,0132 + 0,4216 & 0,8865 \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}_B = \bar{\bar{R}}_{B \leftarrow NED} \cdot \bar{g}_{NED} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0,9758 & 0,0683 & 0,2079 \\ 0,0876 - 0,0633 & -0,00613 - 0,0913 & 0,4133 \\ 0,1880 + 0,0295 & -0,0132 + 0,4216 & 0,8865 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0396 \\ 4,0553 \\ 8,6966 \end{bmatrix}$$

## Példa 2.

Egy műhold pályájának adatai a következők. Inklináció  $i = 33^\circ$ , felszálló csomó hossza  $\Omega = 45^\circ$ , periapszis hosszúsága  $\omega = 20^\circ$ . A műhold pillanatnyi sebessége  $8,5 \text{ km/s}$  a pálya koordináta rendszer  $y$  tengelye mentén. Határozza meg a műhold sebesség vektorát ECI rendszerben!

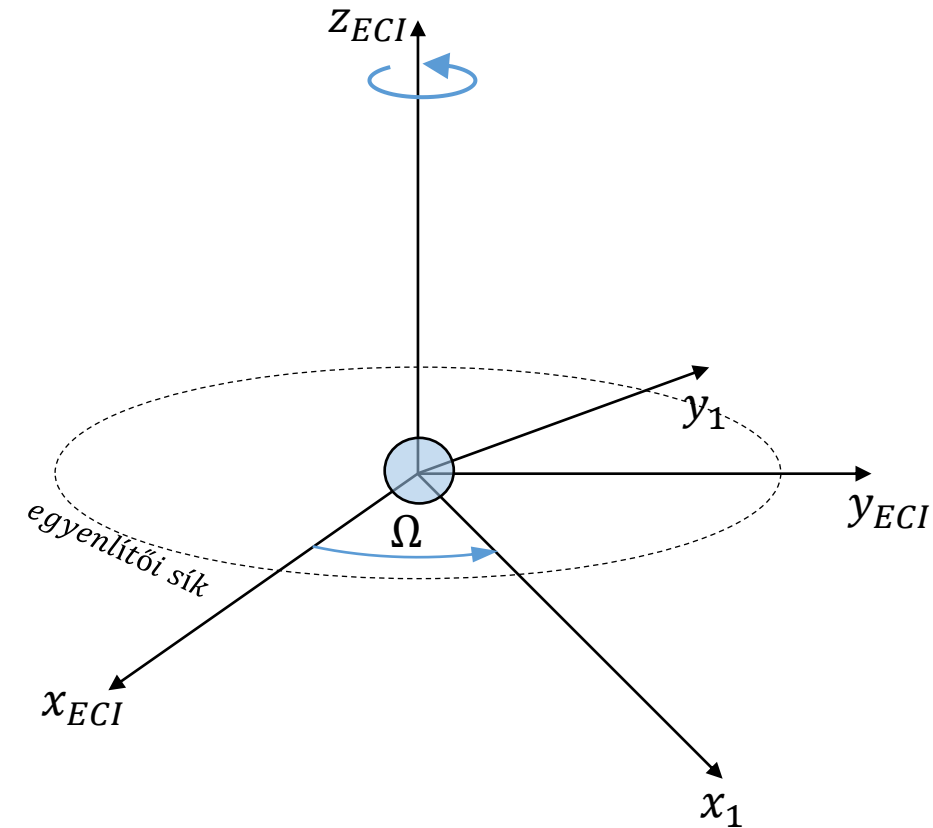


# Példa 2.

Pálya koordináta rendszer és ECI rendszer kapcsolata:

1. forgatás:  $z_{ECI}$  körül felszálló csomó hosszával ( $\Omega$ )

$$\bar{\bar{R}}_Z(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



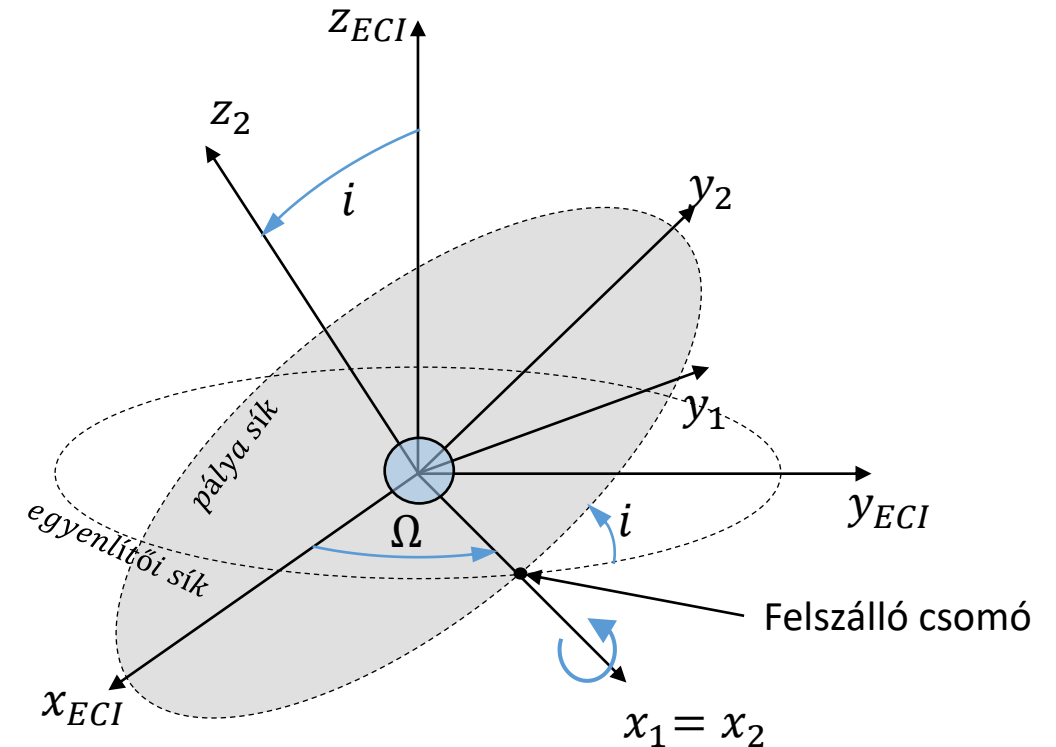


# Példa 2.

Pálya koordináta rendszer és ECI rendszer kapcsolata:

2. forgatás:  $x_1$  körül az inklinációval ( $i$ )

$$\bar{\bar{R}}_x(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}$$



# Példa 2.

Pálya koordináta rendszer és ECI rendszer kapcsolata:

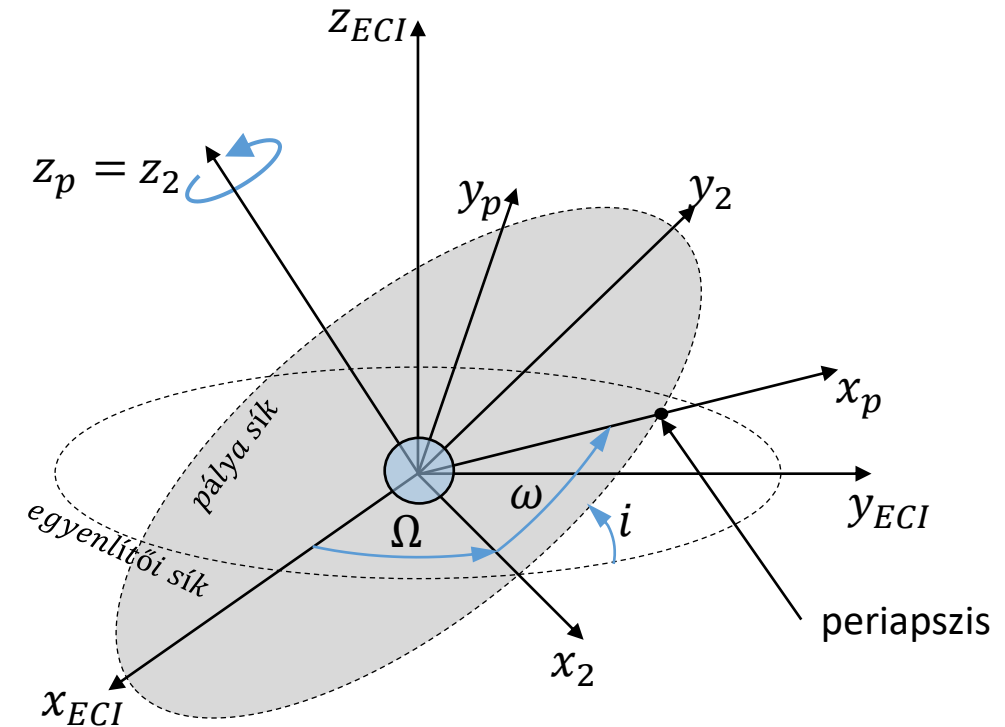
3. forgatás:  $z_2$  körül a periapszis hosszúsággal ( $\omega$ )

$$\bar{\bar{R}}_Z(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A teljes forgatás mátrixa (z-x-z):

$$\bar{\bar{R}}_{p \leftarrow ECI} = \bar{\bar{R}}_Z(\omega) \cdot \bar{\bar{R}}_x(i) \cdot \bar{\bar{R}}_Z(\Omega)$$

$$\bar{\bar{R}}_{p \leftarrow ECI} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



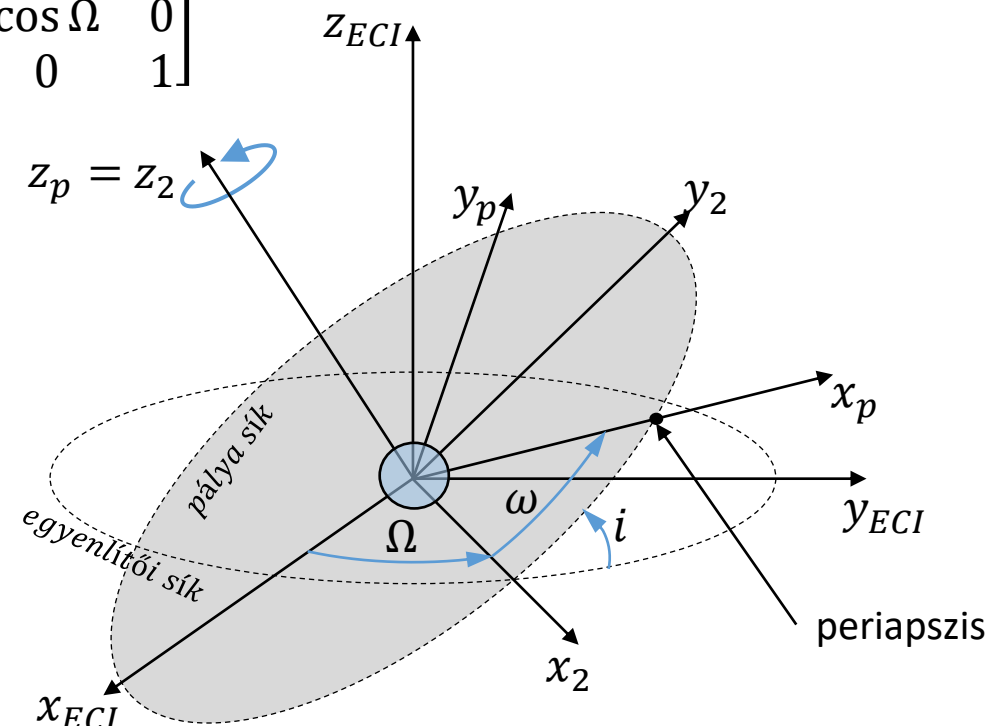
## Példa 2.

$$\bar{\bar{R}}_{p \leftarrow ECI} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel most pálya koordináta rendszerből transzformálunk ECI rendszerbe, ezért a forgatási mátrixot invertálni kell

$$\bar{\bar{R}}_{ECI \leftarrow p} = \bar{\bar{R}}_Z(-\Omega) \cdot \bar{\bar{R}}_x(-i) \cdot \bar{\bar{R}}_Z(-\omega)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}_{p \leftarrow ECI} &= \\ &\begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \cos i \sin \Omega \sin \omega & -\cos \Omega \sin \omega - \cos i \cos \omega \sin \Omega & \sin \Omega \sin i \\ \cos \omega \sin \Omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & \cos \Omega \cos i \cos \omega - \sin \Omega \sin \Omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# Példa 2.

A transzformációra alkalmas MATLAB szkript:

```

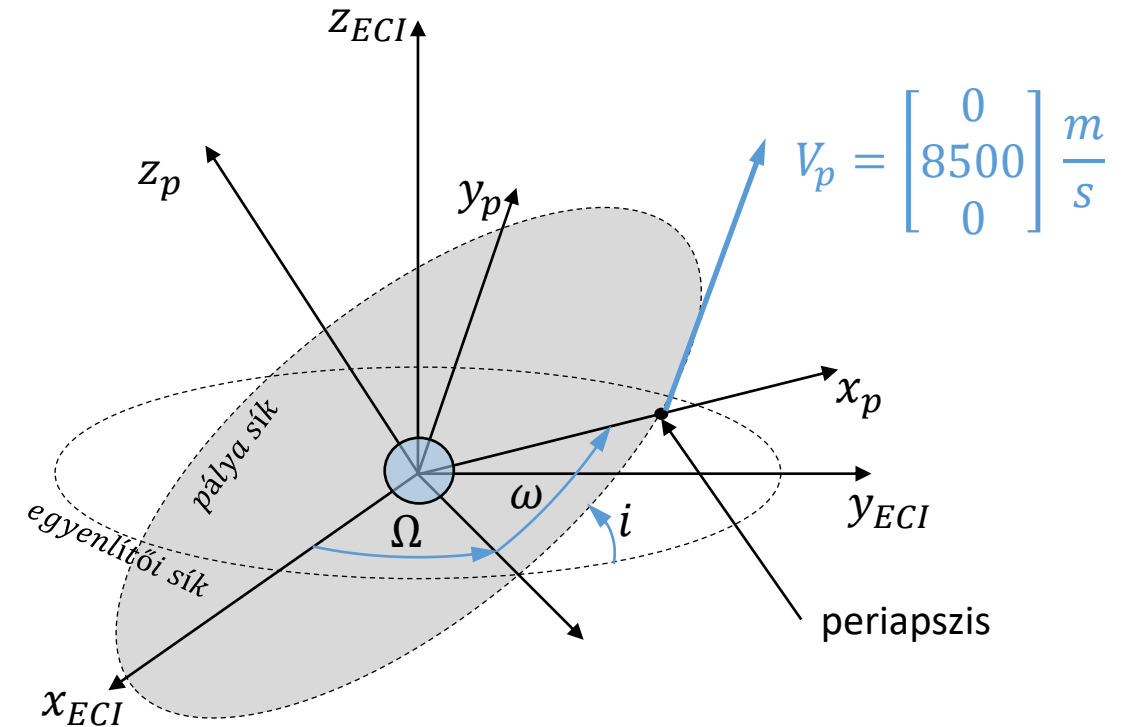
syms coso
syms sino
syms cosi
syms sini
syms cos0
syms sin0
Rzo = [coso sino 0; -sino coso 0; 0 0 1];
Rzo_ = [coso -sino 0; sino coso 0; 0 0 1];
Rxi_ = [1 0 0; 0 cosi sini; 0 -sini cosi];
Rxi_ = [1 0 0; 0 cosi -sini; 0 sini cosi];
Rz0_ = [cos0 sin0 0; -sin0 cos0 0; 0 0 1];
Rz0_ = [cos0 -sin0 0; sin0 cos0 0; 0 0 1];
RpECI = Rzo*Rxi*Rz0;
RECIp = Rz0_*Rxi_*Rzo_;
Ome = 45*pi/180;
ome = 20*pi/180;
i = 33*pi/180;
RECIp_szam=[cos(Ome)*cos(ome)-cos(i)*sin(Ome)*sin(ome), -cos(Ome)*sin(ome)-
cos(i)*cos(ome)*sin(Ome), sin(Ome)*sin(i); cos(ome)*sin(Ome)+cos(Ome)*cos(i)*sin(ome),
cos(Ome)*cos(i)*cos(ome)-sin(Ome)*sin(ome), -cos(Ome)*sin(i); sin(i)*sin(ome),
cos(ome)*sin(i), cos(i)];
vp = [0;8500;0];

```

## Példa 2.

$$\bar{\bar{R}}_{p \leftarrow ECI} = \begin{bmatrix} 0,4616 & -0,7991 & 0,3851 \\ 0,8673 & 0,3154 & -3851 \\ 0,1863 & 0,5118 & 0,8387 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ECI} &= \bar{\bar{R}}_{ECI \leftarrow p} \cdot \bar{V}_p = \begin{bmatrix} 0,4616 & -0,7991 & 0,3851 \\ 0,8673 & 0,3154 & -3851 \\ 0,1863 & 0,5118 & 0,8387 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8500 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -6792,44 \\ 2681,08 \\ 4350,24 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \end{aligned}$$

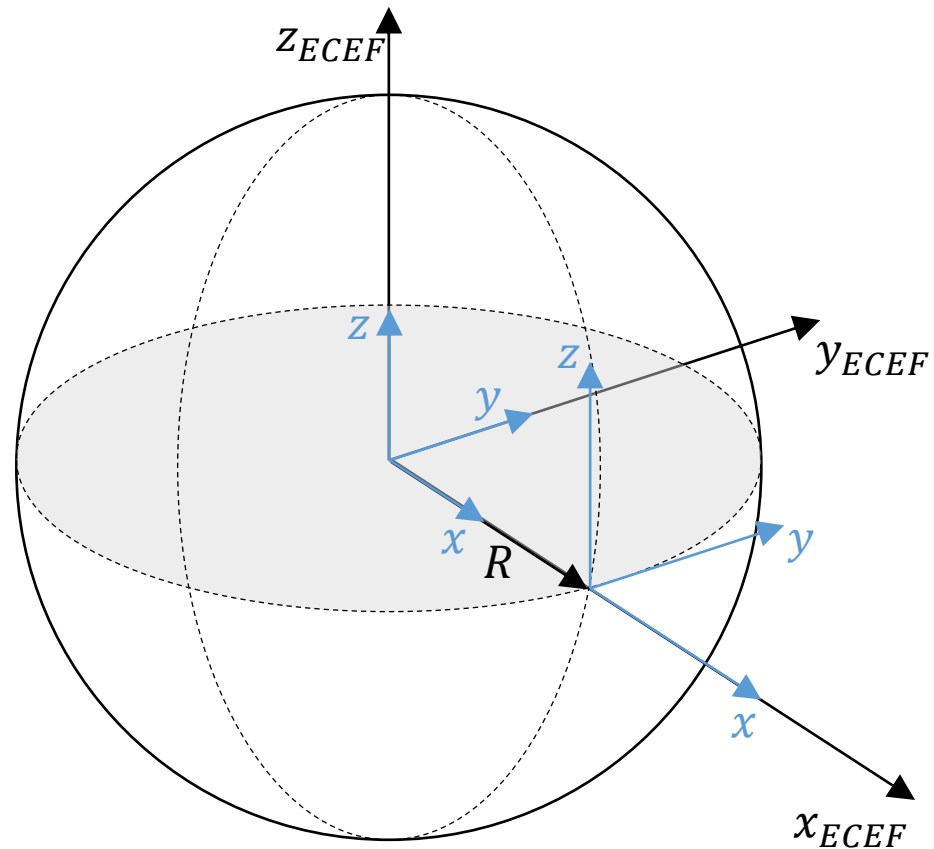


## Példa 3.

Ismert egy műhold pozíciója geocentrikus koordinátákkal ( $N51^\circ E003^\circ$ , 300 km). Ugyancsak ismert a földi megfigyelő állomás pozíciója geocentrikus koordinátákkal ( $N47^\circ E019^\circ$  0 m). Milyen azimut és magassági szögön van a műhold az állomáshoz képest? (a föld sugarát vegye 6371 km-nek)  
Használjon NED rendszert!

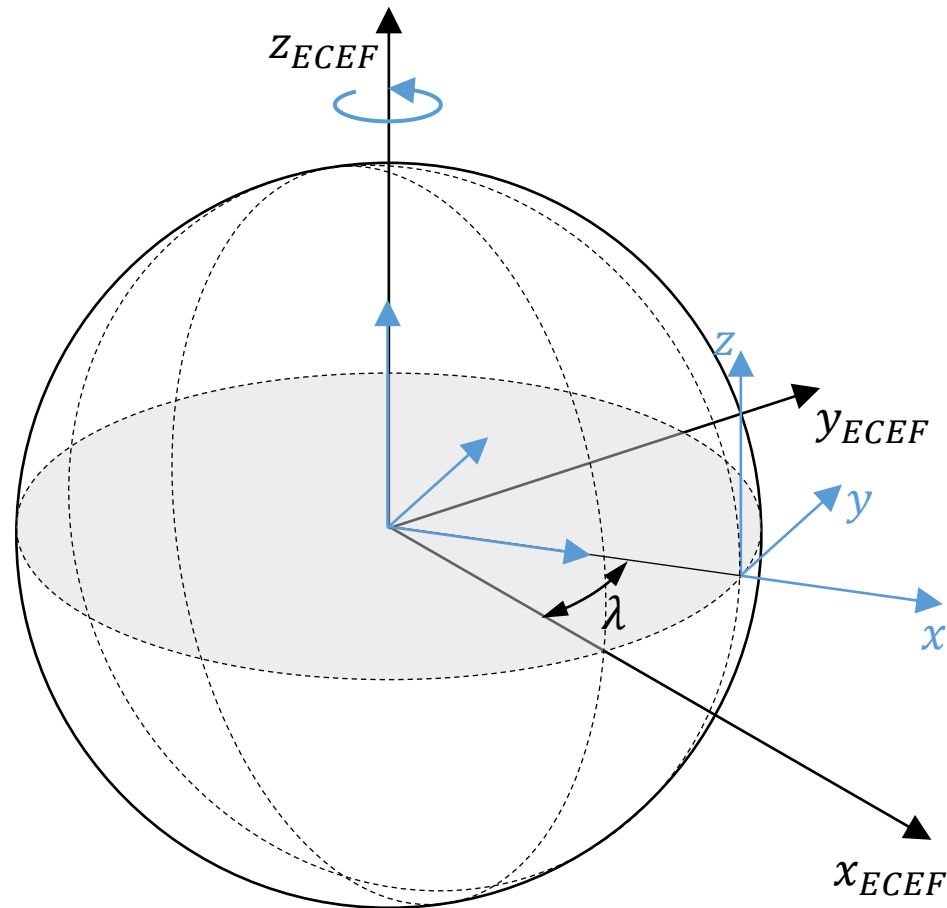
Először teremtsünk kapcsolatot az ECEF rendszer és a NED rendszer között a geocentrikus koordináták felhasználásával!

# Példa 3.



A kiindulásként a föld felszínére helyezett koordináta rendszert toljuk vissza az ECEF rendszer origójába. Az eltolás távolsága a Föld sugara ( $R$ )

## Példa 3.

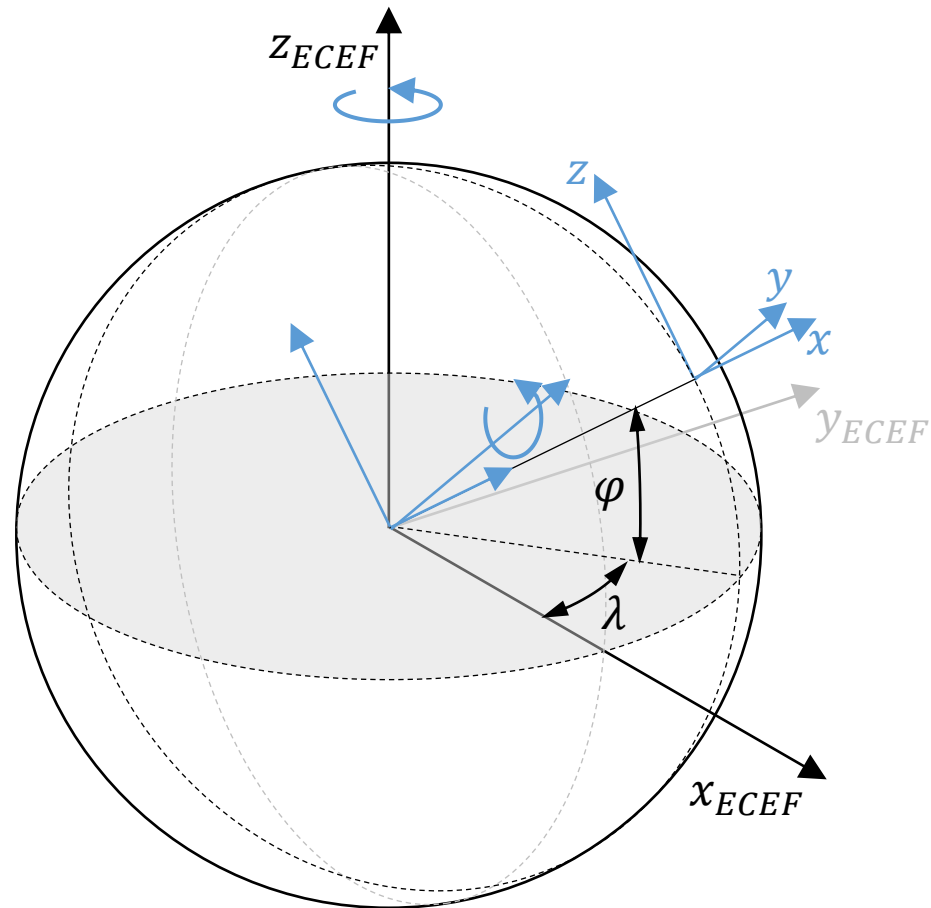


A  $z$  tengely körül végezzünk forgatást pozitív irányba a hosszúsági koordináta értékével ( $\lambda$ )

$$\bar{\bar{R}}_z(\lambda) = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Példa 3.

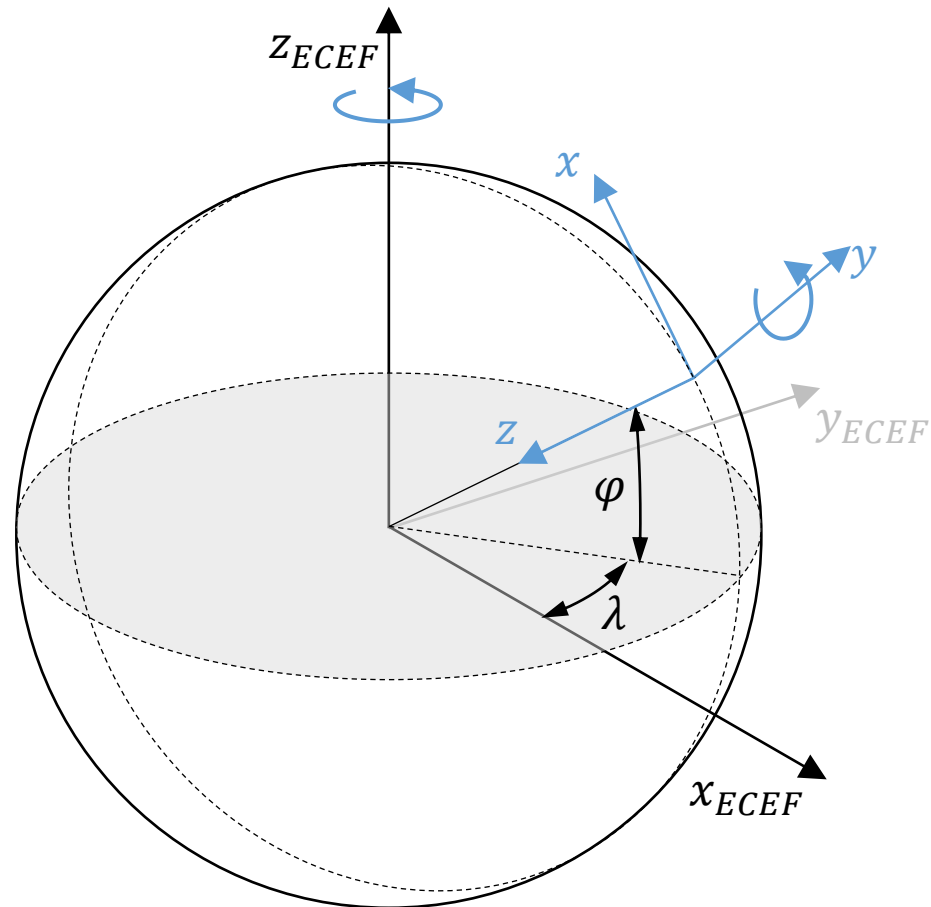


Az  $y$  tengely körül végezzünk forgatást negatív irányba a szélességi koordináta értékével ( $\varphi$ )

$$\bar{\bar{R}}_y(-\varphi) = \begin{bmatrix} \cos -\varphi & 0 & -\sin -\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin -\varphi & 0 & \cos -\varphi \end{bmatrix}$$

Az így kapott koordináta rendszer egy Up-East-North rendszer lett.

## Példa 3.



Végezzünk további  $-90^\circ$ -os forgatást az  $y$  tengely körül hogy a  $z$  tengely az ECEF rendszer origójába mutasson

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}_y\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= \begin{bmatrix} \cos\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -\sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Példa 3.

$$\begin{aligned}\bar{\bar{R}}_{NED \leftarrow ECEF} &= \bar{\bar{R}}_y\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \bar{\bar{R}}_z(\lambda) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\cos \lambda \cdot \sin \varphi & -\sin \lambda \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \cdot \cos \varphi & -\sin \lambda \cdot \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Írjuk fel a megfigyelő és a műhold pozíció vektorát NED rendszerben

$$\vec{r}'_{p_{NED}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ km} \qquad \vec{r}'_{s_{NED}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \end{bmatrix} \text{ km}$$

## Példa 3.

Toljuk el a megfigyelő és a műhold NED koordináta rendszereinek origóit az ECEF rendszer origójába. Az eltolás a gömb sugara menti eltolást jelent, ami NED rendszerben a z tengellyel párhuzamos eltolást jelent.

$$\vec{r}_{p_{NED}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6371 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6371 \end{bmatrix} km$$

$$\vec{r}_{s_{NED}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6371 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6671 \end{bmatrix} km$$

## Példa 3.

A NED-ben felírt pozíció vektorokat transzformáljuk át ECEF rendszerbe!

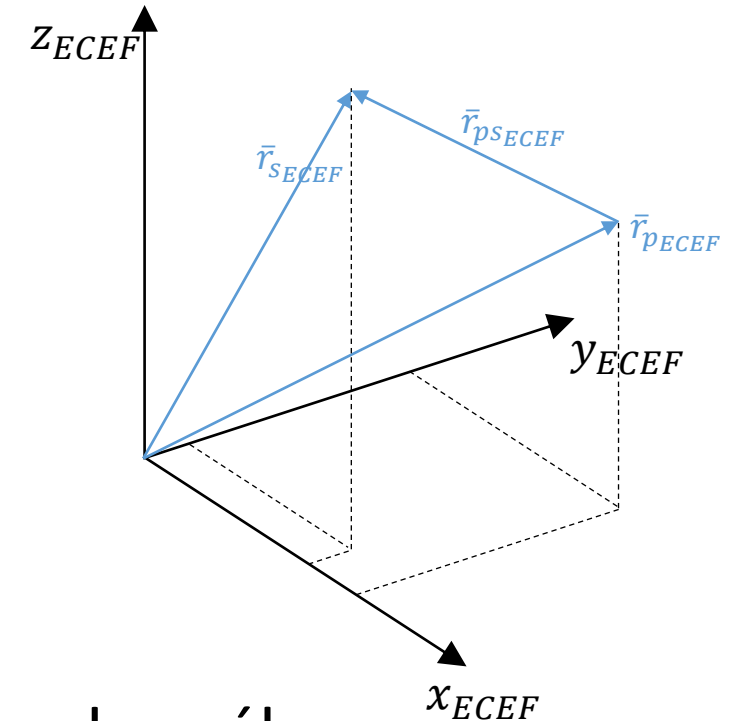
$$\vec{r}_{PECEF} = \bar{\bar{R}}_{NED \leftarrow ECEF}^T \cdot \vec{r}_{PNED} = \begin{bmatrix} -\cos 19^\circ \cdot \sin 47^\circ & -\sin 19^\circ & -\cos 19^\circ \cdot \cos 47^\circ \\ -\sin 19^\circ \cdot \sin 47^\circ & \cos 19^\circ & -\sin 19^\circ \cdot \cos 47^\circ \\ \cos 47^\circ & 0 & -\sin 47^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6371 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4108,3 \\ 1414,6 \\ 4659,5 \end{bmatrix} km$$

$$\vec{r}_{SECEF} = \bar{\bar{R}}_{NED \leftarrow ECEF}^T \cdot \vec{r}_{SNED} = \begin{bmatrix} -\cos 3^\circ \cdot \sin 51^\circ & -\sin 3^\circ & -\cos 3^\circ \cdot \cos 51^\circ \\ -\sin 3^\circ \cdot \sin 51^\circ & \cos 3^\circ & -\sin 3^\circ \cdot \cos 51^\circ \\ \cos 51^\circ & 0 & -\sin 51^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6671 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4192,5 \\ 219,72 \\ 5184,3 \end{bmatrix} km$$

## Példa 3.

Határozzuk meg a műhold relatív helyzetét a megfigyelőhöz képest

$$\vec{r}_{pSECEF} = \vec{r}_{SECEF} - \vec{r}_{PECEF} = \begin{bmatrix} 4192,5 \\ 219,72 \\ 5184,3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4108,3 \\ 1414,6 \\ 4659,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,15 \\ -1194,9 \\ 524,8 \end{bmatrix} \text{ km}$$



Transzformáljuk vissza a megfigyelő koordináta rendszerébe

$$\begin{aligned} \vec{r}_{pSNED} &= \bar{\bar{R}}_{NED \leftarrow ECEF} \cdot \vec{r}_{pSECEF} = \\ &= \begin{bmatrix} -\cos 19^\circ \cdot \sin 47^\circ & -\sin 19^\circ \cdot \sin 47^\circ & \cos 47^\circ \\ -\sin 19^\circ & \cos 19^\circ & 0 \\ -\cos 19^\circ \cdot \cos 47^\circ & -\sin 19^\circ \cdot \cos 47^\circ & -\sin 47^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 84,15 \\ -1194,9 \\ 524,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 584,3 \\ -1157,2 \\ -172,83 \end{bmatrix} \text{ km} \end{aligned}$$

## Példa 3.

Határozzuk meg a műhold relatív helyzetét megadó azimut és magassági szögeket!

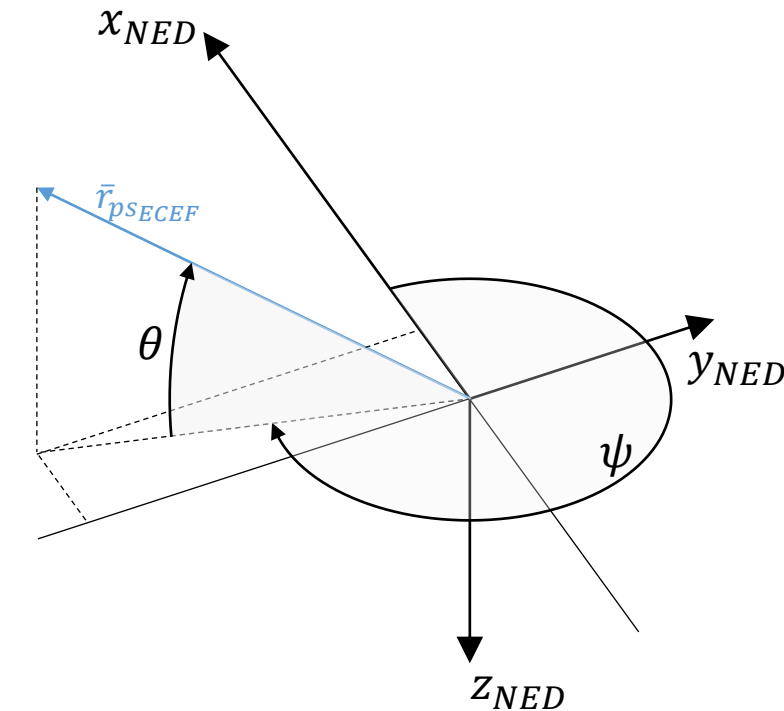
$$\bar{r}_{pSNED} = \begin{bmatrix} 584,3 \\ -1157,2 \\ -172,83 \end{bmatrix} km$$

$$\theta = -\operatorname{atan} \left( \frac{\bar{r}_{pSNEDz}}{\sqrt{(\bar{r}_{pSNEDx})^2 + (\bar{r}_{pSNEDy})^2}} \right) = 7,59^\circ$$

$$\psi = \operatorname{atan} \left( \frac{|\bar{r}_{pSNEDx}|}{|\bar{r}_{pSNEDy}|} \right) = 26,8^\circ$$

4. Síknegyed ( $x > 0$  és  $y < 0$ )

$$\psi = 270 + 26,8 = 296,8^\circ$$



## Példa 4.

Határozzuk meg az előző feladatban szereplő műhold pozícióját ECI koordináta rendszerben, ha a Greenwich-i sziderikus idő 3:25:30, a sziderikus nap hossza pedig 23:56:04.



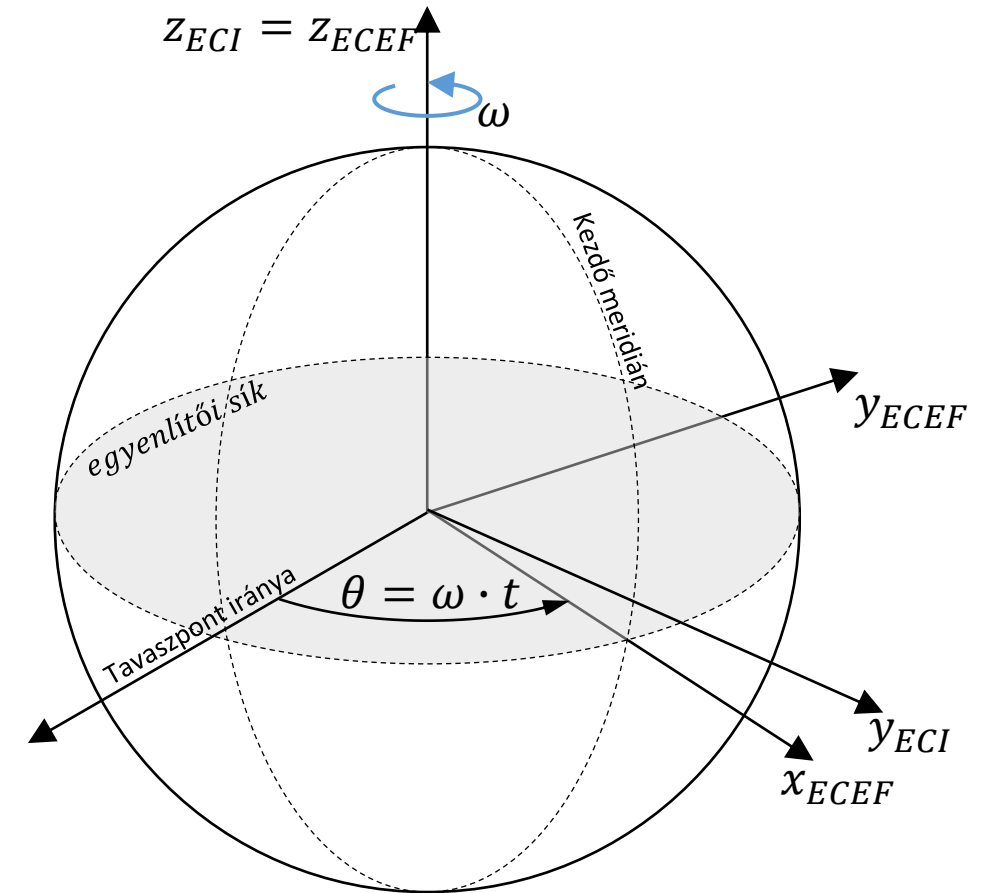
## Példa 4.

Írjuk fel a kapcsolatot az ECI és az ECEF rendszer között.

- A két rendszer közötti kapcsolat csak a z tengely körüli elfordulásban van
- A szögelfordulás sebességét a sziderikus nap hossza határozza meg

$$\omega = \frac{2\pi}{t_{\text{sznap}}} = \frac{2\pi}{23,934} = 0,26251645 \frac{\text{rad}}{\text{óra}} = 15,041085^\circ/\text{óra}$$

$$\theta = \omega \cdot t = 15,041085 \cdot 3,425 = 51,5157^\circ$$



# Példa 4.

ECI-ből ECEF rendszerbe transzformálás forgatási mátrixa

$$\bar{R}_{ECEF \leftarrow ECI}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozíció vektor ECI rendszerben

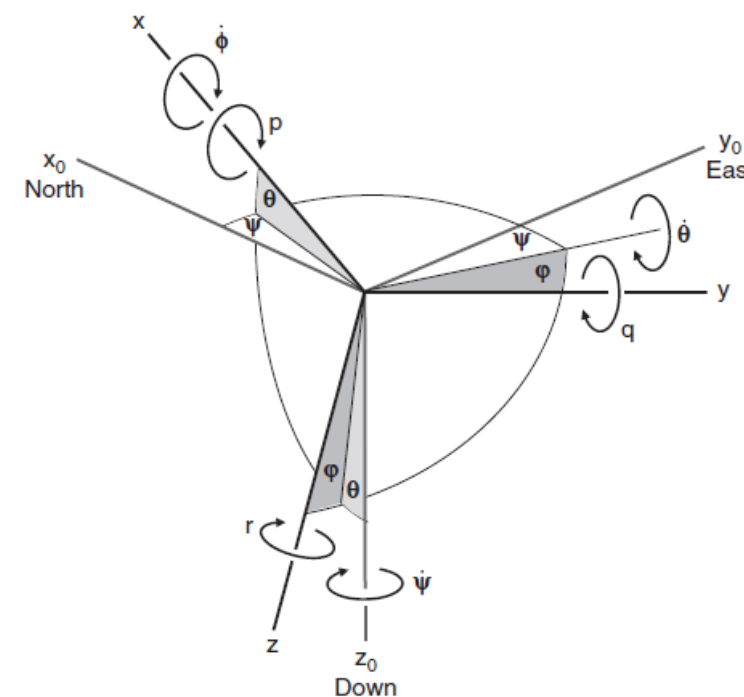
$$\bar{r}_{S_{ECI}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \bar{r}_{S_{ECEF}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \bar{r}_{S_{ECEF}} = \begin{bmatrix} 2436,9 \\ 3418,5 \\ 5184,3 \end{bmatrix} km$$

# Orientáció változása

- A koordináta rendszer forgását leíró szögsebesség vektor transzformálása, összetett feladat
- A szögsebesség vektor komponensek is külön külön elfordulnak
- Ezért külön-külön kell őket transzformálni a forgatási sorrendnek megfelelően

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{R}_y(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{R}_x(\phi) \cdot \bar{R}_y(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}}_{\bar{R}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$



Forrás: CookDiston: Computational Modelling and Simulation, Wiley, 2009

# Orientáció változása

- Transzformáció visszafelé
  - Célja: pl. a járművön mérjük az elfordulások szögsebességeit, amiből megkívánjuk határozni a jármű orientációjának változását egy nem a járműhöz kötött koordináta rendszerben

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \bar{\bar{R}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$\theta = \pm 90^\circ$ -nál nincs megoldása az egyenletnek (Gimbal lock)  
Ez elkerülhető pl. Katerniók alkalmazásával

## Példa 5.

Egy repülőgép vízszintes jobb fordulót hajt végre 25 fokos bedöntési szöggel és bólintási szöggel  $+10^\circ$ . Határozza meg a repülőgép szögsebességét test koordináta rendszerben  $(p,q,r)$ , ha a repülőgép irányváltatásának szögsebessége  $7,5 \text{ }^\circ/s$ . A repülőgép orientációja NED rendszerben ismert.

NED rendszerben az irányváltatás a z tengely körüli elfordulást jelenti.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,5 \end{bmatrix} \text{ }^\circ/s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1307 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

## Példa 5.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{R}_y(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{R}_x(\phi) \cdot \bar{R}_y(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin 10^\circ \\ 0 & \cos 25^\circ & \cos 10^\circ \sin 25^\circ \\ 0 & -\sin 25^\circ & \cos 10^\circ \cos 25^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1307 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0227 \\ 0,0544 \\ 0,1167 \end{bmatrix} \frac{rad}{s} = \begin{bmatrix} -1,3 \\ 3,12 \\ 6,68 \end{bmatrix} \text{°/s} \end{aligned}$$