Hírközléselmélet

Ezentúl V2.225 Frigyes István

http://docs.mht.bme.hu/~frigyes/hirkelm hirkelm01a.ppt

ZH-k: III. 11, IV. 8, IV. 29, V. 13 } szerda 17-19

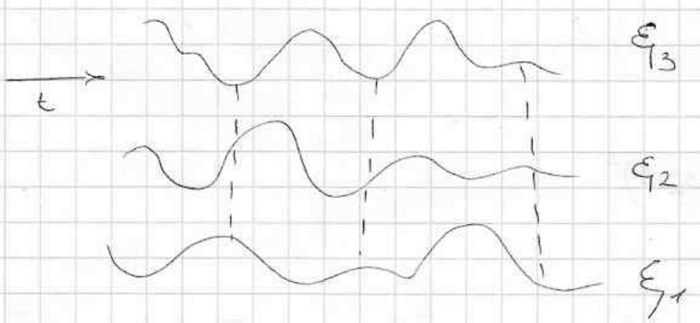
Sztochasztikus folyamatok

3féle szempont

1.) végtelen sok valószínűségi változó időben rendezett együttese ; sorsolások ξ

2.) véletlenszerűen változó függvénycsalád t

3.) sorsolások és idő ; ξ, t



jellemzés
- valószínűség -> eloszlás

1. val. sűrűség

$x(t) \quad p_x(x(t))$

2. együttes val. sűrűség $x_1(t_1), x_2(t_2) \quad P_{x_1,x_2}(x_1(t_1), x_2(t_2))$

⋮

n. — II — $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_n) \quad P_{x_1,x_2 \dots x_n}(x(t_1), x(t_2) \dots x(t_n))$

félig véletlen bináris folyamat

értékkészlet $+1, -1$ (1, 0) $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$

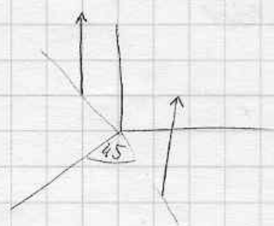
változni csak $k.T$-ben tud, ahol k egész szám
T bitidő => félig véletlen

$$p_x(x(t)) = \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1)$$

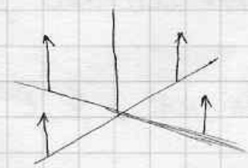
$\Rightarrow$ ugyanolyan valószínűséggel lehet +1 v. −1

$$P_{x_1,x_2}(x(t_1), x(t_2)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\delta(x_1-1)\delta(x_2-1)\right] + \frac{1}{2}\left(\delta(x_1+1)\delta(x_2+1)\right) & t_1, t_2 \text{ e.r. azonos} \\ \frac{1}{4}\delta(x_1-1)\delta(x_2-1) + \frac{1}{4}\delta(x_1-1)\delta(x_2+1) + \frac{1}{4}\delta(x_1+1)\delta(x_1-1) + \\ + \frac{1}{4}\delta(x_1+1)\delta(x_2+1) \end{cases}$$

azonos időrésben



különböző időrés



$\Rightarrow$ ez is 45°-oson van!

Gaussi-folyamat

1D $$P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{pmatrix} \qquad P_x(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\underline{K})2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m})^T \cdot \underline{K}^{-1}(\underline{x}-\underline{m})\right]$$

$m: E\{\underline{x}\}$ várható érték

kovariancia: $K_{12}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{x_1(t_1)\, m_1(t_1) + x_2(t_2)\, m_2(t_2)\}$

$$x, y, z, w \quad E\{x, y, z, w\} = E\{xy\}E\{zw\} + E\{xz\}E\{yw\} + E\{xw\}E\{yz\}$$

stacionárius

„ha a folyamat tulajdonságai nem nagyon változnak az idő függvényében"

akármelyik pillanatban, akármilyen rendben a valószínűségi eloszlásfüggvénye független, ha eltoljuk valamennyi idővel

$$F_x(t_1, t_2 \ldots t_n, t_{n+1} \ldots) = F(t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots t_n+\tau, t_{n+1}+\tau)$$

n-ed rendben erősen stacionárius
n-ed rendig stac. (nyilván alacsonyabb rendre is teljesül)

gyengén stac.

$E\{[x(t)]^2\} < \infty$ (Hilbert folyamat)

Korrelációs fv. / Autokorr. fv.

$R_x(t_1, t_2) \triangleq E\{x(t_1)x(t_2)\}$

ha $R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1+\tau, t_2+\tau) = R_x(\tau)$ => gyengén stac. folyamat

$$R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int x(t_1)x(t_2)P_{x_1,x_2}(x(t_1),x(t_2))\,dx(t_1)dx(t_2) =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} x(t_1+\tau)\,x(t_2+\tau)P_{x_1,x_2}(x(t_1+\tau),x(t_2+\tau))\,dx(t_1)\,dx(t_2) =$$

$$= R_x(t_1, t_1+\tau) - R_x(\tau)$$

ha gyengén stac, abból még nem következik semmi az erősen stac.-ra
kiv: Gaussi folyamat

jegyzet: FRIGYES: HÍRKÖZLŐ RENDSZEREK

Ciklostacionárius / periódikus folyamat
kT eltolással szemben invariáns

két folyamat keresztkorrelációs függvénye

$R_{x,y} = E\{x(t_1)y(t_2)\}$

gyengén stac, ha $R_{x,y}$ csak a τ időeltolástól függ

Négyzetes középben folytonos sztochasztikus folyamat

$E\{[x(t+\tau)]^2 - [x(t)]^2\} < \epsilon \qquad \tau < \delta$

$$s \triangleq \int_a^b x(t)\,dt$$ $\Rightarrow$ sztochasztikus folyamat integrálja

s: véletlenszerűen változó szám
$\Rightarrow$ valószínűségi változó

$$\lim_{\Delta t \to \emptyset} E\left\{\left[s - \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\,\Delta t_i\right]^2\right\} = \emptyset$$

sok folyamatra a sima integrálás nem végezhető el

$$E[s] = \int_a^b E\{x(t)\}\,dt \qquad \sigma_s^2 = \iint_a^b \underbrace{R(t_1, t_2) - E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\}}_{\text{kovariancia fv.}}\,dt_1\,dt_2$$

Időbeli átlag:

$$\widehat{n_x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

időbeli négyzetes átlag $\rightarrow$ teljesítmény

$$\widehat{n_x^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t)]^2\,dt$$

$$\widehat{R_x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

Ha a $\widehat{n_x} = E\{x(t)\}$ és $\sigma_n^2 = \emptyset$ akkor az időbeli és stat. átlagképzés ua.

$\widehat{R}_x(\tau) = R_x(\tau)$ és $\sigma_R^2 = \emptyset \Rightarrow$ Ergodikus folyamat

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$ $\Rightarrow$ spektrális sűrűségfv.

$$f(x);\ \mathcal{F}[F(y)];\ \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)}\ \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,dy = f(x)\Big|_{x=\emptyset}$$

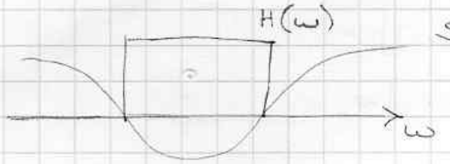
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} S_x(\omega)\,d\omega = R_x(\tau)_{\tau=\emptyset} > \emptyset \qquad R_x = E\{[x(t)]^2\} \rightarrow \text{teljesítmény}$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \qquad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$X(\omega) \quad H(\omega) \quad Y(\omega)$

$x(t) \rightarrow S_x(\omega)$

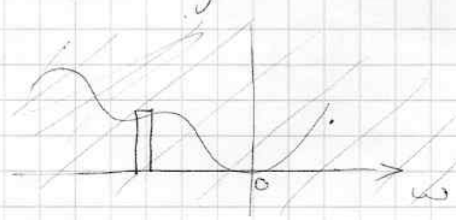
$y(t) \rightarrow S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$

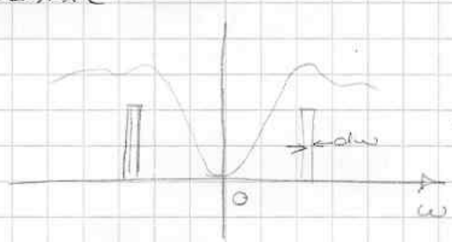


$$x(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y(t)$$
$H(\omega)$

$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$

=> a spektrális sűrűségfüggvénynek mindenhol nemnegatívnak kell lennie





Komplex burkoló

kezdőfázis

$x(t) = \sqrt{2}\,A\,d(t)\left[\omega_c(t) + \vartheta(t) + \phi\right]$ => modulációs leírás

ampl vivőfrekvencia $\phi = \varnothing$

$x(t) = Aa(t)\cos(\omega_c t + \phi) - Aq(t)\sin(\omega_c t + \phi)$ => kvadratúra leírás

$d(t) = \dfrac{\sqrt{[a(t)]^2 + [q(t)]^2}}{\sqrt{2}} \qquad \vartheta(t) = \operatorname{arctg}\dfrac{q(t)}{a(t)}$

$a(t) = \sqrt{2}\,d(t)\cos\vartheta(t) \quad , \quad q(t) = \sqrt{2}\,d(t)\sin\vartheta(t)$

$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{[a(t) + jq(t)]}_{\text{komplex burkoló}} e^{j\omega_c t} \right\}$

$x(t) \to X(-\omega) = X(\omega)^*$ Fr.-transzf. konjugált szimm.

$\Rightarrow$ elég a pozitív frekvenciákra megadni

$$\mathring{X}(\omega) \triangleq X(\omega) + \operatorname{sign}\omega\, X(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

$$\mathring{X}(\omega) = X(\omega) + j\left[-j \operatorname{sign}\omega\, X(\omega)\right]$$

$$\mathring{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) + j\,\mathcal{F}^{-1}\left[-j \operatorname{sign}\omega\, X(\omega)\right] =$$

$$= x(t) + j\, x(t) * \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left[-j \operatorname{sign}\omega\right]}_{1/t} =$$

$$= x(t) + j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{t-T}\, dT}_{\mathcal{H}\{x(t)\}}$$

Hilbert-transzformált

$\mathring{x}(t) = x(t) + j\,\mathcal{H}[x(t)]$ $\to$ $x(t)$-hez tartozó analitikus fv.

2009. február 19.

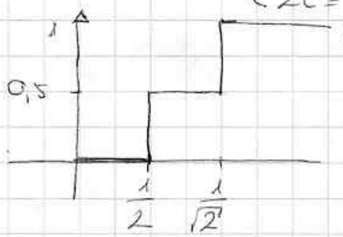
Zh-k
- tesztkérdés (több jó megoldás is lehet) kb 3-4
- tétel
- számpélda

PÉLDA:

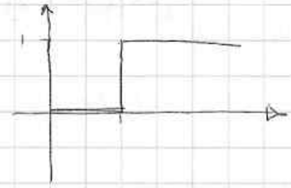
(1) $x(t) = \begin{cases} \sin \pi t & \text{fej} \quad P_f = 1/2 \\ 2t & \text{írás} \quad P_i = 1/2 \end{cases}$

$F_x(x,t) \qquad t = 1/4,\ 1/2,\ 1$

ha $t = 1/4$ $\qquad x(t) = \begin{cases} \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2t = \frac{1}{2} \end{cases}$



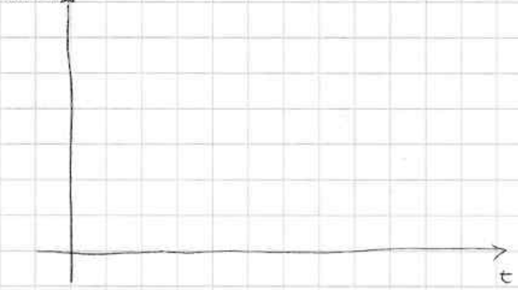
$t = 1/2 \qquad x(t) = \begin{cases} \sin \pi/2 = 1 \\ 2t = 1 \end{cases}$



$t = 1 \qquad x(t) = \begin{cases} \emptyset \\ 2 \end{cases}$

(2b)

	i	f	i	i	i	f	f
t	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
x	0,5	1	1,5	2	2,5	-1	$-1/\sqrt{2}$



(2) Gauss folyamat $m = \varnothing$
σ^2 adott

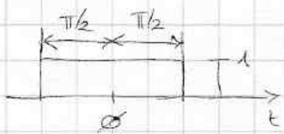
Korr. fu. $R_x(\tau)$ → meghatározni
Spektr. sfu.
(4 Gauss folyamat várható értéke)

y, z, u, v

$$E\{y, z, u, v\} = \overline{yz}\,\overline{uv} + \overline{yu}\,\overline{zv} + \overline{yv}\,\overline{uz}$$

y, z × $t = \varnothing$
u, v × τ időpontban

(3)



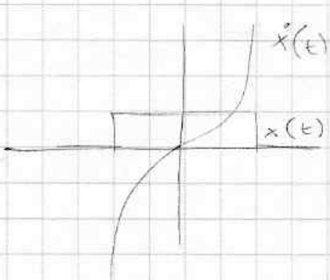
$$\hat{x}(t) = x(t) + j\,\mathcal{H}\{x(t)\}$$

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{1}{t-u}\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{t-u}\,du = \Big[\ln(t-u)\Big]_{\pi/2}^{-\pi/2} =$$

$$= \Big[\ln(t-u)\Big]_{\pi/2}^{t+\varepsilon} + \Big[\ln(t-u)\Big]_{t-\varepsilon}^{-\pi/2} \qquad \lim_{\varepsilon \to \varnothing}$$

$t=u$ pillanatot ki kell hagyni

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\cancel{t-t}-\varepsilon}{t-\pi/2}\cdot\frac{t+\pi/2}{\cancel{t-t}+\varepsilon}\right) = \ln\frac{\pi/2+t}{\pi/2-t}$$



$\cos \omega_c t \rightarrow e^{j\omega_c t}$ ($\rightarrow$ analitikus fv)

$\sin \omega_c t \rightarrow j e^{j\omega_c t}$

modulált jel
- sávkorlátozott
- határfrekvencia $< \omega_c / 2\pi$ (keskenysávú jel)

$$x(t) = a(t) \cos \omega_c t \Rightarrow \mathring{x}(t) = a(t) e^{j\omega_c t}$$

$$x(t) = q(t) \sin \omega_c t \rightarrow \mathring{x}(t) = j q(t) e^{j\omega_c t}$$

az $\tilde{x}(t) \triangleq a(t) + j q(t)$ komplex burkoló egyértelműen meghatározza a jelet.

$\mathring{x}(t) = \tilde{x}(t) e^{j\omega_c t}$ analitikus jel

$x(t) = \mathrm{Re}\left[\mathring{x}(t)\right] = a(t) \cos \omega_c t - q(t) \sin \omega_c t$

lineáris transzformáció $\mathfrak{I}(\omega)$ nem lesz konj. szimm.

1. Döntéselmélet és becsléselmélet

- jel + zaj

- Az ismert jelnek vannak ismeretlen paraméterei
- jelalakot ismerjük, de vannak statisztikusan nem ismert paraméterei
- A jelalak is véletlenszerűen változik
- egyszerű bináris átvitel; döntés N független minta alapján
  két hipotézis (H_0 és H_1)
  megfigyelés: $\underline{r}^T (r_1, r_2 \dots r_N)$
  4féle eredmény
- Bayes-féle döntés

$$\mathrm{erfc}\, x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \sim \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$x > 3$ (minél nagyobb x, annál jobb a közelítés)

2009. február 26.

PÉLDÁK: döntéselmélet

(1) H_1: $p_r = \frac{1}{2} e^{-|R|}$

H_0: $p_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-R^2/2}$ $\quad m = \varnothing$, $\sigma = 1$

kérdés: likelihood arány?

$$\Lambda(R) = \frac{p_r(R|H_1)}{p_r(R|H_0)} = \frac{\frac{1}{2} e^{-|R|}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-R^2/2}}$$

$$\ln \Lambda(R) = \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \frac{R^2}{2} - |R| \gtrless \ln \eta$$

$$\frac{R^2}{2} - \cancel{2}|R| \gtrless \ln \eta \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$R^2 - 2|R| \gtrless \underbrace{2 \ln \eta \sqrt{\frac{2}{\pi}}}_{A}$$

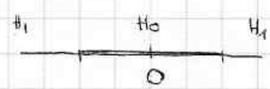
$$R^2 - 2|R| - A = \varnothing$$

$$R = 1 \pm \sqrt{1 + A}$$

$\hat{H} = H_1$, ha $|R| > 1 + \sqrt{1+A}$

$\hat{H} = H_0$, ha $|R| < 1 + \sqrt{1+A}$

$A > 0 \qquad (0.8\,\eta)^2 > 1$



$A < 0$

$$\eta = \frac{P_0 (C_{10} - C_{00})}{P_1 (C_{01} - C_{11})}$$

(82) Döntés kettőnél több hipotézisnél

- minden döntésnek van költsége → átlaguk a kockázat

- Bayes döntés → kockázat minimalizálása
  → döntési tér felosztása

(83) $$K \triangleq \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P_j \int_{Z_i} p_{R(H)} \left(R \mid H_j \right) dR$$

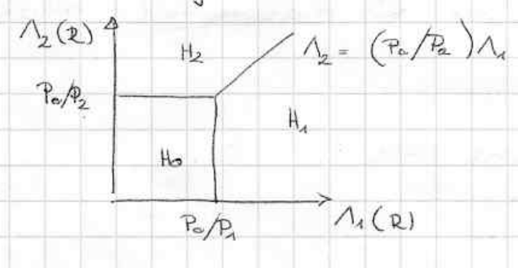
(84) $M = 3$

definiálható a likelihood arány → kettő is van

$$\Lambda_1(R) = \frac{p_{r(H_1)}(R \mid H_1)}{p_{r(H_0)}(R \mid H_0)} \quad ; \quad \Lambda_2(R) = \frac{p_{r \mid H_2}(R \mid H_2)}{p_{r \mid H_0}(R \mid H_0)}$$

Döntési szabály : 3 egyenest definiál

(86) $C_{ii} = 0 \qquad C_{i \neq j} = 1$



Nota bene?

(88) a-posteriori valószínűségek

(90) Bayes-tétel

diszkrét változókra

$$P_r(a/b) \triangleq \frac{P_r(a,b)}{P_r(b)} \quad ; \quad P_r(b \mid a) \triangleq \frac{P_r(a,b)}{P_r(a)}$$

$$\Rightarrow P_r(a \mid b) = \frac{P_r(b \mid a) P_r(a)}{P_r(b)}$$

folytonos:

$$p(a \mid b) = \frac{p(b \mid a) p(a)}{p(b)}$$

(91) megfigyelési tér N-dim (N megfigyelés)
döntési tér M-1 (M a hipotézisek száma)

BECSLÉSELMÉLET

(92) paraméterbecslés

(94) paraméter lehet
1. val. változó (ismert eloszlású) → a-priori ismeret
2. ismeretlen determinisztikus érték → nem tudunk semmit a megbecsülendő paraméterről

(95) Példa: feszültség mérése
+ Gauss zaj adódik hozzá

(96) itt is költség és kockázat
↳ ált. kétvált. fv. $C(a,\hat{a})$
becslés hibája $\varepsilon = a - \hat{a}(R)$
$C(\varepsilon)$

(101) költségfüggvény 0 Δ sávban
1 egyébként

a kockázat min. ha a felt. val. sűr. <u>maximumát</u> választjuk a becslés eredményének

(111) a paraméter valós állandó
csak a mérés eredménye val. vált.
nincs a-priori ismeret

TÉTELEK
1. Sztochasztikus folyamatok
2. Modulált jelek - komplex burkoló
3. Döntéselmélet
4. Becsléselmélet

(2) PÉLDA
Legyen a moduláló jel $\mathcal{F}$-transzformáltja

$$M(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| \le \omega_0 \\ \emptyset & > \omega_0 \end{cases}$$

$$m(t) = \frac{A\omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$$ nem túl gyakran alkalmazzák

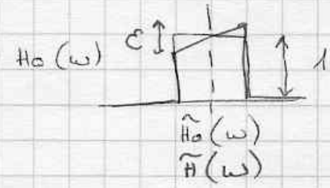
$$x(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega_0 + \omega_c)$$

$$\mathring{X}(\omega) = M(\omega - \omega_c)$$

$$\tilde{X}(\omega) = M(\omega)$$

$X(\omega)$ $H_0(\omega)$ $Y(\omega)$



$\tilde{H}_0(\omega)$
$\tilde{H}(\omega)$

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{H}_0(\omega) + \varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\tilde{Y}(\omega) = \left(\tilde{H}_0(\omega) + \varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}\right) \tilde{X}(\omega)$$

$$\tilde{y}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\underbrace{\tilde{M}(\omega)\tilde{H}_0(\omega)}_{\tilde{Y}_I(\omega)} + \underbrace{\tilde{M}(\omega)\varepsilon\frac{\omega}{\omega_0}}_{\tilde{Y}_Q(\omega)} \right]$$

in-phase

$$\tilde{y}_Q(t) = \frac{A}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\omega_0}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \omega e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{2jA\varepsilon}{\omega_0}\left\{ \frac{2\cos\omega_0 t}{jt} + \frac{2j\sin\omega_0 t}{\omega_0 t^2} \right\}$$

$$\lim_{t\to\emptyset}\left[\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} - \cos\omega_0 t\right]\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left[1 - \frac{(\omega_0 t)^2}{3!\,t} - 1 + \frac{(\omega_0 t)^2}{2!}\right] =$$

$$= \omega_0^2 t\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \emptyset$$

Nézzük csak, mit kapunk előtt

$$y(t) = \frac{A\omega_0}{\pi}\left[\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} + j\varepsilon\left(\frac{\sin\omega_0 t}{(\omega_0 t)^2} - \frac{\cos\omega_0 t}{\omega_0 t}\right)\right]$$

$$y(t) = \frac{A\omega_0}{\pi}\left[\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\cos\omega_c t - \varepsilon\left(\frac{\sin\omega_0 t}{(\omega_0 t)^2} - \frac{\cos\omega_0 t}{\omega_0 t}\right)\sin\omega_c t\right]$$

$$P_I = A^2 2\omega_0$$

$$P_Q = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} A^2\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 d\omega = \left[\varepsilon^2 A^2 \frac{\omega^3}{3\omega_0^2}\right]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{2\varepsilon^2}{3}A^2\omega_0$$

$$\frac{P_I}{P_Q} = \frac{A^2 2\omega_0 3}{A^2\varepsilon^2 2\omega_0} = \frac{3}{\varepsilon^2} \sim 25\text{ dB} \quad (10\%\text{-os ferdeség esetén})$$

jel / torzítás

2009. március 5.

dr. Bitó János V2/633 tel: 3616

bito@hut.bme.hu

http://docs.mht.bme.hu/~frigyes/hirbelm

01b, 2

Zh jövő hét szerda $\boxed{03.11. \quad 17^{15}-19 \quad V2716}$

feladatokat átnézni! (mai előadás is!)

Digitális jelek átvitele analóg csatornán, a zaj hatása

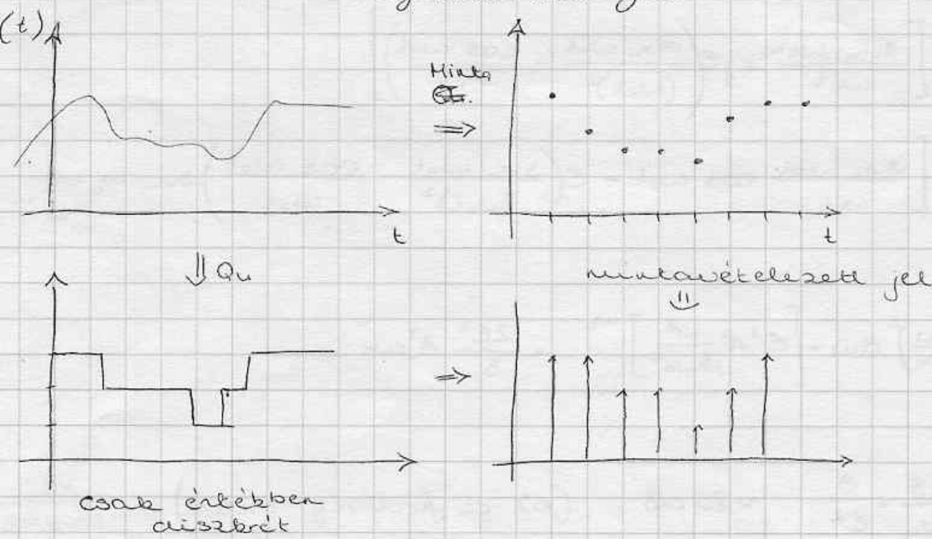
Hirbelm02

(3) döntéselmélet alkalmazása:

információ A-ból B-be   B: vevő - döntés

legjobb döntés: legkisebb hiba

legvalószínűbb jel



- véges számú jelalak
- minden egyes jelalak véges energiájú => véges ideig tart
- a vevő a-priori ismeretekkel rendelkezik
  - -> ismeri azokat a jelalakokat, amit az adó használ

=> Hipotézisvizsgálat

(4) - hibavalószínűség: milyen valószínűséggel döntünk hibásan/helyesen

- költség Ø, ha jó a döntés; 1, ha rossz
  - => költségminimalizálás
- hibás döntést okozhat
  - additív zaj
  - lineáris/nemlineáris torzítás
    (pl: erősítő karakterisztika)
  - additív interferencia (ACI: szomszédos csatornák interferenciája - ~~Code~~ Channel Interference)
    CCI: azonos - Code
  - csatorna nem ideális fading jelenségek

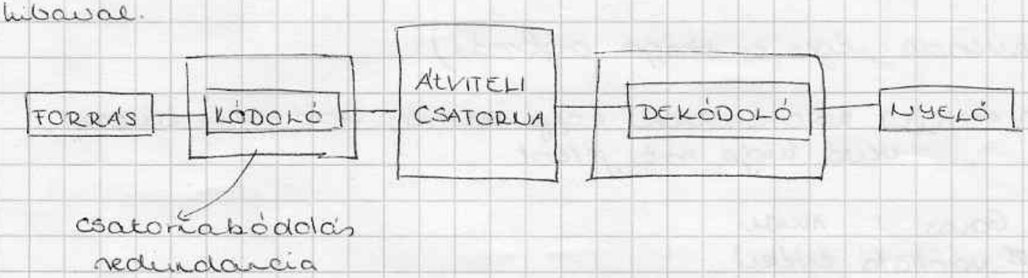
paraméter hibás ismerete: pontosan milyen, mikor
kezdődik, meddig tart stb
szinkronizációs hiba

(5) gyakran egy jelcsoport-keret hibavalószínűsége érdekes

jitter: $j(t) = |T - \hat{T}|_{pp}$
pl. ha a jel kiszélesedik és a vevő csak T-t érzékel
→ az info egy részét nem érzékeli

(6) Minőségi paraméterek
- hibavalószínűség
- jitter

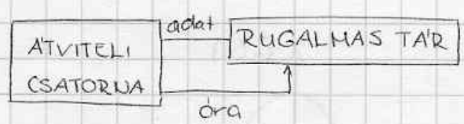
javíthatók
hibával.



→ más mint a tömörítő kódoló, ott cél: az analóg jelben levő redundancia csökkentése

Itt viszont redundancia az átvitel javítására
pl: minden jelet 3-szor adunk → többségi döntés

jitter



(7) minőségrontó hatások

$n(t)$ additív Gauss-zaj

(8) ezek a hatások <u>analóg</u> hatások
a rádió és optikai frekvenciasáv elég eltérő

(9) Egyedülálló jelek átvitele Gauss-zajban
↳ nincs pl. ISI és csak zaj van (nem foglalkozunk csatorna, szűrő stb. torzítással)

M: lehetséges üzenetek száma
$\{m_i\}$: üzenetek halmaza
P_i: a-priori adási valószínűség
} FORRÁS jellemzői

akkor jó az információkódolás, ha közel azonos az egyes üzenetek adási valószínűsége

t. időpillanatban: m_i → konkrét jelalakot kell hozzárendelnünk

vevő $s_i(t) + n(t)$

$s_i(t)$ ↓ hasznos jel

$n(t)$ ↓ zaj ⇒ feltesszük, hogy az időzítés ismert

adó

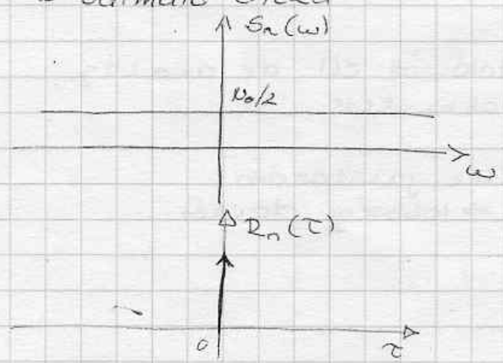
hibamentes átvitel nem valósítható meg
(pl. beszéd bithibával 10^{-3} még érthető)

(10) specifikációk
- a-priori valószínűségeket ismerjük
- vevőnek ismernie kell az $s_i(t)$ valós jelalakokat

(frekvencia: véges és drága erőforrás)

$m_i \leftrightarrow s_i(t)$ kölcsönösen egyértelmű; adó nem téveszt, vevő tudja, mit jelent

(11) zaj: Gauss AWGN
- Ø várható értékű

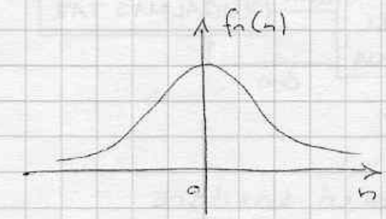


gyengén stac. sztochasztikus folyamat
korrelációs fv: dirac delta

$S_n \leftrightarrow R_n$ $\mathcal{F}$

⇒ korrelálatlan minták

$$p_n = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma_n}\right)^2}$$



$\sigma_n^2 = N_0/2$

zaj telj. végtelen DE nekünk nem érdekes az egész fr. sáv

⇒ kiszűrjük a kívánt sávot → korreláltságot viszünk be
(ezzel viszont nem foglalkozunk)

(12) a fehér csak közelítés (valahol nagyon messze közelít a nullához THz-ek környékén, nekünk nem érdekes)

Planck-formula $S_n(\omega) = F \frac{hf}{e^{hf/k_B T_0} - 1}$

Ha $hf/k_B T_0 \ll 1$ $S_n(\omega) \approx F k_B T_0$ ⇒ konstans

Ha $hf/k_B T_0 \gg 1$ $S_n(\omega) \approx hf e^{-hf/k_B T_0} \approx Ø$

 ⇒ az opt. fr. tartományban az additív termikus zaj nem játszik

(13) független minták → nagy zaj
korrelált → kevesebb infó

(14) feladatok
1. Optimális vevő
2. Hibaarány
3. Koherens – nem-koherens átvitel
↳ időben és fázisban

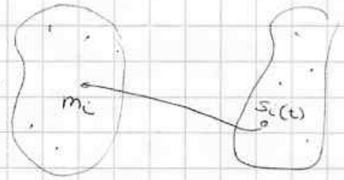
$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ → modulálatlan vivőfrekvenciás jel

$v(t) = A \cdot a(t) \cdot \cos(\omega_c t + \vartheta(t) + \varphi)$
↓ AM ↓ PM FM

4. Optimális jelkészlet
5.

+0. digitális jelek vektoriális előállítása

(15) Ø. vektoriális előállítás



$M = \{m_i\}^M$ $\quad S = \{s_i(t)\}^M$

⇒ leírható egy választott ortonormált bázisfv. rendszerrel
$\varphi_j(t), j = 1 \dots D \quad D \le M$

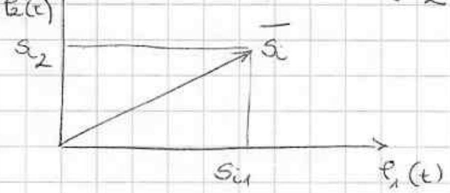
$\Phi = \{\varphi_i(t)\}^D$

bármely $s_i(t)$ előállítható az $\varphi_i(t)$-k lin. kombinációjával

ortonormált
- ortogonális $\quad \int_0^T \varphi_j(t)\varphi_i(t)\,dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i \\ \emptyset & j \neq i \end{cases}$
- normált
egységnyi energiájú

$a_{ij} = \int_0^T s_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt$
↓
súlyozó faktor

D=2



D dimenziós jeltér, amiben a hasznos jelek vannak bázis generálás

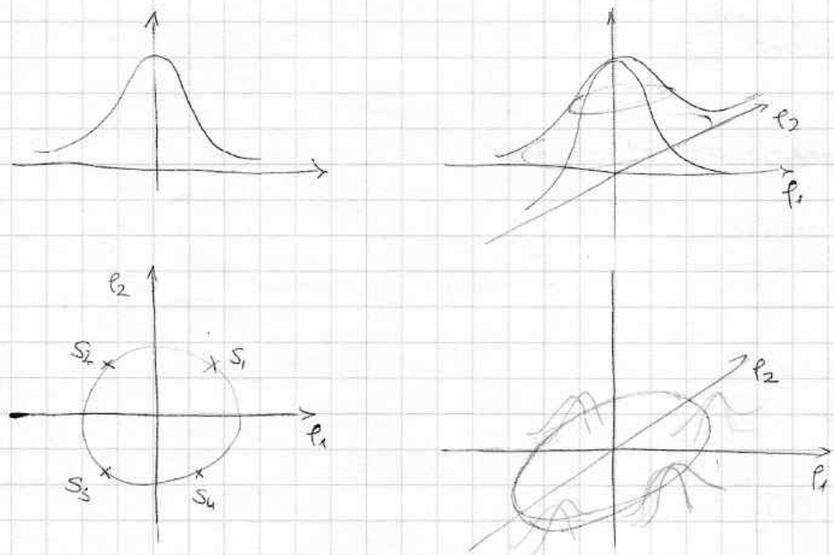
1. -> az egyik $s_1(t)$-t kiválasztjuk, majd normáljuk

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

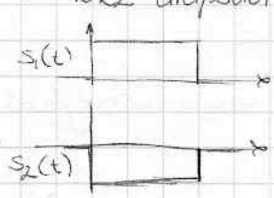
2. s_2-nek a vetületét meghatározzuk φ_1-re

a jelenergia gyöke a vektor hossza

(21) a zaj is felírható vektoriálisan
→ végtelen dimenziós <u>DE</u> csak a hasznos jel tere érdekes



(27) jeltér példa
NRZ alapsávi jel



1 dimenziós

2009. márc. 12.

(33) 1 Egyedülálló jelek - optimális döntési szabály

- jeltér optimális felosztása → átlagos hibával legyen a legkisebb

(34) Kockázat min, ha az a-posteriori val. a legnagyobb

$$P_r(s_i|r) = \max_i \quad i = 1, 2, \dots M$$

(35) Bayes-tétel

$$P_r(s_i|r) = \frac{P_{r|s_i}(r|s_i)\,P_r(s_i)}{P_r(r)}$$

döntési szabály

$$\hat{H}_i: \quad \frac{P_{r|s_i}(r|s_i)\,P_r(s_i)}{P_r(r)} = \max$$

⇒ a nevező nem függ i-től így valójában elég a számlálót vizsgálni

r: folytonos val. vált (→ val. sűrűségfv. ezért jelöljük kis betűvel)
s_i diszkrét, M jelalak egyike

(36) logaritmust vonva
ami nem függ i-től az elhagyható

$$\hat{H}_i: \frac{1}{2} N_0 \ln(P_i) + rs_i - \frac{1}{2} E_i = \max$$

(37) zaj-vektor

$$n(t) = \sum_{j=1}^{D} n_j \varphi_j(t) + n'(t) \quad (\Rightarrow \underline{n} + n'(t))$$

$n'(t)$ ⇒ ortogonális a jeltérre

rs_i : csak ebben a tagban kell vizsgálni a zajt, a többiben nem szerepel

$$rs_i = \int_0^T s_i(t) \sum_{j=1}^{D} n_j \varphi_j(t)\,dt + \underbrace{\int_0^T s_i(t)\, n'(t)\,dt}_{=\emptyset \text{ mert ortogonális a jeltérre}}$$

→ optimális vevőben $n'(t)$ irreleváns

(38) Ha az a-priori valószínűségek egyformák

$$\hat{H}_i: -\frac{|r_i - s|^2}{N_0} = \min$$

=> a legközelebbi jelvektor javára kell dönteni

(39) $r \cdot s_i$ skalár szorzás
hozzáadjuk az ½... előfeszültség jellegű részt, majd egy komparátor választjuk ki a maximumot

Ha az E-k egyformák, az előfesz.-ből kihagyhatók. ha az a-priori val. egyforma az egész előfesz. elhagyható

(40) Valójában
skalár szorzás = két jelalakot összeszorozzuk majd integráljuk
=> ez így már számokat jelöl

(41) Szükséges-e a modell összes eleme
- a-priori valószínűségek kellenek
- s_i energia véges -> szerepel az előfesznél => kell
- szükség van a zaj statisztikai leírása
- szükséges a vevőben a jelek definíciójára
- szükséges az időzítés az integrálás miatt

(42) előbbi: KORRELÁCIÓS VEVŐ
-> lin. művelet -> szűrővel is végrehajtható

$$\int_0^T r(t)\, s_i(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\, s_i(\tau)\, d\tau =$$

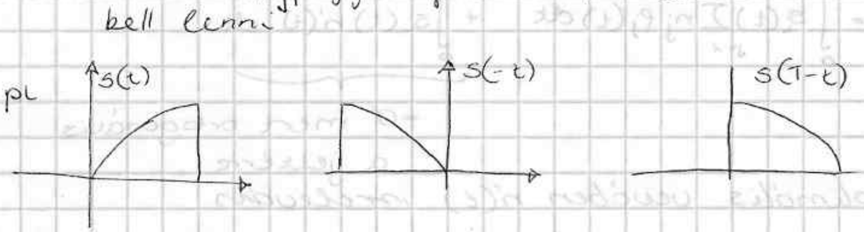
s_i-nek csak 0 és T között van Ø-tól eltérő értéke, végezhetjük az integrálást $-\infty, +\infty$ között

$$= \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\, s_i\left[T - (t-\tau)\right] d\tau \Big|_{t=T} = r(t) * s_i(T-t) \Big|_{t=T}$$

$h(t) = s_i(T-t)$
illesztett szűrő!

kauzális: súlyfüggvénynek $t<Ø$ esetén Ø-nak kell lenni

pl



(43) blokkséma:
átvezetjük a szűrőn, mintát veszünk, előfesz, komparátor

(47) optikai frekvenciasávban
- nincs termikus zaj
- van sörétzaj

(48) 2 Hibavalószínűség

Helyes döntés teljes val.

$$P_C = \sum_{i=1}^{M} P_i \int_{V_i} p_{r|s_i}(r|s_i)\, dV$$

hibavalószínűség: $P_E = 1 - P_C$

(50) hibavalt. csak a jelvektoroktól függ
a konkrét jelalakoktól nem
(=> más kritériumok alapján tervezhetjük)

(51) antipodális jelkészlet
-> P_E közvetlenül számolható

$d = \sqrt{E}$ => a döntési határ és a jel közötti távolság

a gaussi sűrűségfüggvényt kell integrálni $-\infty$-től 0-ig a döntési határig

$$P_E = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r-\sqrt{E})^2}{N_0}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E}{N_0}}$$

$2\pi \frac{N_0}{2}$

$$\mathrm{erfc}\, x \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

(52) QPSK

$$P_E = \mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E}{2N_0}} - \frac{1}{4}\,\mathrm{erfc}^2\sqrt{\frac{E}{2N_0}}$$ -> ez kevéssé számít

$d = \sqrt{E/2}$

$$\boxed{P_E^{QPSK} \approx P_E^{antipod}\left(\frac{E}{2}\right)}$$

=> QPSK-hoz 2x akkora E kell, hogy olyan hibavalt adjon, mint a BPSK

$$\frac{E}{N_0} = \frac{P \cdot T}{N_0} = \underbrace{\frac{P}{N_0/T}}_{\text{zaj telj}}$$ → jel teljesítmény

(53) QAM

3-féle jelvektor → szomszédok számától függ

$$P_E = 2\left(1 - 1/\sqrt{M}\right) \operatorname{erfc} \frac{d}{\sqrt{N_0}}$$

$$d = \frac{\sqrt{E_{peak}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{M}-1\right)}$$ → a sarokban levő energiája

(54) általános bináris jelkészlet

s_1, s_2

bázis függvények: φ_1, φ_2

koordinátarendszer elforgatása $\Psi_2 \parallel s_2 - s_1$

(55) ⇒ a döntés csak Ψ_2-től függ

(56) optimális döntés

$$\hat{s} = s_1 \quad r_{\Psi_2} < \frac{s_2 - s_1}{2}$$

$$\hat{s} = s_2 \quad r_{\Psi_2} > \frac{s_2 - s_1}{2}$$

→ r Ψ_2 koordinátája

(57) d_i^2 szerepe ua. mint E az antipodális esetben

$$P_E = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{d}{\sqrt{N_0}}$$

ha van egy M állapotú jelkészletünk d ismeretében számolhatjuk P_E-t.

(58) korlát M állapotú jelkészletre

a legközelebbi ~~jelközi~~ jelek közötti távolság meghatározó

$$P_E < \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{d_{min}}{\sqrt{N_0}}$$

felső korlát, ha távolabb levő jeleket adnak kisebb lesz

(59) 3. Speciális eset: vivőfrekvenciás jelek

szinuszos jel: 3 paraméter
$v(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega_c t + \phi)$

=> ha ismerjük mindet, akkor ismerjük teljesen

A: AGC-t alkalmaznak minden vevőben

ω_c:

oszcillátor kb. 10^{-5} pontosság
=> kristályvezérelt oszcillátorra van szükség
10^{-6} pontosság
legpontosabbak: Cézium-oszc. 10^{-13}

ϕ: ahhoz, hogy a fázist ismerjük nagyon nagy pontossággal kellene tudni a távolságot → nem megoldható
=> a vevő önmagától nem ismerheti

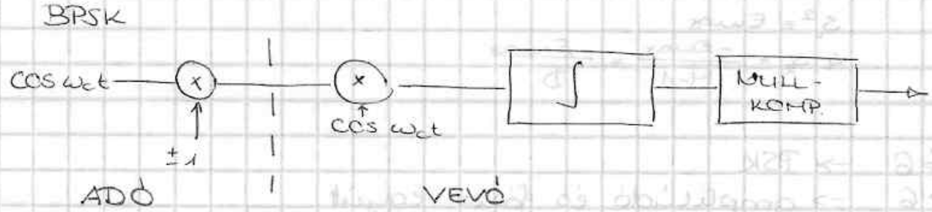
MEGOLDÁS:
ϕ-t átvisszük külön => KOHERENS
vagy val. változónak tekintjük (ált. egyenletes)
=> NEM-KOHERENS

(60) KOHERENS RENDSZER

- a fázist - hasonlóan az időzítéshez - külön visszük át

(61) az opt. detektor egyszerűsíthető

BPSK



(62) QPSK
2x ua cos, sin

(65) Nemkoherens detektálás
- fázis nem hordozhat infót: BPSK, QPSK, QAM nem
- enyhíteni kell a kritériumokat: a vevő egy paraméter híján ismeri a jelalakokat

(67) I_0: elsőfajú módosított Bessel függvény

(70) hibaarány (bináris és ortogonális)

$$P_E = \frac{1}{2} e^{-E/2N_0}$$

(koherensnél valamivel rosszabb, de nem számottevően)

→ viszont a koherenst használjuk inkább, mert ott a fázis is hordozhat infót

(73) 4. A jelkészlet optimalizálása

az összeköttetés minősége csak a vektorelrendezéstől függ → ezt kell optimalizálni

(74) jelek távolsága nagyobb → hibaarány javul
energia növelése → távolabb kerülnek, de ez nem optimalizálás

⇒ kikötés: egy jelnek sem lehet E_{max}-nál nagyobb energiája

(75) D dimenziós gömb belsejében M pont elhelyezése úgy, hogy a távolságuk a lehető legnagyobb legyen (gömbi csomagolási probléma)

(76) variációszámítási probléma
→ megoldás reguláris simplex jelkészlet

$$D = M-1$$
$$s_i^2 = E_{max}$$
$$s_1 \cdot s_2 = \frac{-E_{max}}{M-1} = \frac{-E_{max}}{D}$$

(77) $M \leq 6$ → PSK
$M > 6$ → amplitúdó és fázis együtt

(79) 5. Sávelfoglalás

véges tartójú jel F-transzformáltja végtelen
⇒ elméletileg elfoglalt frekvenciasáv végtelen

<u>DE</u> az energia nagy része egy véges sávba esik

(80) A gyakorlatilag elfoglalt sáv arányos a dimenziószámmal

⇒ 2D (ha még több lenne többet foglalna el, 1D viszont nagyon rossz)

(81) T növelése → nem az igazi
inkább szimbólumok – n bit összefogása.

$M = 2^n$ $T_S = nT$

ha közben D nem nő $W_n = W_1 / n$

Viszont így M jelet kell megkülönböztetni
=> nagyobb teljesítmény kell

(82) ! A Hírközlés2-ben hiányzik a négyzet
$$\frac{P_n}{P_1} = \frac{2(2^{n/2} - 1)^2}{n}$$

(83) Az elfoglalt fr. sáv csökkenthető:
n bit összefogásával
2D moduláció

DE a jel-energiát exponenciálisan, a teljesítményt közel exponenciálisan kell növelni

optimum 4QAM (QPSK)
frekvenciasáv felére csökken, teljesítmény azonos marad
(2 négyzet itt is hiányzik)

(85) Optikai frekvenciasáv
- nincs termikus zaj
- van sörétzaj

(86) módosítani kell a modellt

szinte mindig intenzitásmodulációt használnak (beki)
optikai háttérzaj (napsugárzás)
fotodetektor után már elektromos jel
→ elektromos erősítőnek is van zaja

2009. március 19.

(1.) $M=2$ $D=?$ $f_?$ $\varphi_i(t)$ FSK

$$s_1(t)=\sqrt{2}A\cos\omega_c t$$

$$s_2(t)=\sqrt{2}A\cos\left(\omega_c t+\frac{2\pi}{T}t\right)$$

körfrekvencia löket

ortogonálisak-e?

Gram-Schmidt

$$\varphi_1(t)=\frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \qquad \int_0^T\left[s_1(t)\right]^2 dt=2A^2\int_0^T\cos^2\omega_c t\, dt=$$

$$=2A^2\int_0^T\frac{1}{2}\left(1+2\cos 2\omega_c t\right)dt=\frac{2A^2}{2}\left[t+\frac{1}{2\omega_c}\sin 2\omega_c t\right]_0^T=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2A^2T+\frac{\sin 2\omega_c T}{2\omega_c T}\cdot 2A^2T\right]=E_1$$

$$A^2T\left(1+\frac{\sin 2\omega_c T}{2\omega_c T}\right)$$

$$\varphi_1(t)=\frac{\sqrt{2}A\cos\omega_c t}{A\sqrt{T}\sqrt{1+\frac{\sin 2\omega_c T}{2\omega_c T}}}$$

$f_B \triangleq \frac{1}{T}$ bitfrekvencia

$$\sqrt{E_1}=A\sqrt{T}\sqrt{1+\frac{\sin 2\frac{2\pi f_c}{f_B}}{2\frac{2\pi f_c}{f_B}}}$$

$f_c=80$ GHz $\qquad f_c=1800$ Hz

$f_B=1$ Gbit/s $\qquad f_B=1200$ bit/s

$$\varphi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega_c t$$

$$h_2(t)\triangleq s_2(t)-a_{21}\varphi_1(t)$$

$$a_{21}=\int_0^T s_2(t)\varphi_1(t)\,dt=\int_0^T\sqrt{2}A\cos\left(\omega_c t+\frac{2\pi t}{T}\right)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega_c t\,dt$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$\int_0^T \frac{1}{2} \overset{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} \frac{A}{\sqrt{T}} \cos\left(\underbrace{2\omega_c t + \frac{2\pi}{T}t}_{\approx 0}\right) dt + \int_0^T \frac{1}{2} 2 \frac{A}{\sqrt{T}} \cos\frac{2\pi t}{T} dt$$

$$\frac{A}{\sqrt{T}}\left[\frac{\sin 2\pi t/T}{2\pi/T}\right]_0^T = 0$$

$$h_2 \approx s_2(t) - \underbrace{a_{21}}_{\approx \emptyset} \varphi_1(t) = s_2(t)$$

→ a két jel ortogonális egymásra

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\omega_c t + \frac{2\pi t}{T}\right)$$

(2) Általános FSK

$s_1(t) = \sqrt{2} A \cos \omega_1 t$ $\qquad \varphi_1 = ?$

$s_2(t) = \sqrt{2} A \cos \omega_2 t$ $\qquad \varphi_2 = ?$

$\qquad D = ?$

$$\omega_1 - \omega_2 \triangleq d\omega$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_1 t$$

$$a_{21} = \frac{A}{\sqrt{T}} \frac{\sin d\omega T}{d\omega T}$$

$$h_2(t) = \sqrt{2} A \cos \omega_2 t - \frac{A}{\sqrt{T}} \frac{2}{\sqrt{T}} \frac{\sin d\omega T}{d\omega T} \cos \omega_1 t$$

$$\int [h_2(t)]^2 = A^2 T$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\left[\cos \omega_2 t - \frac{\sin d\omega T}{d\omega T} \cos \omega_1 t\right]$$

antipodális jel: a két jel egymás −1szerese (FSK nem!)

(87) b(t) háttérzaj eredete
- tényleges háttér pl. napsütés
- fotodetektor sötétáram
- modulátor nem tökéletes kioltása (on-off)

fotodetektor: belépő fotonok hatására elektronok lépnek ki

Planck formula -> termikus zaj nagyon kicsi

(88) fotodiódák
PIN dióda: a poz. és neg szennyezésű réteg között van egy szennyeződés nélküli
1 foton -> 1 elektron (nem biztos hatásfok tényező)
APD dióda: 1 foton -> 1 elektron
szekunder elektronok, lavina hatás

(89) PIN: $\bar{n}_{el} = \eta_q \bar{n}_{fot}$

$\bar{n}_{el}$: elektronok átlagos száma
η_q: hatásfok

$$\Rightarrow \frac{Q}{e} = \frac{\eta_q \overline{E}}{hf_c}$$
$\overline{E}$ → átlagos energia
hf_c → foton energiája

$$\frac{I_{det} T}{e} = \frac{\eta_q \overline{P} T}{hf_c} \Rightarrow I_{det} = \frac{\eta_q e}{hf_c} \overline{P}$$

=> a detektált áram az optikai teljesítménnyel arányos

APD: $I_{det} = \frac{\eta_q e}{hf_c} \overline{M} \cdot \overline{P}$
↳ multiplikációs tényező

(90) $s_1(t) = \sqrt{2} A \cos \omega_c t$ $\quad P_1 = A^2 = P_{s1}$
$s_2(t) = 0$ $\quad P_2 = 0$

a fényforrás Poisson eloszlásban ad ki fotonokat, amiből valamennyi eljut a fotodetektorba

Poisson
$$P_r(k) = \frac{m^k \cdot e^{-m}}{k!}$$

m: T idő alatt az átlagos elektronszám

(91) Optimális optikai döntés

- feltételezzük, hogy nincs termikus zaj, csak háttérzaj

H_0 : csak $b(t)$ van P_b

H_1 : jel is van $P_{S1} + P_b (S_1)$

PIN: $m_1 = \eta q \frac{(P_{S1} + P_b)T}{hf_c}$ $\quad m_0 = \eta q \frac{P_b T}{hf_c}$

2 hipotézis

$H_1 : P_r(k) = \frac{m_1^k e^{-m_1}}{k!}$

$H_0 : P_r(k) = \frac{m_0^k e^{-m_0}}{k!}$

(92) likelihood-arány: $\Lambda(k) = \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^k e^{-m_1 + m_0}$

Döntési szabály ha $k > \frac{\ln\eta + m_1 - m_0}{\ln(m_1/m_0)}$: H_1

Precízen:

ha $k = \frac{\ln\eta + m_1 - m_0}{\ln(m_1/m_0)}$: $H_1 Q + H_0 (1-Q)$

$P_r(Q=0) = P_r(Q=1) = 0{,}5$

(93) $\ln\eta = 0$

küszöb $k_k = \frac{\eta q T}{hf_c} \frac{P_{S1}}{\ln\left(1 + \frac{P_{S1}}{P_b}\right)}$

$\Rightarrow$ a küszöb nem csak P_{S1}/P_b-től, hanem P_{S1}-től <u>is</u> függ kellemetlen...

Spec. eset $P_b = 0$ háttérzaj sincs

$P_b = 0 \quad k_k = 0$

vagyis $H_0 : k = 0 \quad H_1 : k \geq 1$

$\Rightarrow$ ha már egy elektront vettünk H_1 javára döntünk, mert az csak a forrásból jöhet

legalább az egyik esetben jól döntünk

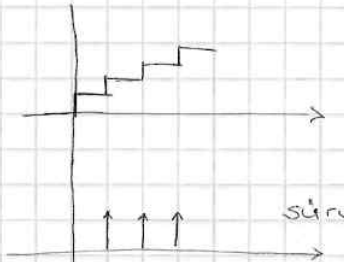
(95) Ha termikus zaj is van: fotodetektor után

zaj: Poisson + Gauss (diszkrét + folytonos)

$$n(t) = \underbrace{N(t)}_{\text{term.}} + \underbrace{n(t)}_{\text{sörét}} + \underbrace{s(t)}_{\text{jel}}$$

(96) $x(t) = \frac{k e R_L}{T}$ $\quad m = \frac{P T \eta q}{h f_c}$

diszkrét fv. eloszlásf.



H_0 és H_1 csak m_i-ben kül

$$p_x(x) = p(x, m_i) = \sum_{x_i=0}^{\infty} Pr(x_i)\,\delta(x - x_k^{(i)}) \quad i = 0, 1$$

(97) összeg sűrűsége: konvolúcióval

Hirkelm2: 100. diától már nem kell!

Hirkelm3_hp

3 DIGITÁLIS JELEK ÁTVITELE ANALÓG CSATORNÁN: TORZÍTÁSMENTES ÁTVITEL, LINEÁRIS TORZÍTÁS-DISZPERZIÓ HATÁSA

(3) eddig egyedülálló jelek átvitel -> valóságban jelsorozat
ISI

(4) Lineáris csatorna
ISI mentes átvitel feltétele -> torzításmentes

(6) egyelőre csak az eredő átviteli csatornát vizsgáljuk

modell

FORRÁS
Imp. gen: dirac delták
átv. csat: legalább szűrő; adó-, fr. szelektív, vevő
döntő -> időzítés
nyelő

ha csat nem ideális: szelektív fadinges

(7) Időnként új üzenet

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT) \quad a_k \pm 1$$

$z(t)$: imp. gen. bejövő jele

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT) * c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k c(t-kT)$$

$c(t)$: szűrő súlyfüggvénye

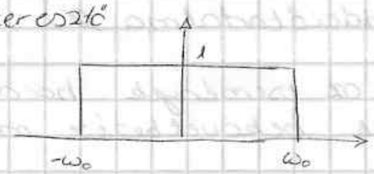
a szomszédos bitek nem zavarják egymást, ha a döntés pillanatában csak az aktuális bit válasza nem $\emptyset$

(8) az a_k sorozat bármilyen lehet, így a súlyfv.-nek kell megfelelőnek lennie

$\forall k$-ra $c(-kT) = 0$ ha $k \neq 0$

legegyszerűbb: id. aluláteresztő

$$c(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$$



(10) problémák (id. alul áteresztő)

1. nem kauzális (súlyfüggvénye nem $\emptyset$ negatív időkre
nem baj: késleltetés
2. szakadásos átv. függv. → nem realizálható
approximálható
3. jitter: ha $kT + C$

(12) Megoldás: lekerekítés
ha az ideális Nyquist-szűrőt szimmetrikusan kerekítjük le, a $\emptyset$ helyek ott maradnak, de a sor tagjai k magasabb hatványa szerint csökkennek ⇒ konvergens

(13) Nyquist krit. általánosan

2009. március 26.

Bitó — Információelméleti alapok

Információ

X diszkrét val. vált.; véges elemszámú realizációi x_i események

$p(x_i) = Pr\{X = x_i\}$

Def: $\boxed{I(x_i) \triangleq \log_a \frac{1}{p(x_i)}} = -\log_a p(x_i)$

információtartalom

ha $a=2$ az információ egysége egy bit

(postás véletlenül bedobja a Story magazint biztosan nem olvasom el -> valószínűsége 1 -> információtartalma $\varnothing$)

=> azok az események hordoznak sok infót, amelyek bekövetkezése meglepő, valószínűsége kicsi

! átlagos információtartalom => <u>entrópia</u>

Def $\boxed{H(X) \triangleq E_X\{I(x_i)\}} = \sum_{x_i \in X} p(x_i)\, I(x_i) = \sum_{x_i} p(x_i) \,\mathrm{ld} \frac{1}{p(x_i)}$

$\mathrm{ld} = \log_2$

összes eseményre a bekövetkezési valószínűséggel súlyozott információtartalom

Tétel:

$\varnothing \leq H(X) \leq \log n$ — n: az X számossága (lehetséges realizációk száma)

Tf: $H(X) = \log n$

$H(X) - \log n = \varnothing$

$H(X) - \underbrace{\sum_{x_i} p(x_i)}_{1} \log n = \varnothing$

= teljes valószínűséget lefedi

$\sum_{x_i} p(x_i) \log \frac{1}{p(x_i)} - \sum_{x_i} p(x_i) \log n = \varnothing$

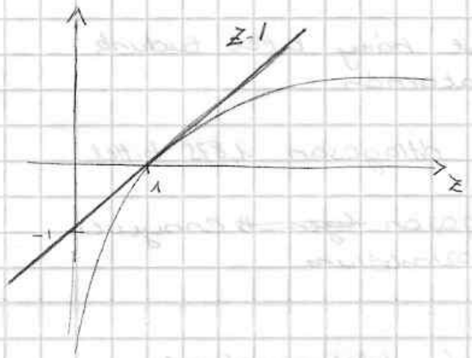
$\sum_{x_i} p(x_i) \underbrace{\left[\log \frac{1}{p(x_i)} - \log n\right]}_{\log \frac{1}{p(x_i)\, n}}$

$$\sum_{x_i} p(x_i)\log\frac{1}{p(x_i)n} = 0$$

$$\log_2 z = \frac{\ln z}{\ln 2}$$

$$\sum_{x_i} p(x_i)\,\frac{\ln\frac{1}{p(x_i)n}}{\ln 2} = 0$$

$$\frac{1}{\ln 2}\sum_{x_i} p(x_i)\ln\frac{1}{p(x_i)n} = 0$$



$$\ln z \le z-1$$

$$z = \frac{1}{p(x_i)n}$$

$$\frac{1}{\ln 2}\sum_{x_i} p(x_i)\ln\frac{1}{p(x_i)n} \le \frac{1}{\ln 2}\sum_{x_i} p(x_i)\Big[\overbrace{\frac{1}{p(x_i)n}-1}^{z-1}\Big]$$

$$\frac{1}{\ln 2}\underbrace{\Big(\overbrace{\sum_{x_i}\frac{1}{n}}^{1}-\overbrace{\sum_{x_i}p(x_i)}^{1}\Big)}_{0}$$

egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$z = 1 = \frac{1}{p(x_i)n} \Rightarrow p(x_i) = \frac{1}{n}$$

=> a forrás átlagos információtartalma ~~a leo~~ akkor a legnagyobb, ha $p(x_i) = \frac{1}{n}$, vagyis minden esemény bekövetkezésének valószínűsége azonos !

a forráskódolás nem jó, ha az egyik szimbólum valószínűsége nagyobb

forrás eloszlásának valószínűsége a-priori

–

2 PÉLDA:

forrás 5 lehetséges esemény

$Pr(X=a)=\frac{1}{2}$; $Pr(X=b)=\frac{1}{4}$; $Pr(X=c)=\frac{1}{8}$; $Pr(X=d)=Pr(X=e)=\frac{1}{16}$

=> leírja a teljes val. teret

forrás entrópiája

$$H(X) = 1{,}875 = \sum_X p(x_i)\,\mathrm{ld}\frac{1}{p(x_i)} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + 2\cdot\frac{1}{16}\cdot 4$$

entrópia mértékegysége (bináris esetben)
bit/channel use
egy eseményt hány bittel tudunk átvinni a csatornán

=> példában: egy eseményt átlagosan 1,875 bittel tudunk leírni
-> forráskódolás: átlagosan ~~legen~~ ennyivel írható le egy szimbólum

Shannon-tétel
(egy korlátot ad egy forrás kódszavainak átlagos hosszára)

p: diszk. valv.
f: folyt valv.

<u>I. tétel - forráskódolási tétel</u> $p(x_i);\ x_i \in X$

$$H(X) \le L(x) < H(x)+1$$

↓
átlagos kódszó hossz

$$\mathrm{ld}\frac{1}{p(x_i)} \le l(x_i) \le \mathrm{ld}\frac{1}{p(x_i)} + 1$$

↓ átlagolva

$$\sum_{x_i} p(x_i)\,\mathrm{ld}\frac{1}{p(x_i)} \le p(x_i)\,l(x_i) \le \sum_{x_i} p(x_i)\,\mathrm{ld}\frac{1}{p_{x_i}} + 1$$

Ha egy val. vált. eloszlása nem ismert, csak becsüljük

$p(X)$ $q(X)$ becslés

relatív entrópia - Kullback-Leibler távolság

$$D(p\,\|\,q) \triangleq \sum_{x\in X} p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} = E_x\left\{\lg\frac{p(x)}{q(x)}\right\}$$

↳ megmutatja, hogy mennyire volt jó a becslésünk több bitre lesz szükség, mert csak becsültük

$$H(x)+D(p\|q) \leq L(x) \leq H(x)+D(p\|q)+1$$

$$D(p\|q) \neq D(q\|p)$$

$p(x_1)=\frac{1}{2}$ $p(x_2)=\frac{1}{4}$ $p(x_3)=p(x_4)=\frac{1}{8}$ $H(x)=1{,}75$

$q(x_1)=\frac{1}{2}$ $q(x_2)=\frac{1}{8}$ $q(x_3)=\frac{1}{4}$ $q(x_4)=\frac{1}{8}$

$$D(p\|q)=0+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\varnothing=\frac{1}{8}$$

<u>Feltételes entrópia</u> $p_x(x)=P_r(X=x)$

$p_y(y)=P_r(Y=y)$

$$H(Y|X) \triangleq E\{I(y|x)\} = \cancel{E\left\{\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} p(x)p(y)(y|x)\log\frac{1}{p(y|x)}\right\}}$$

$$=\sum_x\sum_y p(x)p(y|x)\log\frac{1}{p(y|x)}$$

Több val. vált. <u>együttes entrópiája</u>

$(X_1, X_2, X_3 \ldots X_n)$

$$H(X_1,X_2,X_3\ldots X_n) = -\sum_{x_1,x_2\ldots x_n} p(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot\log\left(p(x_1,x_2,\ldots x_n)\right)$$

<u>Sztoch. foly. entrópiája</u>

$\{X_i\}$ $H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} H(x_1,x_2\ldots X_n)$

sztoch. foly.

Def: <u>kölcsönös információ</u> x_i és y_i

$$I(x_i ; y_i) \hat{=} \log \frac{p(x_i|y_i)}{p(x_i)} = \log \frac{p(y_i|x_i)}{p(y_i)}$$

független események kölcsönös információtartalma $\varnothing$

def: <u>átlagos kölcsönös információ</u>

$$I(X,Y) = \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} = \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

$$D\big(p(x,y) \| p(x)p(y)\big)$$

$$H(x|y) = \underbrace{H(x)} - \underbrace{I(X,Y)}$$

→ vevőkészülék

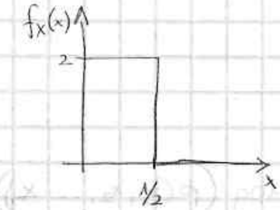
ha nem lenne
vevőnk csak ez lenne
(megpróbáljuk kitalálni)

ha $x = y$ $\quad I(x,y) = H(x)$

Negatív entrópia

folyt X $\quad f_x(x)$

$$H(x) = -E_x \{\log f_x(x)\} = -\int_x f_x(x) \log f_x(x)\, dx$$



$$\Rightarrow H(x) = -1$$

$$I(X,Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y) \cdot \log \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x) f_y(y)}$$

2009. április 2.

PÉLDA

$f_B = 100$ Mb/s jel, rendelkezésre álló fr. sáv: 14 MHz

$f_C = 8000$ MHz → vivőfrekvencia

Milyen modulációt?
Mekkora vett teljesítmény kell $P_E = 10^{-6}$ -hoz, nincs hibajavító kódolás

$E/N_{0\,BPSK} = 10{,}5$ dB

⇒ a szimbólumidő reciprokának kell 14 MHz-nél kisebbnek lennie

$f_S = \frac{f_B}{n} \qquad n \geq \frac{f_B}{f_S} = 7{,}14 \to 8$

$M = 2^8 = 256 \Rightarrow \underline{\underline{256\ QAM}} \Rightarrow B = 12{,}5\ MHz = \frac{100}{8}$

$N_0 = k_B T_0 \qquad k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-25}$ W/Hz K

$N = k_B T_0 B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 12{,}5 \cdot 10^6$

$T_0 = 290$ K

$k_B \cdot T_0 = -204$ dBW/Hz $= -\frac{114\ dBm}{MHz}$

$E/N_0 = \frac{P}{N_0 \frac{1}{f_S}}$

szimbólumidő
12,5 MHz

$\frac{P}{N} = 10{,}5$ dB

$10 \cdot \log 12{,}5$

Ha BPSK volna: $P = -101\ dBm + 10{,}5\ dB = -90{,}5\ dBm$

$F = 2$ dB

$\frac{P_n}{P_1} = \frac{2(2^{n/2}-1)^2}{n} = 17{,}5$ dB

$n = 8$

$P_8 = -90{,}5 + 17{,}5 = -73$ dBm csúcsteljesítmény (küszöbérték)

↓

ekkora bemenő telj. mellett kapjuk meg a min. hibavalt.

(14) Nyquist - kritérium bizonyítása

(19) általános alapsávi $b(t)$

edáig Dirac - delta : $1/2T$ sávszélesség elég, ha ismerjük a pontos időzítés
zaj esetén van gond

jelgenerátor : impulzusgen. $(\delta(t))$ + szűrő $(B(\omega))$

(20) Pl : NRZ

$b(t)$

$$B(\omega) = \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}$$

$$C'(\omega) = \frac{\omega T/2}{\sin \omega T/2} C(\omega)$$

(21) $M > 2$ $\Rightarrow$ ugyanaz a szűrő jó
de érzékenyebb az időzítési hibára

(22) ASK

(24) A zajt is figyelembe vesszük.

hogy kell megosztani az adó és vevő között a csatorna átviteli fv-ét

$C'(\omega) = A(\omega) H^*(\omega)$ A: adó H: vevőszűrő

$C(\omega) = B(\omega) A(\omega) H(\omega)$

illesztett szűrős megvalósítás

$h(t) = s(T-t) \Rightarrow H(\omega) = S^*(\omega) e^{j\omega T}$

$C'(\omega) = |S(\omega)|^2 e^{j\omega T}$

$S(\omega) = B(\omega) A(\omega)$

$\Rightarrow |H(\omega)| = \sqrt{|C(\omega)|}$

$$|A(\omega)| = \frac{\sqrt{|C(\omega)|}}{|B(\omega)|}$$

$C(\omega)$ lineáris fázisú

$\Rightarrow$ késleltetési ideje állandó

(25) Zaj és lineáris torzítás együttes hatása

τ: késleltetés a csatornán
a vevőnél és a küldőnél nem egyezik, de azért hasonló

$\Rightarrow$ beleszól az előző és követő bitekbe is
(átlagosan romlik a hibavalószínűség)

(~~Ha a kt.~~) kauzalitás rendben van, a csat. késleltetése miatt.

Zh: uott akkor a múltkor
BITÓ nem!!
hírkelm2 33. diától – (a vége amit nem vettünk nem kell)
mai végig!
(a tételek a 4. diasor végén vannak!)

(26)

$y_1(t) = z(t) * a(t)$ $z(t)$ átvitele az adószűrőn

$y(t) = y_1(t) * h(t)$ $z(t)$ átment az adó és vevőszűrőn is

áthallás van a komplex burkoló képzetes része nem Ø.

(28) hasznos jel: $s = a_0 R_0 + j q_0 R_0$

átlapolódás $g = \sum_k' (a_k + j q_k)(R_k + j I_k)$

R_0-t kihagyjuk

P_c: helyes döntés valószínűsége

val. vált. karakterisztikus fv.

val. vált. x

kar. fv: $U_x(u) \hat{=} E[e^{jux}]$

$$U_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} p_x(x)\, dx \; \Big(= \underbrace{F[p_x(x)]}_{\text{Fourier trafó}}\Big)$$

ha ismerjük a kar fv-t.

$$p_x(x) = F^{-1}[U_x(u)]$$

ha x véletlenül független val. vált.-ok összege

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$U_x(u) = E\left(e^{jxu}\right) = E\left[\exp\left(ju \sum x_i\right)\right] = E \prod_{i=1}^{n} e^{jux_i} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{jux_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} U_{x_i}(u)$$

36. diáig kell csak!

Hirkelm 4.

A legfontosabb átviteli közegek tulajdonságai: a rádió, az optikai szál

(3) Rádiós közeg
- szerteágazó terület
- elektromágneses tér
- speciális din. torzítások, spec. tulajdonságok

(4) Adó - vevő D távolságra

$$q_b \triangleq \frac{P_{adó}}{P_{vett}} = \frac{(4\pi D)^2}{\lambda^2 G_a G_v}$$

$$G = \frac{A_{eff} \cdot 4\pi}{\lambda^2}$$

(5) adó és vevő között:
- reflexió, diffrakció, szórás
- abszorpció

hatások:
i. az átlagos P a D-nek nagyobb hatványa szerint csökken
ii. véletlenszerűen változik (fading)
iii. a fading lineáris torzítást is okozhat
iv. időbeli változás → Doppler jelenség

nyílt: más felhaszn. jelét is veszik: interferencia/zavar

(6) konkrét tul. környezettől és frekvenciasávtól függ

(7) mobil rádió közeg
többutas terjedés

2009. április 16.

(52) Diverziti rendszerek
- térdiverziti
- frekvencia
- polarizáció

(53) kapcsolás v. választás
max teljesítményű kombinálás
max arányú

(56) 2L szabadságfokú khi-négyzet eloszlás

(58) Adódiverziti (kieg. ppt)
- ha nem fér el 2 antenna - 2 vevő
=> tegyük az adóba a kétszerezést
- szét kell választani a jeleket
Space-Time coding ; vevőt dekódolóval kell kiegészíteni

(59) Alamouti kódolás
MISO = Multiple Input Single Output
tetszőleges 2D moduláció
2-szimbólumnyi blokkokat kódolunk

(60) $s = (s^1, s^2, s^3, s^4 \ldots)$

blokk $\underline{s} = (s^1 \; s^2)$

$$C \hat{=} \begin{array}{c} \text{időrés} \\ \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_1^2 \\ C_{(2)}^1 & C_2^2 \end{pmatrix} \\ \text{antenna} \end{array} = \begin{pmatrix} s^1 & -s^{2*} \\ s^2 & s^{1*} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to 1.\text{ antenna} \\ \to 2.\text{ antenna} \end{array}$$

1. időrés 2. időrés

(61) átmegy a csatornán

$$\underline{H} = (h_1 \; h_2)$$

$$\underline{r} = HC + n = \left(\alpha_1 e^{j\varphi_1} \;\; \alpha_2 e^{j\varphi_2}\right)\begin{pmatrix} s^1 & -s^{2*} \\ s^2 & s^{1*} \end{pmatrix} + (n_1 \;\; n_2)$$

dekódolás

$$S_{dek} = rD = (r_1 \;\; r_2)\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-j\varphi_1} & \alpha_2 e^{-j\varphi_2} \\ \alpha_2 e^{j\varphi_2} & -\alpha_1 e^{j\varphi_1} \end{pmatrix}$$

feltételezzük, hogy egy blokk alatt (2 szimb.) állandó a csatorna.

jelösszetevőre:
$$S_{dec} = \left((\alpha_1^2 + \alpha_2^2)s^1 \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)s^2\right)$$

(62) ugyanaz mint amit SIMO-nál kapunk
az így kódolt jelet vehetjük több antennával
a kódoláshoz nem kell több sávszélesség
(redundancia a térben)

(63) meseóra:
- új tudomány kialakulás
-

(64) az egyes utak korrelálatlanok (kül. kevésbé hatékony)
mobilban két antenna távolsága $> \lambda/2$, akkor
már korrelálatlan

(66) frekvenciában és időben lapos fading
65 kimarad => időben változó csillapítás

frekvenciában szelektív, időben lapos lin. torzítás

frekvenciában lapos, időben szelektív => időben
gyorsan változik, de a csat. koh. sávszélessége
nagyobb, mint a jeleinké
=> a vett jel nem lesz állandó
multiplikatív zaj

frekvenciában és időben szelektív: lin. torzítás +
multiplikatív zaj

(67) multiplikatív zaj → lin. torzítás

$W < B_c$ $T_s > T_c$ $\tilde{x}(t)$ ...

(68) szelektív fading → torzítás
de előnyös is lehet

időben lapos $T_s \ll T_c$ T_c: csat. koherencia sáv
frekv. is lapos $1/T_s \ll B_c$
jelalak $W \gg B_c$

↳ kiterjesztett spektrumú rendszerek

(69) spektrum kiterjesztő kód

(70) komplex burkoló szélessávú, de sávkorlátozott

(77) RAKE-detektor (gereblye)

(81) OPTIKAI KÖZEG
- nagyon szélessávú
- veszteség
lin. torzítás
nem lin. hatások
polarizáció függés

42.

(83) β: fázistényező
→ frekvenciafüggő

(85) ha β lin. függ a frekvenciától
→ a jel torzítatlanul terjed, csoportsebességgel

(86) lin. frekv. függés
- torzítatlan terjedés
- jelalak sebessége v_g
- fázis sebessége v_p
- az interferencia jelalakja is torzítatlan

(87) Ha β magasabb tagjai $\neq 0$
⇒ diszperzió
$\beta_2 > 0$ normális diszp.
$\beta_2 < 0$ anomális diszp.

(90) kiszélesedés → ISI
diszperzió határt szab a jelsebességnek/szakaszhossznak

(91) chirp !!

(92) nemlineáris hatás: szoliton hullámterjedés

2009. április 23. BITÓ

Információ átvitele kommunikációs csatornán

$$X \longrightarrow \boxed{\text{CSAT}} \xrightarrow{\;Y\;}$$

Y alapján következtetünk X-re.

Csatornakapacitás:
hány bit szükséges ahhoz, hogy a szimbólumokat át tudjuk vinni úgy, hogy a lehető legkisebb hibával tudjunk dönteni

$$C = \max_{p(x)} I(X,Y)$$

átlagos kölcsönös információ:

$$I(X,Y) = I(Y,X) = \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} =$$

$$= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

Feltételes entrópia (a-posteriori entrópia)

$$H(X|Y) \triangleq H(X) - I(X,Y)$$

$$C = \max_{p(x)} \big(H(X) - H(X|Y)\big)$$

mértékegység: bit/csatornahasználat
csatornaszimbólum

$$H(Y|X) = H(Y) - I(X,Y) \Rightarrow C = \max_{p(x)} \big(H(Y) - H(Y|X)\big)$$

Csatornatípusok

1.) DMC: Diszkrétidejű memóriamentes csatorna

$$\text{M db lehetséges forrás} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \xrightarrow{\;p(y_1|x_1)\; p_{11}\;} y_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ x_M \qquad p(y_M|x_1) \quad\; y_M \end{array} \right. \qquad p(y)$$

$p(x)$ átmeneti valószínűség mátrix

HIRKELM
04. 23.

$p(x) \rightarrow \overline{p}_x$

$p(y) \rightarrow \overline{p}_y = \overline{p}_x \cdot \overline{\overline{P}}$

átmeneti usz. mátrix

$$[y_1 \dots y_M] = [x_1 \dots x_M] \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & & P_{M1} \\ & \ddots & \\ P_{1M} & & P_{MM} \end{bmatrix}$$

$\boxed{BSC}$ – Binary Symmetric Channel
(DMC speciális fajtája)

bemenet, kimenet: Ø vagy 1

$$\begin{array}{lll} p(x_1) & \emptyset \xrightarrow{1-p} \emptyset & \\ & \quad\; \times\; p & \\ p(x_2) & 1 \xrightarrow[1-p]{} 1 & \end{array}$$

$P(y_1|x_2) = p(y_2|x_1)$
a csatorna hibavalószínűsége

mennyi a csatornakapacitás?

$$C = \max_{p(x)} \left(H(y) - H(y|x) \right)$$

$H(y) = ?$

$$p(y_1) = p(x_1)(1-p) + p(x_2)\,p$$

$$p(y_2) = p(x_1)p + p(x_2)(1-p)$$

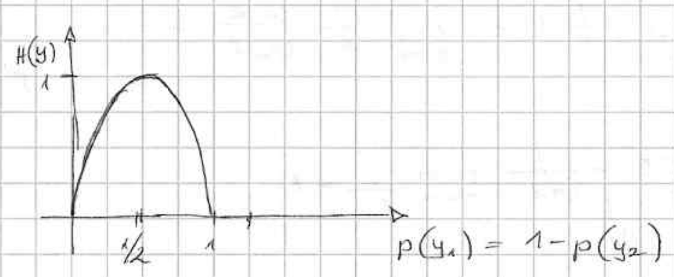
entrópia:

$$E\{s(x)\} = \sum_x p(x) \log \frac{1}{p(x)}$$

$$H(y) = p(y_1) \log \frac{1}{p(y_1)} + p(y_2) \log \frac{1}{p(y_2)}$$

$H(y)$ maximális, ha $p(y_1) = p(y_2) = 1/2$

$$\frac{1}{2} \operatorname{ld} 2 + \frac{1}{2} \operatorname{ld} 2 = \underline{1}$$



$P(y_1) = P(x_1)(1-p) + P(x_2)\cdot p = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(y_1) = P(y_2) = \frac{1}{2}$ ha $p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2}$

$$H(y|x) = \sum_x P(x)\, H(y|x) = \sum_x p(x) \sum_y p(y|x) \log \frac{1}{p(y|x)} =$$

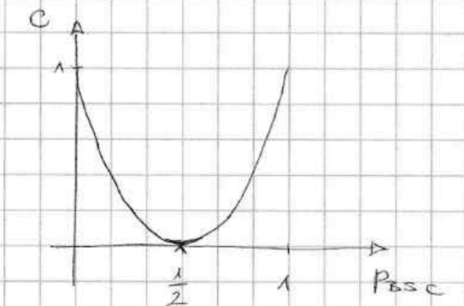
$$= p(x_1)\Big[\underbrace{\underset{p(y_1|x_1)}{(1-p)} \log \frac{1}{1-p} + \underset{p(y_2|x_1)}{p} \log \frac{1}{p}}_{y \text{ szummázása}}\Big] +$$

$$+ p(x_2)\Big[\underset{p(y_1|x_2)}{p} \cdot \log \frac{1}{p} + \underset{p(y_2|x_2)}{(1-p)} \log \frac{1}{1-p}\Big] = \underbrace{\big(p(x_1) + p(x_2)\big)}_{1}\Big[p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}\Big]$$

$\Rightarrow$ a feltételes entrópia független a forrás eloszlásától

keressük azt a p értéket ahol a kifejezés minimális ~~($\Rightarrow p = \frac{1}{2}$-nél adódik)~~

ha $p = \frac{1}{2}$ $\quad H(y|x) = \underline{1}$ $\quad \Rightarrow$ ekkor a csatornakapacitás $\emptyset$



$$\lim_{p \to \emptyset} \Big[\underbrace{(1-p)\, \mathrm{ld} \frac{1}{1-p}}_{\emptyset} + p\, \mathrm{ld} \frac{1}{p}\Big]$$

ezzel gond van

$\lim_{p \to 1}$ ugyanez a gond

$$\lim_{p \to \emptyset} p\, \mathrm{ld} \frac{1}{p} \underset{z = \frac{1}{p}}{=} \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z}\, \mathrm{ld}\, z = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} \frac{\ln z}{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \lim_{z \to \infty} \frac{\ln z}{z} \underset{L'H}{=} \frac{1}{\ln 2} \lim_{z \to \infty} \frac{\frac{1}{z}}{1} = \emptyset$$

ha $p=\varnothing$ 1 bitet tud átvinni egy csatornahasználattal
$p=1/2$ $\varnothing$
$p=1$ 1 bitet ...

Mi lesz a zh-ban?
- Frigyes anyaga (2 ea)
- Példa Bitó részből, a múltkori óra is kell + mai (2 ea)

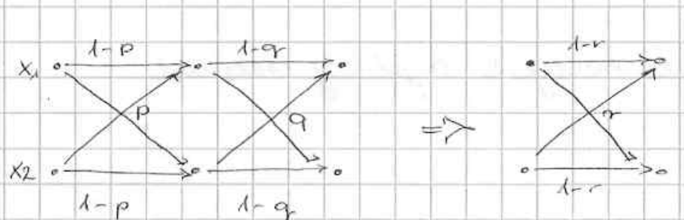
4. zh: következő zh-n döntünk vagy nem?

PÉLDA: 2 BSC

$p(x)$ forrás

2 db BSC p, q hibavalószínűséggel

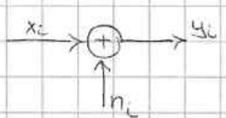
mennyivel növeli meg az entrópiát?



helyettesítő BSC

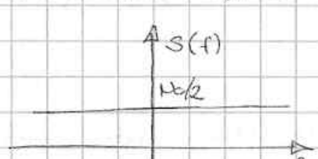
$r = (1-p)q + p(1-q)$ marad bináris szimm.
$\Rightarrow$ nem növeli meg az entrópiát

AWGN



$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_n^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{n^2}{\sigma_n^2}\right]$$

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$$



$$N_0 = \frac{hf}{\exp\left[\frac{hf}{kT_0}\right] - 1}$$

$$I(X;Y) = H(X+N) - \underbrace{H(Y/X)}_{H(N)}$$

$$y_i = x_i + n_i$$

$$H(N) = \int p(n) \cdot ld \frac{1}{p(n)}\, dn = \cancel{exp}\ \frac{1}{2} \log\left(2\pi e \sigma_n^2\right)$$

ha a forrásszimbólumok is gaussi -> a kapacitás is max.

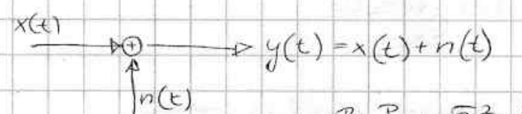
$$C = \frac{1}{2} \log\left(2\pi e\left(P + \sigma_n^2\right)\right) - H(N) = (*)$$

a forrás átlagteljesítménye P, akkor max, ha gaussi σ_p^2 $P = \sigma_p^2$

$$(*) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi e\left(P+\sigma_n^2\right)}{2\pi e \sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P}{\sigma_n^2}\right)$$

=> C növelhető, ha növeljük a jel-zaj viszonyt

folytonos idejű eset



B, P, $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \cdot B$

$$C = B\ ld\left(1 + \frac{P}{B N_0}\right) \qquad T_M = \frac{1}{2B}$$

negatív entrópia nem kell

ha növeljük az SNR-t
- -> torzítás miatti ISI
- -> energia pazarlás
- -> másokat zavar!

=> nem ez a megoldás!

=> $\boxed{\text{Shannon 2. tétel}}$ = csatornakódolás tétele, kapacitás t.

$H(X)$, C

ha $H(X) \leq C$ akkor létezik $X' = \Omega(X)$ úgy, hogy tetszőlegesen kis hibával viszed át az információt

Forrás

$K \Rightarrow N$ K hosszúsági csomaghoz N db bitet rendel

$K < N$

K: információs bit
N: kódbit

$K \Rightarrow N \quad p \to 0 \quad \lim_{K\to\infty} K/N < C$

K/N: kódarány

2009. április 30.

Zh csütörtökön; szerdán ea. (5-től, ahol a zh lenne)

Shannon 2. tétel

K elemű forrásblokkot N elemű blokká bővítve tetszőlegesen kis hibával lehet átvinni, ha

$\frac{K}{N} < C \qquad K \to \infty$

$\Omega(x) \Rightarrow x'$ létezik egy
$x = \Omega^{-1}(x')$ ilyen kódolási szabály

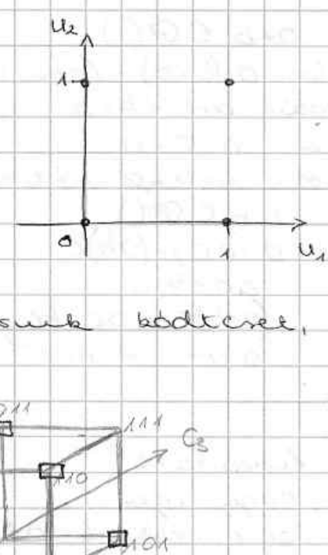
$C = \max_{p(x)} I(x, y)$

Példa:

q: forrásszimbólum állapotszáma
$q = 2$
$K = 2$ üzenethossz
$N = 3$

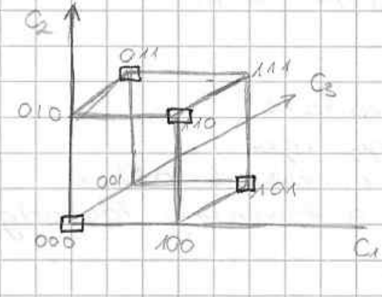
$$\underline{u}_k = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}\right. & \left.\right] \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$$

4 db lehetséges üzenet



üzenetvektortér

→ alkossunk kódteret, ez már 3D



$\bar{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3]$

Kérdés: mi a kódolási szabály (Ω)
⇒ a kódterek nem mindegyik eleme kell

üzenetek száma: $M = q^k$
lehetséges kódok száma: q^N

Cél: a kódszavak a lehető legjobban különbözzenek egymástól
⇒ Hamming távolság: két kód között az eltérő szimbólumok száma

→ bijelöljük a 4 kódvektort
→ összerendelési szabály megalkotása

De ~~p~~ inkább azt szeretjük, ha a kód SZISZTEMATIKUS
→ a kódvektor eleje vagy vége megegyezik az üzenetvektorral

sokféle csatornakódolás
- blokk kódok
- konvolúciós (Trellis)
- folytonos fázisú

Lineáris blokk kód

- lineáris ha a kódszavak által alkotott tér lineáris alteret képez, egy lineáris kód-térben
  ⇒ az aritmetikai műveletekre zárt

Gallois-testek (GF)

GF(p) p: prímszám v. prímszám hatvány

$a, b \in GF(\,)$

teljesülnie kell:
- összeadásra zárt $a+b \in GF(\,)$
- asszociatív $a+(b+c) = (a+b)+c$
- kommutatív $a+b = b+a$
- ∃ nullelem $a+\emptyset = a$
- additív inverz $a+b = \emptyset \Rightarrow b = -a$
- szorzásra zárt $a \cdot b \in GF(\,)$
  asszociatív $a(b \cdot c) = (ab)c$
  $ab = b \cdot a$
  $(a+b)c = ac + bc$
  mult. inv. $a \cdot b = 1 \Rightarrow b = a^{-1}$
  egységelem

kérdés: a kiválasztott altér lineáris-e?
meg lehet vizsgálni, hogy igen
de: pl. ha a másik négyet vesszük, akkor az nem lineáris (bár a Hamming távolság ott is kettő)

a lineáris altérben vannak ~~két~~ bázisok
-> ezek lineáris kombinációival előállítható
a többi kódszó

pl: 011 és 101

üz. vek.

$$[0\ 0]\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = [0\ 0\ 0] \quad \checkmark$$

$$[0\ 1]\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = [1\ 0\ 1] \quad \checkmark$$

$$[1\ 0]\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = [0\ 1\ 1] \quad \checkmark$$

$$[1\ 1]\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = [1\ 1\ 0] \quad \checkmark$$

$$\bar{C} = \bar{u} \cdot \bar{\bar{G}}$$
-> generátormátrix

DE: nem szisztematikus!

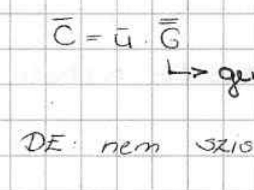
$$\bar{\bar{G}} = \left[\bar{\bar{I}} \,\middle|\, \bar{\bar{P}}\right]$$

$$\bar{\bar{G}} = \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

létezik egy H paritásmátrix (paritás ellenőrző mátrix

$$\bar{\bar{G}} \cdot \bar{\bar{H}}^T = \varnothing$$

$$\underbrace{\bar{u} \cdot \bar{\bar{G}}}_{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{H}}^T = \varnothing$$



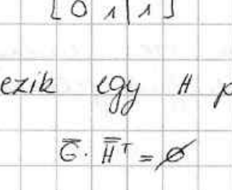
döntési tartomány

moduláció

F — [K] — [H] — [Csat] — [DH] — [DK] — [Ny]

$\bar{u}$, $\bar{c}$, $\bar{s}$, $\bar{r}$, $(\bar{s}' \Leftrightarrow \bar{c})$

cél: dekódolás felismerje és javítsa a hibákat



QPSK ->

egyszeri hiba: másik érvényes kódszóra dönt -> demodulátor követi el; ha bizonytalan törléses hiba

Dekódoló feladata $s \to u$

ez két lépésből áll $s \to c \to u$

$\bar v$: vett kódszó

ha $\bar v$ megegyezik valamelyik érvényes kódszóval akkor vagy nem volt hiba, vagy jelezhetetlen hiba történt

ha $\bar v$ semelyik érvényes kódszóval nem egyezik meg: hiba van; lehet hogy ki tudjuk javítani $\boxed{\bar v \to \bar c'}$ ez a kritikus feladat

$\bar{\bar H}\bar c^T = \emptyset$

$\bar{\bar H}\bar v^T = \bar s$ → szindróma (vigyázat! nem ua, mint a korábbi s)

$\bar s = \bar{\bar H} \cdot \bar e$ $\quad \bar e = \bar v - \bar c$

$\bar e$ lehet azonos különböző kódokra adott $\bar v$ esetén

d_{min} - kódtávolság, a kódvektorok közötti Hamming távolságok minimuma

$d_{min} = \min d(c_i, c_j)$ parasztosan: legkisebb bitbeli eltérés

jelezhető hibák száma

$t_{jel} \le d_{min} - 1$ (jelezhető hibák száma)

példánkban: $d=2$

1 hibát jelezni tudunk, hiszen biztosan nem érvényes kód lesz, de 2 hibánál már nem tudjuk jelezni

javítható hibák száma

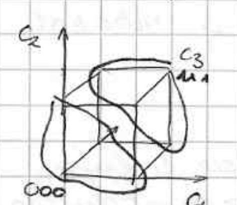
$2t_{jav} < d_{min}$

úgy kell kiválasztani a kódtérben az érvényes kódszavakat, hogy a Hamming távolság minél nagyobb legyen

3D kódtérben 2 kód: 000, 111

$k=1$ (0, 1)
$n=3$
$q=2$
$d=3$

⇒ 1 hiba javítható



a döntési tartományok kitöltik a kódteret

Törlődéses hiba: ha bizonytalan akkor inkább nem dönt X

itt tudjuk, hogy melyik pozícióban van a hiba
⇒ több hiba javítható

Kódkonstrukciós törvények lineáris blokk kódokra

(N, K, q) N: kódszimbólumok
K: üzenet szimbólumok
q: szimbólumok állapotainak száma

Singleton-korlát:

$$\boxed{M \leq q^{(N - d_{min} + 1)}}$$

M: lehetséges kódszavak száma

B: $M \leq q^K \Rightarrow (d_{min} - 1)$, kódolatlanul)

$d_{min} \leq N - K + 1$

minimum egy távolság van kódolatlanul is

$K \leq N - d_{min} + 1$

$\Rightarrow M \leq q^K \leq q^{(N - d_{min} + 1)}$

2009. május 07.

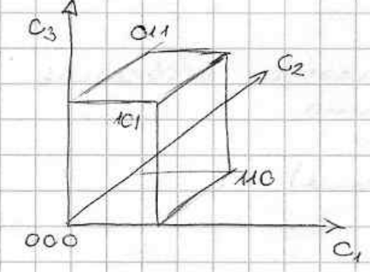
jövő héten ZH: 2 ea anyaga

(N, k, q)

$M \leq q^k \leq q^{N-d_{min}+1}$ → singleton korlát

MDS: maximális távolságú kód, ahol $M = q^{N-d_{min}+1}$

pl: $N=3$; $q=2$ → $M=4$



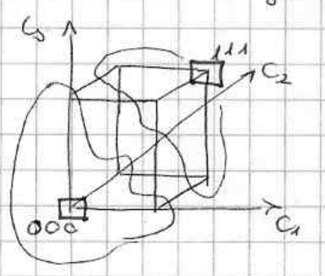
kód súlya = kódtávolság jelenleg

Hamming-korlát: lehet-e jobb kódot alkotni?
- mikor jobb? több hibát tud javítani

t_{jav} → ennyi hibát legyen képes javítani

t_{jav}, k, N, q

csak két érvényes kódot engedünk meg



=> ezek legyenek a lehető legtávolabb (Hamming értelemben)

=> lefedi az egész teret; diszjunktak
egy hibát tudunk javítani

mikor javítható egy hiba?

$\underset{\text{maga a kód}}{1} + \underset{\text{ennyi állapotban}}{N}\underbrace{(q-1)}_{\text{ennyi féle}}$ → ennyiféleképpen lehet hibánk

=> döntési tartomány mérete

több hiba javítása

$$1 + N(q-1) + \binom{N}{2}(q-1)^2 + \dots + \binom{N}{t_{jav}}(q-1)^{t_{jav}} = \sum_{i=0}^{t_{jav}} \binom{N}{i}(q-1)^i \leq q^{N-k}$$

(=> döntési tartomány méretének kisebbnek kell lennie, mint a teljes kódtérnek)

$$q^k \sum_{i=0}^{t_{jav}} \binom{N}{i} (q-1)^i \leq q^N$$

$$\sum \binom{N}{i} (q-1)^i \leq q^{N-k} \qquad \overset{q=2}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^{t_{jav}} \binom{N}{i} \leq 2^{N-K}$$

$\Rightarrow$ Hamming korlát azt adja meg, hogy ha tudjuk, hogy hány hibát akarunk javítani, akkor milyen paraméterű kódot kell választani

PÉLDA: $t_{jav} = 1$

$$1 + N = 2^{N-K}$$

K min 1 ($q=2$ bináris eset)

ha $N=1$ kódolatlan $\Rightarrow$ nem teljesül

K	N $t_{jav}=1$	$t_{jav}=2$
1	3	5
4	7	–
11	15	
26	31	
57	63	
78		90

$\Rightarrow$ kielégítené az egyenletet, mégsem jó $\Rightarrow$ a döntési tartományok alakjait is figyelembe kell venni (ki tudják-e tölteni az egész teret)

$t_{jav} = 2 \qquad 1 + N + \frac{N(N-1)}{2} = 2^{N-K}$

Perfekt kódok:
a Hamming korlátot egyenlőség mellett elégíti ki.

kódarány: K/N, átvitel technikai szempontból az a jó, ha minél nagyobb

Hamming kódok

bináris $q=2$

$(N, K) = (2^m - 1,\ 2^m - 1 - m)$

$\Rightarrow$ perfekt kód
(táblázatban szereplők Hamming kódok)

alkossuk meg a kódot! $(7,4,2)$

$\bar{C} = \bar{u}\,\bar{\bar{G}}$ $\quad\bar{\bar{G}}$: generátor mátrix

$\bar{u}$: üzenet

$\bar{C}$: érvényes kódszavak

$\bar{\bar{G}}\,\bar{\bar{H}}^T = 0$

paritásellenőrző mátrix

G: $k \times n$

$$\underbrace{[\quad \bar{c} \quad]}_{n} = \underbrace{[\quad \bar{u} \quad]}_{k} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\bar{G}} \\ \underline{\underline{I}} \,|\, \underline{\underline{P}} \end{bmatrix}}_{n} \Big\updownarrow k$$

$$\bar{\bar{H}} = \underbrace{\left[\; -\underline{\underline{P}}^T \;\middle|\; \underline{\underline{I}} \;\right]}_{n} \Big\updownarrow n-k$$

$\Rightarrow$ a $-$ jel jelen esetben elhagyható mert a mod 2 összeadás és kivonás megegyezik

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{H}}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad G \quad \end{bmatrix}}_{n} \Big\updownarrow k \; \overbrace{\begin{bmatrix} \\ \quad H^T \quad \\ \\ \end{bmatrix}}^{n-k} \Big\updownarrow n$$

alkossuk meg először a $(3,1,2)$ kódot

$n = 3 \quad k = 1 \quad q = 2$

$$\bar{\bar{H}}_{2\times 3} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{\;}_{\underline{\underline{P}}^T}$ $\quad \underbrace{\;}_{\underline{\underline{I}}_{n-k \times n-k}}$ $\quad 2 \times 2$

$q^n = 2^3 = 8$

$\left.\begin{array}{l} 0\,1 \\ 1\,0 \end{array}\right\}$ ezeket már felhasználtuk

$1\,1 \rightarrow$ ezt írjuk be a p oszlopaiba

$$\underline{\underline{G}} = \overbrace{[\, 1 \mid \underbrace{1 \quad 1}_{\underline{\underline{P}}} \,]}^{n} \updownarrow k$$

számoljuk ki a kódszavakat

$u = 0 \qquad \underline{c} = 0\,0\,0$

$u = 1 \qquad \underline{c} = 1\,1\,1$

$(7,4,2)$ kód

$$\bar{H} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

P^T ; I

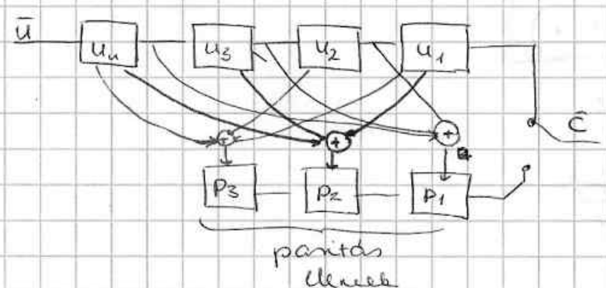
összes lehetséges 3as kivéve a $\emptyset$-t
001
010
011
100
101
110
111

a maradék hármasok felhasználásával

(az oszlopok sorrendje mindegy)

$$P = \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$I_{4\times 4}$



mod 2 összegzők az elsőbe belemegy az u_2, u_3, u_4
a másodikba az u_1, u_3, u_4 ; a harmadikba u_1, u_2, u_4

Hadammard kód

- blokk kód
- $n \times n$ méretű négyzetes

$$\bar{\bar{H}}_{2n} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\bar{H}}_n & \bar{\bar{H}}_n \\ \hline \bar{\bar{H}}_n & \hat{\bar{\bar{H}}}_n \end{array}\right]$$

a mátrix sorai adják a kódszavakat

$\hat{\bar{\bar{H}}}_n$ → 0-ból 1; 1ből $\emptyset$ lesz

$\bar{\bar{H}}_n$ $d_{min} = n/2$
lin. kód, ha n 2 egész hatvány

$\bar{\bar{H}}_1 = [\emptyset]$

$$\bar{\bar{H}}_2 = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{H}}_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

az egyes kódszavak ortogonálisak (bármely kettőt összeadva mod 2-nullát ad)

Hamming kód, RS-kód, többi lin. blokk kód → mod hibák javítására
Hadamard-kódok: ortogonalitás miatt log. csat. szétválasztásához

ciklikus blokk kód
- egy kód ciklikusan eltolva is érvényes kódszót ad
- könnyű generálni őket
- polinomos ábrázolás

$\bar{u} \quad u(p) = u_{k-1} p^{k-1} + u_{k-2} p^{k-2} + \dots + u_0$

$$c(p) = c_{n-1} p^{n-1} + c_{n-2} p^{n-2} + \dots + c_1 p + c_0$$

$$p \cdot c(p) = c_{n-1} p^n + \underbrace{c_{n-2} p^{n-1} + \dots + c_1 p^2 + c_0 p + c_{n-1}}_{c_1(p)} - c_{n-1}$$

$c_1(p)$ → ez lesz a következő kódszó

$$p \cdot c(p) = c_{n-1}(p^n - 1) + c_1(p)$$

$$\boxed{c_1(p) = p^i c(p) \mod (p^n - 1)}$$

→ osszuk el $(p^n - 1)$-gyel

$$\frac{p \cdot c(p)}{(p^n - 1)} = c_{n-1} + \frac{c_1(p)}{p^n - 1}$$

itt is van generátorpolinom; paritásellenőrző polinom

(n, k) ciklikus kód

$$g(p) = p^{n-k} + g_{n-k-1} p^{n-k-1} + \dots + g_1 p + 1$$

$$\underset{n-1}{c(p)} = \underset{n-k}{g(p)} \cdot \underset{k-1}{u(p)}$$

$$h(p) = \frac{p^n - 1}{g(p)}$$

$$g(p) \cdot u(p) = c(p)$$

$$g(p) \cdot u(p) \cdot \underbrace{\frac{p^n - 1}{g(p)}}_{h(p)} \mod (p^n - 1) = \emptyset$$

CRC: cyclic redundancy check

$$c(p) = u(p)\,p^{n-k} - \left(u(p)\,p^{n-k}\right) \bmod g(p)$$

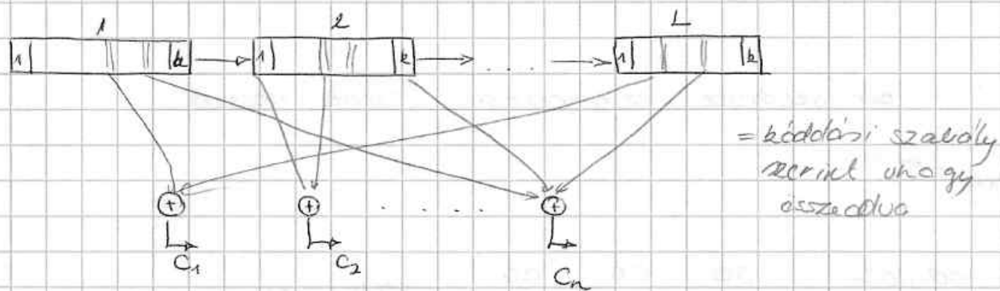
nem blokk kódok

+ <u>konvolúciós kódok</u> (Trellis - kódok)

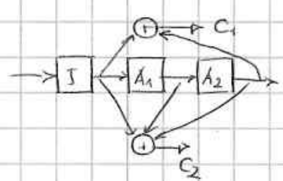
csúszóablakkal dolgozunk

(L, n, k) $\quad R_c = \frac{k}{n}$ kódarány

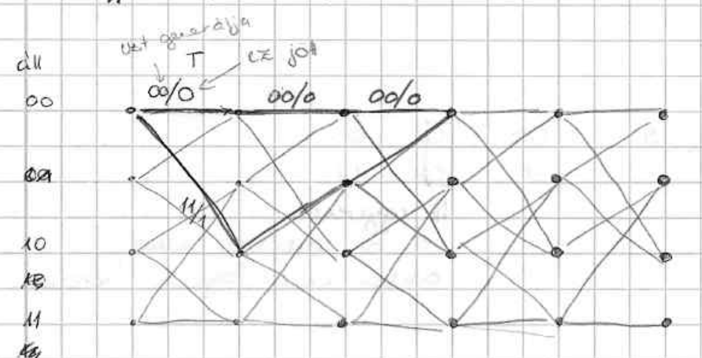
L db k hosszú üzenetblokk



Példa: $L=3$ $k=1$ $n=2$ bináris



	I	A_1	A_2	C_1C_2
	∅	∅	∅	∅∅
új áll.		∅	∅	
	1	∅	∅	1 1
		1	0	
	0	0	1	1 1
		0	0	
	1	0	1	0 0



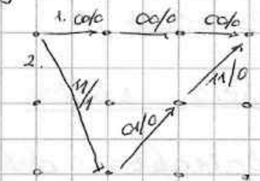
max likelihood döntés - legnagyobb valószínűségű döntés
⇒ Viterbi algoritmus

=> kialakulhatnak hurkok
melyek a valószínűbb

kemény dekódolás: Hamming metrika
lágy dekódolás: Euklideszi-távolság

1. út 00/0 00/0 00/0

2. út 11/1 01/0 11/0



d_{free}: a Trellisen található
időben minimális hurkok ~~hossza~~
útjai között mérhető Hamming távolságok
minimuma

L = 3 kényszerhossz => minimális hurok hossza

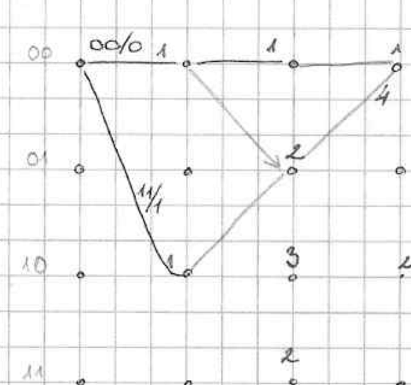
$d_{free} = 5$

demodulálás: 00 00 00 } lehetséges
11 01 11

01 00 00 vett

a bit 1
út távolsága 1

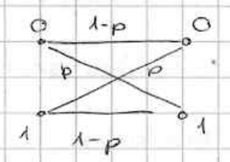
Hamming távolság az egyes szakaszokra



itt záródott a hurok
ez nem valószínű
bitöjük

hibajavító képesség: $d_{free} = 5$ 00 $\boxed{00}$ 00
11 $\boxed{01}$ 11
itt egyezik
ha ott történik hiba
akkor nem fogjuk észrevenni

BSC



5 pozíciót vizsgál és arra dönt ami valószínűbb

$$P_5 = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i}$$

3 helyen történik hiba

lehet, hogy hosszabb hurkot kell vizsgálni

P_6

$$P_e < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d P_d$$

a_d: a d-ben eltérő hurkok száma
P_d: d pozícióban kül. sorozatok közötti tévesztés

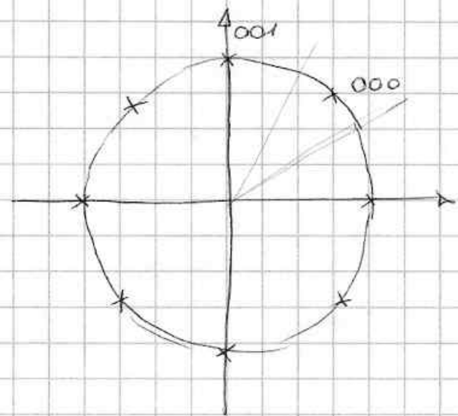
AWGN csatornára

$$P_e < \frac{1}{2} \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d \, \mathrm{erfc}\sqrt{\gamma_b R_c d}$$ BPSK mod. mellett

γ_b: jel-zaj viszony bitekre vonatkoztatva

2009. május 13. Szerda este 5 óra, stréber klub :)

8PSK 3 bináris szimbólum



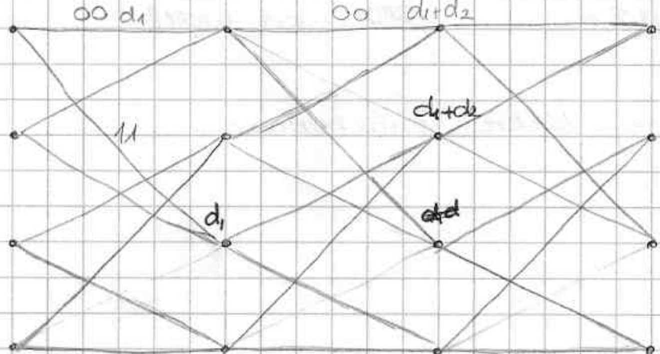
Gray kódolás: a jeltérben közel eső pontokhoz tartozó szimbólumok Hamming távolsága legyen minimális

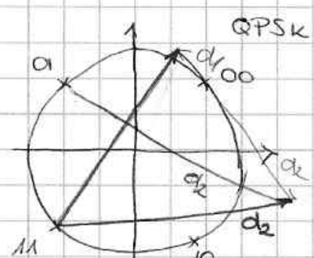
kemény dekódolás: Hamming értelemben számít

lágy dekódolás: a demodulátor nem dönti el egyértelműen a lehetséges jeltérbeli pontok és a vett vektor közötti euklideszi távolságot veszi

PÓTZH-n teljes félév anyaga ez is!

múltkori Trellis





generáltunk zajvektort stb :)

az index azt jelöli, hogy melyik időrés van egy zajvektor, azt jegyzi fel, hogy mi lehetett, milyen zaj mellett és ezeket a zajokat (euklideszi távolságokat) összegzi

=> több számítást igényel, de a hibajavító képessége jobb

kódolt modulációs eljárás:
redundáns modulációs állapotok
(kódolás + moduláció összevonása)

Reed-Solomon kódolás
- nembináris, lineáris blokk kód
- gyakran használják kombinálva pl. konvolúciós kódolóval

GF(p) GF(p^m) prím ill. prímhatványokon értelmezett

üzenetvektorhoz üzenetpolinomot rendelünk

$\bar{u} \longleftrightarrow u(x) = \cancel{u_1 x^{k-1}}\ u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \ldots + u_k x^{k-1}$

$\bar{c} \longleftrightarrow c(x) \Rightarrow c_1 = u(\alpha^0) \quad c_2 = u(\alpha^1) \quad \ldots \quad c_{N-1} = u(\alpha^{N-2})\ ;\ c_N = u(\alpha^{N-1})$

primitív elem. hatványaiként a test összes eleme előáll (α)

$$\bar{\bar{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & & \alpha^{N-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & & \alpha^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & \alpha^{K-1} & \alpha^{2(K-1)} & & \alpha^{(K-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$\bar{c} = \bar{u} \cdot \bar{\bar{G}}$

$$\bar{\bar{H}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{(N-1)} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & & \alpha^{2(N-1)} \\ \cdot & \alpha^3 & \alpha^6 & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha^{N-K} & \alpha^{2(N-K)} & & \alpha^{(N-K)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Példa: $N=4 \quad K=2 \quad q=5$

$\alpha = 2$

- maximális távolságú kód
- perfekt kód

$d_{min} = N-K-1$

0 1 2 3 4 (⇒ a GF 5 eleme így jelöljük)

$\alpha^{-\infty} = 0 \quad \alpha^0 = 1 \quad \alpha^2 = 4 \quad \alpha^3 = 3$
$\alpha^1 = 2$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

=> de nem szisztematikus

felső sort kivonjuk az alsóból

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

most a kapott második sort kivonjuk az elsőből

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 4\\ & & \shortparallel & \shortparallel \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

Dekódolás pl. Peterson - Gorenstein - Zeiler

Forráskódolás

- a forrásban lévő redundancia csökkentése

Shannon - tétel

$$H(x) \le L(x) < H(x) + 1$$

- megfejthető kell legyen

forráskód - prefix kód

$S_f \longleftrightarrow k_f$

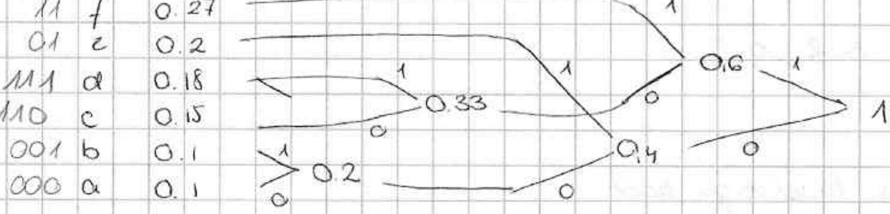
eltérő hosszú kódok

nem lehet folytatása az egyik forráskód a másiknak

S_f	prefix	nem prefix
a	0 ; 1	1
b	10 ; 01	10
c	11 ; 00	11

Huffman - kód

kisebb vsz $\leftrightarrow$ hosszabb kód



a két legvalószínűtlenebbet fogjuk össze

=> felépül egy bináris fa

mindig balra 0, jobbra 1 (=> szabadon megválasztható, csak ragaszkodni kell hozzá)

a

HIRKEL'H
05. 13

Hatékonyak voltunk-e?
Shannon tétel alapján

h: hatékonyság

$$h = \frac{H(X)}{L(X)}$$

forrásbővítés: akkor működik jól, ha a forrás memóriamentes

$p(a) = 0{,}5$ $p(b) = 0.3$ $p(c) = 0.15$ $p(d) = 0.05$

$H(X) = 1{,}64$

naiv kódolás: nem veszi figyelembe az a-priori adási valószínűségeket

naiv	00	01	10	11	$L(X) = 2$ $h = 85\%$
Huf	0	10	110	110	$L(X) = 1{,}7$? $h = 96\%$

forráskiterjesztés
aa $p = 0.25$
ab
ac
ad

kiterjesztett Huffmann: $h = 99\%$

$L(X \cdot X) = 3{,}32$ $H(XX) = 3.29$

Forráskiterjesztési tétel

$$H(A_k) \leq L(A_k) \leq H(A_k) + 1$$

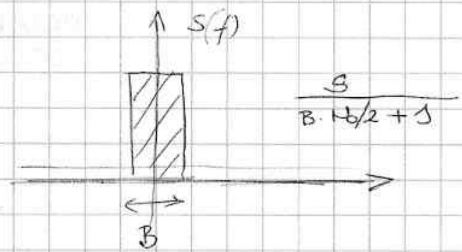
$$N(H(A)) \leq L(A_k) \leq N\,H(A) + 1$$

$$H(A) \leq \frac{1}{N} L(A_k) \leq H(A) + 1/N$$

Kódosztásos többszörös hozzáférés

SS = spread spektrum - kiterjesztett spektrum

álvéletlen sorozattal kódoljuk
1. közvetlen DSSS
2. frekv. ugrásos FHSS



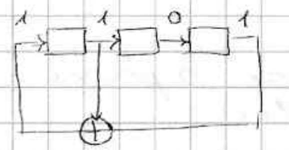
$$\frac{S}{B \cdot N_0/2 + 1}$$

spektrumkiterjesztés

$$s(t) = \Omega\left[x(t) = \Omega[s(t)]\right]$$

álvéletlen sorozat:

visszacsatolt shiftregiszter



$7 = 2^3 - 1$

a csupa $\varnothing$ állapotot nem veheti fel, mert abból nem tudná kimászni

áll	kód
1 1 1	1
0 1 1	1
1 0 1	1
0 1 0	$\varnothing$
0 0 1	1
1 0 0	$\varnothing$
1 1 $\varnothing$	$\varnothing$
1 1 1	

CDMA

Ortogonális kódok