ANALÍZIS 1.	**II. PÓTZÁRTHELYI**	**2015.december 3.**
Mérnök informatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 50 perc

1. feladat (10 pont)
Számolja ki az

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(x^2-1)}{x^2}$$

függvény határértékeit az értelmezési tartomány végpontjaiban. Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek?

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vagyis a kérdéses határértékek a függvény paritása miatt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(x^2-1)}{x^2} \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x\operatorname{ch}(x^2-1)}{2x} \lim_{x\to\infty} \operatorname{ch}(x^2+1) \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty,$$

és

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sh}(x^2-1)}{x^2} \overset{\mathbf{2p}}{=} -\infty.$$

Így a függvénynek a 0-ban másodfajú szakadása van (**1p**), mindenhol máshol folytonos függvények kompozíciója, illetve hányadosa, tehát folytonos (**2p**).

---

2. feladat (10 pont)
Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 \sin\frac{4}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $x_0 = 0$, illetve $x_0 = -\frac{1}{\pi}$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét.

$f(-\frac{1}{\pi}) \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{3}{\pi}$. Ha $x \neq 0$, akkor

$$f'(x)) \overset{\mathbf{3p}}{=} 3 - 2x\sin\frac{4}{x} - x^2\cos\frac{4}{x}\cdot\frac{-4}{x^2},$$

vagyis $f'(-\frac{1}{\pi}) \overset{\mathbf{1p}}{=} 7$, így az érintőegyenes egyenlete: $y + \frac{3}{\pi} = 7(x + \frac{1}{\pi})$ (**1p**).

$$f'(0) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h - h^2\sin\frac{4}{h}}{h} \overset{\mathbf{2p}}{=} 3 - \lim_{h\to 0} h\sin\frac{4}{h} = 3,$$

tehát a 0 pontbeli érintő egyenlete: $y = 3x$. (**1p**)

3. feladat (5+5 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-3}{\operatorname{ch}(4x)}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(\cos(2x)+3)} - \frac{1}{4x}\right).$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-3}{\operatorname{ch}(4x)} \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-3}{\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{4x}} \cdot \frac{1-3e^{-2x}}{1+e^{-4x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(\cos(2x)+3)} - \frac{1}{4x}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4-(\cos(2x)+3)}{4x(\cos(2x)+3)} \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)}{4(\cos(2x)+3)-8x\sin(2x)} \overset{\mathbf{2p}}{=} 0.$$

---

4. feladat (10 pont)
Hol konvex, illetve konkáv az $\ln\frac{1-x}{1+x}$ függvény?

$x \in D_f$, ha $1-x>0$ és $1+x>0$ vagyis $D_f = (-1,1)$. (**2p**) Ekkor

$$f'(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2},$$

és

$$f''(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{-4x}{(1-x^2)^2}.$$

Itt $f''(x) > 0$, ha $x < 0$, és $f''(x) < 0$, ha $x > 0$, vagyis f a $(-1,0]$ intervallumon konvex, a $[0,1)$ intervallumon konkáv, a 0-ban inflexiós pontja van (**3p**).

---

5. feladat (10 pont)
Adja meg az $f(x) = 5\operatorname{arctg}(2x-3)$ függvény értelmezési tartományát valamint értékkészletét. Igazolja, hogy a függvény a teljes értelmezési tartományán invertálható, és adja meg inverzét, annak értelmezési tartományát valamint értékkészletét.

$D_f \overset{\mathbf{1p}}{=} \mathbb{R}$, $R_f \overset{\mathbf{1p}}{=} \left]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$.

$$f'(x)) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{5 \cdot 2}{1 + (2x-3)^2}) \overset{\mathbf{1p}}{>} 0,$$

tehát f invertálható (**1p**),

$$f^{-1}(x)) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{5} + 3\right),$$

$R_{f^{-1}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \mathbb{R}$, $D_{f^{-1}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \left]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$.