1. feladat (4+4=8 pont)
Adja meg a következő komplex mennyiségeket algebrai alakban!

a) $(\sqrt{3}i-1)^8 = ?$,

Megoldás: $= (2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}))^8$ $\boxed{\textbf{1p.}}$ $= 2^8(\cos\frac{16\pi}{3} + i\sin\frac{16\pi}{3})$ $\boxed{\textbf{2p.}}$ $= -128 - 128\sqrt{3}i$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

b) $\dfrac{1+2i}{2\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)} = ?$

Megoldás: $= \dfrac{1+2i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \dfrac{(1+2i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{4}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \dfrac{3\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

2. feladat (3+5=8 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$? (Írja le a definíciót!)

Megoldás:

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{R} : N < n \in \mathbb{N} \implies a_n > K.$$

b) A definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 200n^2}{n^2 + 500} = \infty.$$

Megoldás:

$$\frac{3n^3 - 200n^2}{n^2 + 500} > K \boxed{\textbf{2p.}}$$

$n > 99 \implies 2n^3 \geq 200n^2$, így ekkor $\dfrac{3n^3 - 200n^2}{n^2 + 500} \geq \dfrac{3n^3 - 2n^3}{n^2 + 500n^2} = \dfrac{n}{501}$.

$\dfrac{n}{501} > K \iff n > 501K.$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

A küszöb lehet $N(K) = \max\{99, 501K\}$. $\boxed{\textbf{1p.}}$

3. feladat (5+4+6=15 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$a)\quad a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}, \qquad b)\quad b_n = \frac{(2n)!}{n^n}, \qquad c)\quad c_n = \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^n.$$

Megoldás:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+3n}+2n}{4n^2+3n-(2n)^2}\boxed{\textbf{2p.}} = \dfrac{\sqrt{4+3/n}+2}{3}\boxed{\textbf{1p.}} \to \dfrac{\sqrt{4+0}+2}{3} = \dfrac{4}{3}\boxed{\textbf{2p.}}$;

b) $b_n = n!\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\dots\cdot(2n)}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n} \geq n!\boxed{\textbf{3p.}} \to \infty$ így a speciális rendőrelv miatt $b_n \to \infty\boxed{\textbf{1p.}}$;

c) $c_n^n = \dfrac{(1+\frac{3/2}{n^2})^{n^2}}{(1+\frac{1/2}{n^2})^{n^2}} \to \dfrac{e^{3/2}}{e^{1/2}} = e$, így $1 \leq c_n^n \leq 3$ ha n elég nagy $\boxed{\textbf{3p.}}$. Ekkor $1 \leq c_n \leq \sqrt[n]{3} \to 1\boxed{\textbf{1p.}}$, és így a rendőrelv miatt $c_n \to 1\boxed{\textbf{2p.}}$.

4. feladat (4+4+4=12 pont)

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = \sqrt{10a_n - 21}.$$

a) Igazolja, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $3 < a_n < 7$!

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat monoton nő!

c) Határozza meg az a_n sorozat határértékét!

Megoldás:

a) Teljes indukcióval: $n = 1$-re $3 < a_1 = 5 < 7\boxed{\textbf{1p.}}$;

Indukciós lépés: $3 < a_n < 7 \overset{?}{\Longrightarrow} 3 < a_{n+1} < 7 \quad (n \in \mathbb{N})$. Ez teljesül, hiszen ha $3 < a_n < 7$, akkor $9 = 30 - 21 < 10a_n - 21 < 70 - 21 = 49$, ezért $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10a_n - 21} < \sqrt{49} = 7\boxed{\textbf{3p.}}$.

b) Be kell látni, hogy $a_{n+1} \geq a_n \quad (n \in \mathbb{N})\boxed{\textbf{1p.}}$. Mivel $a_n > 0$, ezért $\sqrt{10a_n - 21} \geq a_n$ azzal ekvivalens, hogy $10a_n - 21 \geq a_n^2$, ami pontosan akkor teljesül, ha $3 < a_n < 7\boxed{\textbf{2p.}}$, amit az előbb már láttunk $\boxed{\textbf{1p.}}$.

c) Az előzőek szerint a_n konvergens $\boxed{\textbf{2p.}}$, jelölje határértékét $A \in \mathbb{R}$. Ekkor $a_{n+1} \to A$, mert részsorozat, másfelől a határérték és a műveletek kapcsolata miatt $A = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{10a_n - 21} = \sqrt{10A - 21}\boxed{\textbf{1p.}}$. Két megoldás van $A_1 = 3$ és $A_2 = 7$. Mivel a_n monoton nő, ezért $A = \lim a_n = \sup a_n$, ami nem lehet 3, mert ez nem felső korlát. Tehát $A = \lim a_n = 7\boxed{\textbf{1p.}}$.

5. feladat (7 pont)
Határozza meg a következő sorozat torlódási pontjait, limesz szuperiorját, limesz inferiorját valamint limeszét, ha létezik!

$$a_n = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)3^{2n} + 2^n}{9^{n+1}}$$

Megoldás: $a_{2n} = \dfrac{\sin(n\pi)3^{4n} + 2^{2n}}{9^{2n+1}} = 0$, $a_{4n-3} = \dfrac{\sin(-3\pi/2)3^{8n-6} + 2^{4n-3}}{9^{4n-2}} = \dfrac{3^{-6} + 1/8(2/9)^{4n}}{9^{-2}} \to 1/9$, és $a_{4n-1} = \dfrac{\sin(-\pi/2)3^{8n-2} + 2^{4n-1}}{9^{4n}} = \dfrac{-3^{-2} + 1/2(2/9)^{4n}}{1} \to -1/9$ $\boxed{\textbf{4p.}}$.

Mivel a sorozat minden eleme szerepel a fenti három részsorozat valamelyikében, ezért a_n-nek 3 torlódási pontja van 0 és $\pm 1/9$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

Ekkor $\limsup a_n = 1/9 \neq -1/9 = \liminf a_n$, és ezért nincs határérték $\boxed{\textbf{1p.}}$.