IX. előadás 2011. 03. 21.

Lagrange-szélsőérték tétel (+2 vizsgakérdés belőle)

A befektetés maximális hasznának kritériuma (Gossen II. tétele)

Régen 3 részre bontott volt a vill. energia-rendszer:
- termelési
- hálózati
- számlázási

igazgatóság.

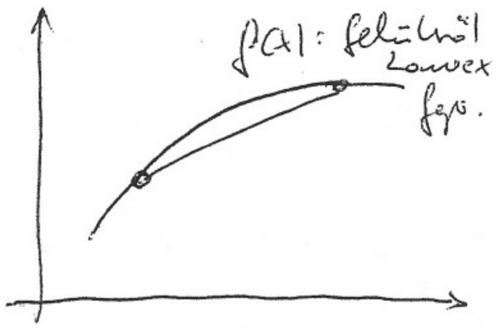
Termelés, szállítás, fogyasztás → a régi rendszernél.
Mind3 tulajdonosa az állam volt.

A feladat az, hogy megállapítsuk, hogy egy olyan számlázás, ami 3 részre osztható, s közülük a költségoldalas kiút, adott pénzügyi kerettel hogy lehet a maximális hasznot kihozni

↓

Lagrange-szélsőérték tétel.

Maximumot keresünk



Ha a fgv-ek, amiket vizsgálunk, felülről konvexek, akkor maximumot fognak találni.
Egyébként a módszer nem működik.

Legyen egy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényünk (n-változós)

Szélsőértéke van az
$$x_1 = a_1$$
$$x_2 = a_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = a_n$$
helyen, ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = 0$$

ahol a ϕ fgv egy konstruált fgv:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot f_j \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

korlátozófüggvények
ezeket akarjuk.
Beruházásnál a korlátozó
egyszerűen annyi pénz van, ezt
kell elosztani.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, \dots, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$m < n$

Az összesen nem lehet
korlátozást akarni.

λ_j: Lagrange-multiplikátor
Az egyenlet teljesüléséhez kell.

Egyszerűsítés: analitikus függvény legyen, hogy tudjunk
vele számolni.

Példa:

$H_i = a_i + b_i \cdot \sqrt{B_i}$ alakban

hozam (függő változó)

konstansok

beruházás (fgtlen változó)

~~Egy példa:~~ $f(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow H_1(B_1) + H_2(B_2) + H_3(B_3)$ ilyen elaz! (a valóságban a vízberuházásoknak nem kell egymástól függetlennek lenniük, függhetnek egymástól).

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow B_ö - B_1 - B_2 - B_3 = 0$$ feltétel (most csak ez az 1db van!)

$B_ö$ ↑ összes pénz, ami van: ennyit kell elkölteni a 3 beruházás között.

így $$\Phi(B_1, B_2, B_3) = H_1(B_1) + H_2(B_2) + H_3(B_3) +$$

$$+ \lambda (B_ö - B_1 - B_2 - B_3)$$

↑ most csak 1 korlátozó feltétel van, ehhez csak egy λ tartozik.

Lagrange-módszerrel:

$$\frac{d\Phi}{dB_1} = \frac{dH_1(B_1)}{dB_1} - \lambda = 0$$

↑ csak egy változó szerint deriválunk, így nem parciálist használunk.

$$\frac{d\Phi}{dB_2} = \frac{dH_2(B)}{dB_2} - \lambda = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dB_3} = \frac{dH_3(B)}{dB_3} - \lambda = 0$$

Ebből pedig:

$$\Phi(B_1, B_2, B_3) = a_1 + b_1\sqrt{B_1} + a_2 + b_2\sqrt{B_2} + a_3 + b_3\sqrt{B_3}$$

$+\lambda(B_ö - B_1 - B_2 - B_3)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dB_1} = \dfrac{b_1}{2\sqrt{B_1}} - \lambda = 0 \rightarrow \dfrac{b_1}{2\sqrt{B_1}} = \lambda \rightarrow B_1 = \left(\dfrac{b_1}{2\lambda}\right)^2 \\ \dfrac{d\phi_2}{dB_2} = \dfrac{b_2}{2\sqrt{B_2}} - \lambda = 0 \rightarrow \dfrac{b_2}{2\sqrt{B_2}} = \lambda \rightarrow B_2 = \left(\dfrac{b_2}{2\lambda}\right)^2 \\ \dfrac{d\phi}{dB_3} = \dfrac{b_3}{2\sqrt{B_3}} - \lambda = 0 \quad \dfrac{b_3}{2\sqrt{B_3}} = \lambda \rightarrow B_3 = \left(\dfrac{b_3}{2\lambda}\right)^2 \end{cases}$$

Mekkora legyen a B_{10}, B_{20}, B_{30}, hogy az eredő hatás le-gyen a maximális

↓ ahány egyenlet, ahány ismeretlen.

$(n+m)$ ismeretlen van, ~~ebb~~.

n: most 3, m: most 1

és még $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$-t is figyelembe vesszük.

összeadjuk őket.

$$\underbrace{B_1 + B_2 + B_3}_{B_ö} = \left(\frac{b_1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{2\lambda}\right)^2$$

↓

ebből csak λ ismeretlen, így az meghatározható.

Ha további $\Delta B = 10$ MFt összeg áll rendelkezésre (M/b kérdés):

$B_ö + \Delta B$ $\quad \dfrac{d\phi}{dB_1} = \dfrac{dH_1(B)}{dB_1} - \lambda = 0$ és a másik 2 egyenlet.

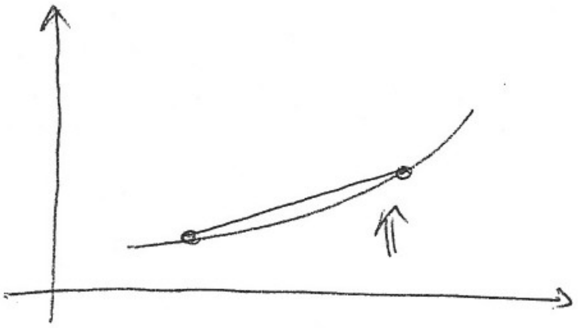
A munkapontban a 3 részterhelés fgv-ei diff. hányadosa λ, vagyis azonos: a munkapontba húzott érintők meredeksége megegyezik.

Ha ez így van, akkor ~~ha $B = 10^9$ Ft és~~ a munkapont környezetében az érintővel helyettesíthető a fgv → így ha 10 MFt van az 1 Mrd-hoz képest, akkor elég harmadolni ezt a ktg-et, a lineáris közelítés miatt.

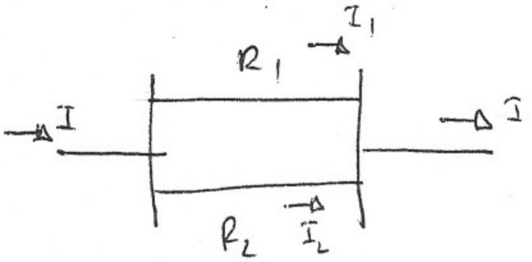
<u>Minimális veszteségi teljesítménnyel történő villamosenergia-átvitel</u>

precízen: wattos teljesítményveszteség.

Most is Lagrange, de minimumot keresünk.



Alulról konvex fgv-eke lehet ezt így vizsgálni.



DC energiaátvitel.

A veszteségi teljesítmény legyen minimális.

$f(x_1, x_2) = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2$ ← veszteségi teljesítmény.

A kényszer egy Kirchhoff-egyenlet.

$h_1(x_1, x_2) = 0 \rightarrow I - I_1 - I_2 = 0$

$$\phi(I_1, I_2) = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \lambda (I - I_1 - I_2)$$

ebből

$$\frac{d\phi(I_1, I_2)}{dI_1} = 2R_1 I_1 - \lambda = 0$$

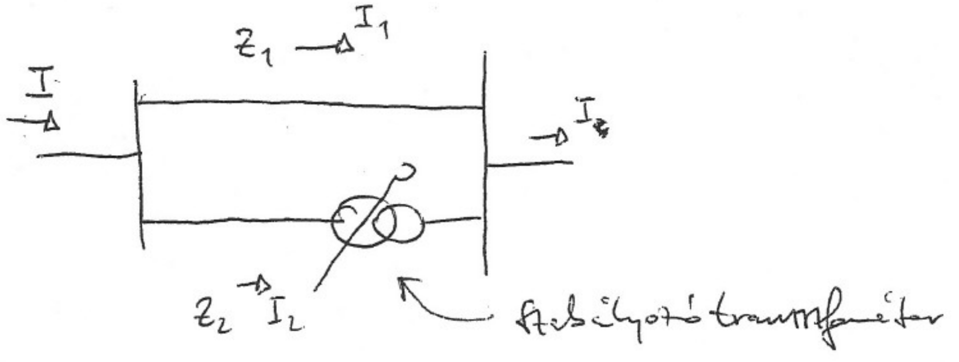
$$\frac{d\phi(I_1, I_2)}{dI_2} = 2R_2 I_2 - \lambda = 0$$

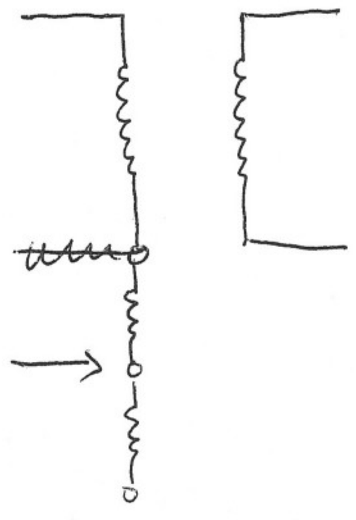
$$\downarrow$$

$$2R_1 I_1 = 2R_2 I_2$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2$$ (ez valójában is – Kirchhoff-hurokegyenlet)

2) Minimális hatásos veszteségi teljesítmény AC villamosenergia-átvitel esetén





A feszültség abszolútértékét lehet változtatni

↓ nem biztos, hogy Lagrange-nél elég: keresztirányban is kellene szabályozni, és de ilyen Magyarországon nincs (hosszirányban tudnak).

Grid Code → hálózati csatlakozás feltételei

(120kV és nagyobb feszültségre való csatlakozás feltételei).

Szabályozás írja elő, hogy a keresztirányú szabályozást hogy kell.

A Lagrange-tétel szerint nem lesz elég a hosszirányú szabályozás.

$I_1 = a_1 + j \cdot b_1$

$I_2 = a_2 + j b_2$ komplex fázorok.

$I = I_1 + I_2 = a + jb$

A kényszerfeltétel ekkor az áramerősség valós és képzetes részére és vonatkozik

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \to a - a_1 - a_2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \to b - b_1 - b_2 = 0 \end{cases}$$ ← Kirchhoff-egyenlet kiépítése

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \Rightarrow R_1 |I_1|^2 + R_2 |I_2^2| = R_1 (a_1^2 + b_1^2) + R_2 \cdot (a_2^2 + b_2^2)$$

így $$\phi(a_1, a_2, b_1, b_2) = R_1 \cdot (a_1^2 + b_1^2) + R_2 (a_2^2 + b_2^2) + \lambda (a - a_1 - a_2) + \lambda_2 (b - b_1 - b_2)$$

aztán $\frac{d\phi}{da}, \frac{d\phi}{db}, \ldots$ deriváltak

Az egyenleteket megoldva: az áramerősség oszló-és léptetés részét az ellenállások arányában osztják el.

A Lagrange-szélsőértékszámítás most is adja vissza a Kirchhoff-törvényeket.

$$\begin{cases} a - a_1 - a_2 = 0 \\ b - b_1 - b_2 = 0 \\ 2R_1 \cdot a_1 - \lambda_1 = 0 \\ 2R_1 \cdot b_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2R_2 \cdot a_2 - \lambda_1 = 0 \\ 2R_2 \cdot b_2 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$a = a_1 + a_2$$

$$2R_1 a_1 = 2R_2 a_2 \qquad a_1 = a_2 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

$$\cancel{2R_1 b_1 = 2R_2 b_2}$$

$$a = \cancel{2R_1 a_1}$$

$$a = a_2 \left(\cdot \frac{R_2}{R_1} + 1\right) = a_2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$a_2 = a \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

hasonlóan

$$a_1 = a \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad b_1 = b \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$a_2 = a \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad b_2 = b \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Ezt csak behelyettesítéssal lehet megoldani.

Kereszténységi választás azért kell, hogy vezetékek túlterhelését megakadályozhassuk.