Matematik

2011.12.21.

**A3 1. vizsgazh, 2011 ősz**

1. Oldja meg Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül az $y'' + y = 2\cos t + \sin t$ differenciálegyenletet!

2. Legyen $G$ a háromdimenziós térben az origó középpontú, $R$ sugarú gömbfelület felső feléből és az azt alulról határoló $xy$-síkbeli, origó középpontú, $R$ sugarú körlapból álló kifelé irányított zárt felület. Számítsa ki a $v(r) = r|r|^2$ $(r \in \mathbb{R}^3)$ vektorfüggvény felületmenti integrálját $G$-n!

3. Legyen $L$ az $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ háromszög. Számítsa ki a $v(x, y, z) = (2xy^2, 2x^2y, z)$ vektorfüggvény vonalintegrálját $L$-en!

4. Adja meg az $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ függvény azon 0 körüli Laurent-sorát, amely előállítja $f$-et a $-2i$ pontban!

5. Számítsa ki $\int \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz$-t a pozitívan irányított $|z - 1| = 3$ körvonalon!

6. (a) Mit nevezünk egy $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ antiszimmetrikus lineáris transzformáció vektorinvariánsának?
(b) Mit nevezünk egy komplex függvény izolált szingularitási pontjának?
(c) Legyen $f$ olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya tartalmazza a nemnegatív valós számokat. Mit értünk $f$ Laplace-transzformáltján?

A3 1. vizsgazh, 2011 ősz

1. Oldja meg Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül az $y'' + y = 2\cos t + \sin t$ differenciál-egyenletet!

MO. (1) Homogén. $y'' + y = 0$ karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm i$, tehát $y_{ha} = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. 3p
(2) Inhomogén. $i$ a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke, ezért $y_{ip}$-t $t(P\cos t + Q\sin t)$, $P$, $Q \in \mathbb{R}$ alakban keressük. 2p
$y'_{ip} = \cos t(P + Qt) + \sin t(Q - Pt)$, $y''_{ip} = \cos t(2Q - Pt) - \sin t(2P + Qt)$. Visszahelyettesítve: $2Q\cos t - 2P\sin t = 2\cos t + \sin t$, azaz $Q = 1$, $P = -1/2$. Így $y_{ip} = t(-1/2\cos t + \sin t)$, 4p
és az inhomogén általános megoldása $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = (c_1 - \frac{1}{2}t)\cos t + (c_2 + t)\sin t$. 1p

10p

2. Legyen $G$ a háromdimenziós térben az origó középpontú, $R$ sugarú gömbfelület felső feléből és az azt alulról határoló $xy$-síkbeli, origó középpontú, $R$ sugarú körlapból álló kifelé irányított zárt felület. Számítsa ki a $v(r) = r|r|^2$ ($r \in \mathbb{R}^3$) vektorfüggvény felületmenti integrálját $G$-n!

MO. A körlapon az integrandus merőleges a felületi normálisra $(-k)$, így az integrál ott 0. 3p
Legyen $F$ a felső félgömbfelület, $n = r/|r|$ $F$ egységnormálisa, $v_n = vn = |r|^3$ a $v$ $n$-re eső vetülete. 2p
Akkor, felhasználva, hogy a gömb felszíne $4R^2\pi$, $\int_F v\ df = \int_F v_n\ |df| = \int_F |r|^3\ |df| = R^3 \int_F 1\ |df| = R^3 2R^2\pi = 2R^5\pi$. 5p

10p

Vagy: Gauss-Osztrogradszkij tétellel. $\operatorname{div} r|r|^2 = (\operatorname{div} r)|r|^2 + r \operatorname{grad}|r|^2 = 3|r|^2 + r2|r|\frac{r}{|r|} = 5|r|^2$. 5p
$V$-vel jelölve a $G$ által bezárt térrészt, $\int_G v\ df = \int_V \operatorname{div} v\ dV = \int_V 5|r|^2\ dV = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 5r^2r^2 \sin\theta\ d\varphi\ d\theta\ dr = 2\pi R^5$. 5p

10p

3. Legyen $L$ az $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,2,0)$ háromszög. Számítsa ki a $v(x,y,z) = (2xy^2, 2x^2y, z)$ vektorfüggvény vonalintegrálját $L$-en!

MO. $\operatorname{rot} v = \nabla \times v = (0, 0, 4xy - 4xy) = \mathbf{0}$, 5p
tehát a Stokes-tétel miatt $\int_L v\ dr = 0$. 5p

10p

Vagy: A háromszög befogóin az integrandus, és így a vonalintegrál 0. 3p
Az átfogón: $r(t) = (t, 2-2t, 0)$ $(t \in (0,1))$, $\dot{r}(t) = (1, -2, 0)$,
tehát $\int_L v\ dr = \int_0^1 v(r(t))\dot{r}(t)\ dt = \int_0^1 (8t(1-t)^2, 4t^2(1-t), 0)(1,-2,0)\ dt = \int_0^1 16t^3 - 24t^2 + 8t\ dt = 4t^4 - 8t^3 + 4t^2\Big|_0^1 = 0$ 7p

10p

4. Adja meg az $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ függvény azon 0 körüli Laurent-sorát, amely előállítja $f$-et a $-2i$ pontban!

MO. $f$ $|z| > 1$ körgyűrűn konvergens Laurent-sorát keressük: 1p
$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_0^\infty \frac{1}{z^n} = \sum_0^\infty z^{-n-1}$, mert $|1/z| < 1$. 3p
Következésképp $\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \sum_0^\infty (n+1)z^{-n-2}$, 4p

és így $\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z}\sum_0^\infty (n+1)z^{-n-2} = \sum_0^\infty (n+1)z^{-n-3} = \sum_1^\infty \frac{n}{z^{n+2}}$

5. Számítsa ki $\int \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz$-t a pozitívan irányított $|z-1| = 3$ körvonalon!

MO. $\frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+1}$,
így $\int_K \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz = \int_K \frac{e^z}{z}\, dz - \int_K \frac{e^z}{z+1}\, dz = 2\pi i(1 - \frac{1}{e})$ a differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle integrál-formula miatt

VAGY: reziduum-tétellel. $\int_K \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}_0 \frac{e^z}{z(z+1)} + \mathrm{Res}_{-1} \frac{e^z}{z(z+1)})$ mert $\frac{e^z}{z(z+1)}$ a $0, -1$ pontok kivételével reguláris a komplex síkon,
de $\mathrm{Res}_0 \frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e^0}{2z+1\big|_{z=0}} = 1$ és $\mathrm{Res}_{-1} \frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e^{-1}}{2z+1\big|_{z=-1}} = -e^{-1}$ mert $e^z$ és $g(z) = z(z+1)$ regulárisak $0, -1$-ben, $g(0) = 0 = g(-1)$ de $g'(0) \neq 0 \neq g'(-1)$
tehát $\int_K \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz = 2\pi i(1 - \frac{1}{e})$

6. (a) Mit nevezünk egy $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ antiszimmetrikus lineáris transzformáció vektorinvariánsának?
(b) Mit nevezünk egy komplex függvény izolált szingularitási pontjának?
(c) Legyen $f$ olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya tartalmazza a nemnegatív valós számokat. Mit értünk $f$ Laplace-transzformáltján?

MO. (a) Azt az egyetlen $c \in \mathbb{R}^3$-et, amire $A(r) = c \times r$.

(b) $z_0$ az $f$ függvény izolált szingularitási pontja, ha $f$ $z_0$-ban nem, de $z_0$ egy lukas környezetében reguláris.

(c) $\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$, beleértve természetesen, hogy $F(s)$ olyan $s$-ekre értelmes, amikre ez az improprius integrál konvergens.