

1. feladat (6+12=18 pont)

- a) Mit tudunk konvergens sorozatok reciprokának konvergenciájáról, illetve határértékéről? (Térjen ki arra az esetre is, ha az eredeti sorozat zérushoz tart!)
b) Számolja ki a következő sorozatok határértékeit, amennyiben léteznek!

$$a_n = \sqrt{n^3 - 5n - 3} - \sqrt{n^3 - 2n + 6}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3 - 5n - 3} - \sqrt{n^3 - 2n + 6}}$$

Mo. a) Ha $a_n \neq 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$

(3p) . Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, és $a_n > 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$, ha pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, és

$a_n < 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ (3p) .

b) $a_n \stackrel{(2p)}{=} \frac{n^3 - 5n - 3 - (n^3 - 2n + 6)}{\sqrt{n^3 - 5n - 3} + \sqrt{n^3 - 2n + 6}} \stackrel{(2p)}{=} \frac{-3n - 9}{\sqrt{n^3 - 5n - 3} + \sqrt{n^3 - 2n + 6}} \stackrel{(2p)}{=}$

$$= \frac{n}{n^{3/2}} \cdot \frac{-3 - \frac{9}{n}}{\sqrt{1 - \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^3}}} \stackrel{(2p)}{\rightarrow} 0.$$

Másrészt $\sqrt{n^3 - 5n - 3} < \sqrt{n^3 - 2n + 6}$, tehát $a_n < 0$ (1p) , és $b_n = \frac{1}{a_n}$ (1p) , így $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ (2p) .

2. feladat (4+8=12 pont)

a) Állítsa sorrendbe az alábbi nagyságrendeket: $n^k (k > 0)$, $n!$, $\ln n$, n^n , $a^n (a > 1)$.

b) Határozza meg az $a_n = \frac{n! - (-1)^n \ln n}{n^8 - (-2)^n}$ sorozat torlódási pontjait, limesz superiorját, illetve limesz inferiorját!

Mo. a) $\ln n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$ (4p)

b) Páros n esetén

$$a_n = \frac{n! - \ln n}{n^8 - 2^n} = \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{\ln n}{n!}}{\frac{n^8}{2^n} - 1} \rightarrow -\infty \quad (3p)$$

Páratlan n esetén

$$a_n = \frac{n! + \ln n}{n^8 + 2^n} = \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{1 + \frac{\ln n}{n!}}{\frac{n^8}{2^n} + 1} \rightarrow \infty \quad (3p)$$

vagyis $\liminf a_n = -\infty$, $\limsup a_n = \infty$ (2p) .

3. feladat (4+12=16 pont)

a) Ismertesse a L'Hospital-szabályt!

b) Számolja ki a $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+6)\sin(x+2)}{\cos(x^2-4) - \operatorname{ch}(x^2+2x)}$ határértéket!

Mo. a) Ha f és g differenciálható x_0 egy kipontozott környezetében, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, vagy $\left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right| = \infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, amennyiben a jobb oldali határérték létezik. **(4p)**

b) A számláló és a nevező határértéke egyaránt 0, így alkalmazható a l'Hospital-szabály. **(2p)**

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+6)\sin(x+2)}{\cos(x^2-4) - \operatorname{ch}(x^2+2x)} \quad \underline{\underline{\text{(3p)}}} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3\sin(x+2) + (3x+6)\cos(x+2)}{-2x\sin(x^2-4) - (2x+2)\operatorname{sh}(x^2+2x)} \quad \underline{\underline{\text{(5p)}}} \\ & = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6\cos(x+2) - (3x+6)\sin(x+2)}{-2\sin(x^2-4) - 4x^2\cos(x^2-4) - 2\operatorname{sh}(x^2+2x) - (2x+2)^2\operatorname{ch}(x^2+2x)} \quad \underline{\underline{\text{(2p)}}} \quad \underline{\underline{\frac{-3}{10}}} \end{aligned}$$

4. feladat (4+14=18 pont)a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy (a, b) intervallumon differenciálható függvénynek az $x_0 \in (a, b)$ pontban lokális szélsőértékhelye van!b) $f(x) = \arcsin(x-2) - 2x$

Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az f függvény monoton! Hol és milyen típusú lokális szélsőértékhelyei vannak a függvénynek?

Mo. a) $f'(x_0) = 0$, és f' az x_0 pontban előjelet vált, vagy $f''(x_0) \neq 0$ **(4p)**.

b) $D_f = [1, 3]$ **(2p)**, és $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} - 2 = 0$ **(2p)** ha $(x-2)^2 = \frac{3}{4}$

(2p), vagyis ha $x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(2p)**, a f' pedig a két érték között negatív, az értelmezési tartomány többi pontjában pedig pozitív **(2p)**, így a függvény a $\left(1, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és a $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right)$ intervallumon monoton nő **(1p)**, a

$\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ intervallumon monoton fogy **(1p)**, az $x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ pontban

lokális maximuma **(1p)**, az $x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ pontban pedig lokális minimuma **(1p)** van.

5. feladat (10 pont)*

A $3 \cos t = x$ helyettesítést alkalmazva határozza meg az $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$ függvény primitív függvényét!

Mo. $\frac{dx}{dt} = -3 \sin t$, $\sqrt{9-x^2} = 3 \sin t$ (2p)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{(2p)}{=} \int \frac{3 \sin t}{9 \cos^2 t} \cdot (-3 \sin t) dt \stackrel{(2p)}{=} - \int \frac{1}{\cos^2 t} - 1 dt \stackrel{(2p)}{=} - \operatorname{tg} t + t + c \stackrel{(2p)}{=} \\ &= - \operatorname{tg} \arccos \frac{x}{3} + \arccos \frac{x}{3} + c \end{aligned}$$

6. feladat (2+9=11 pont)*

a) Ismertesse a parciális integrálás módszerét!

b) Számolja ki az $\int (5x+1) \operatorname{arctg} x dx$ integrált!

Mo. a) $\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$, (2p)

$$\int (5x+1) \operatorname{arctg} x dx \stackrel{(3p)}{=} \left(\frac{5x^2}{2} + x \right) \operatorname{arctg} x - \int \left(\frac{5x^2}{2} + x \right) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ ahol}$$

$$\int \left(\frac{5x^2}{2} + x \right) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{(3p)}{=} \frac{5}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \stackrel{(3p)}{=} \frac{5}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c,$$

$$\text{így } \int (5x+1) \operatorname{arctg} x dx = -\frac{5x}{2} + \left(\frac{5x^2}{2} + x + \frac{5}{2} \right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

7. feladat (10+5=15 pont)*

a) Milyen $\alpha > 0$ esetén konvergens az $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ integrál? Válaszát indokolja!

b) Számolja ki az $\int_0^\infty \frac{x+3}{(x+1)^2} dx$ integrált!

Mo. a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^\omega \frac{1}{x^\alpha} dx$ (1p)

$$\int_1^\omega \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^\omega = \frac{\omega^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ [\ln x]_1^\omega = \ln \omega, & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4p)$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \in \mathbb{R}$, ha $\alpha > 1$ **(2p)**, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \omega = \infty$ **(1p)**, vagyis az integrál $\alpha > 1$ esetén konvergens **(2p)**.

b) $\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)+2}{(x+1)^2}$, vagyis

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} dx \quad \text{(3p)}$$

egy divergens és egy konvergens improprius integrál összege, így divergens **(2p)**.

(Lehet úgy is, hogy $\frac{x+3}{(x+1)^2} \geq \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$, aminek az integrálja divergens.)

IMSC feladat (14 IMSC pont)

5 liter olajat olyan flakonba csomagolnak, amelyik egy félgömbből és egy hengerből áll. A henger a félgömbhöz az alapkör mentén csatlakozik. Hogy kellene megadni a henger alapkörének (és egyben a félgömbnek) a sugarát, hogy a lehető legkevesebb műanyagot használjanak? (Igazolja azt is, hogy valóban minimumról van szó!)

Mo. A flakon felszínét kell minimalizálni, úgy, hogy a térfogata 5 dm^3 legyen, vagyis $r(\text{dm})$ sugár, és a henger $m(\text{dm})$ magassága esetén: $5 = \frac{2}{3}\pi r^3 + mr^2\pi$ **(2p)**, amiből $m = \frac{5}{r^2\pi} - \frac{2r}{3}$ **(2p)**. A flakon felszíne:

$$A(r) = r^2\pi + 2r^2\pi + 2r\pi m = 3r^2\pi + \frac{10}{r} - \frac{4r^2\pi}{3} = 5 \left(\frac{r^2\pi}{3} + \frac{2}{r} \right). \quad \text{(3p)}$$

$A'(r) = 5 \left(\frac{2r\pi}{3} - \frac{2}{r^2} \right) = 0$ **(2p)** ha $r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ **(2p)**, és $A'' \left(\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \right) = 10 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi} \right) > 0$ **(2p)**, vagyis itt az A függvénynek valóban minimuma van **(1p)**.