Felsőbb Matemaika ML vizsga (1) 2021 ősz

Név⋆ Neptun kód⋆

Az összes feladatban: jelölje $\times$-el a helyesnek gondolt választ. Minden feladatban minden jó válasz 1, minden rossz válasz -0.5 pontot ér. 0 pontot ér, ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, vagy mindkettőt megjelöli.

1. Legyen φ a $(\neg(q \vee p) \to r) \wedge (r \to \neg q)$ kijelentéslogikai formula. Az alábbi clause halmaz alakban megadott CNF-ek közül melyek ekvivalensek φ-vel?

	$\equiv \varphi$	$\not\equiv \varphi$
$\{\{\neg q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$		
$\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$		
$\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}$		
$\{\{q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$		
$\{\{\neg q, r\}, \{p, q, r\}\}$		

Megoldás. Először is, φ pontosan akkor igaz egy $\mathcal{M}$ modellben, ha $\mathcal{M} \models \neg(q \vee p) \to r$ (azaz $\mathcal{M} \models q \vee p \vee r$) és $\mathcal{M} \models r \to \neg q$ (azaz $\mathcal{M} \models \neg r \vee \neg q$) is fennáll. Tehát $\{\{\neg q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$ φ-vel ekvivalens CNF; és φ pontosan akkor igaz egy $\mathcal{M}$ modellben, ha

(1) p, q és r közül legalább az egyik igaz $\mathcal{M}$-ben, és
(2) q és r közül legalább az egyik hamis a $\mathcal{M}$-ben.

Tehát $\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$ szintén ekvivalens φ-vel, vagy mert

$$(*) \qquad \{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\} \equiv \{\neg q, \neg r\}$$

a disztributivitás miatt, mivel

$$\neg q \vee \neg r \equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

vagy mert ez is pontosan az (1) és (2) által leírt modellekben igaz.

$(*)$ miatt $\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}$ nem ekvivalens a φ-vel, hiszen $\{\neg q, \neg r\}$ igaz például abban a modellben, amelyben p, q és r mindegyike hamis, miközben φ (1) miatt itt nem az.

$\{\{q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$ nem ekvivalens φ-vel, mert igaz például abban a modellben, amelyben p, q és r mindegyike igaz, noha φ ebben (2) miatt nem igaz.

$\{\{\neg q, r\}, \{p, q, r\}\}$ ugyanezen okból nem ekvivalens φ-vel.

	$\equiv \varphi$	$\not\equiv \varphi$
$\{\{\neg q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$	$\times$	
$\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$	$\times$	
$\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}$		$\times$
$\{\{q, \neg r\}, \{p, q, r\}\}$		$\times$
$\{\{\neg q, r\}, \{p, q, r\}\}$		$\times$

2. Legyen Σ elsőrendű formulák

$$\{\forall x \forall y \forall z (z \neq x \to z = y), \quad \forall x (P(x) \leftrightarrow \neg Q(x)), \quad \exists x P(x)\}$$

halmaza.

Melyek igazak az alábbi állítások közül?

	I	H
$\Sigma \models \exists x \exists y (x \neq y \wedge Q(x) \wedge Q(y))$		
$\Sigma \models \neg \exists x \exists y (x \neq y \wedge Q(x) \wedge Q(y))$		
$\Sigma \models \forall x \forall y ((Q(x) \wedge Q(y)) \to x = y)$		
$\Sigma \models \exists x Q(x)$		
$\Sigma \models \forall x ((P(x) \wedge Q(x)) \to x \neq x)$		

Megoldás. A Σ-beli első formula miatt Σ minden modelljének univerzuma legfeljebb kételemű, és a másik kettő miatt ha $\mathcal{M} \models \Sigma$, akkor $\emptyset \neq P^{\mathcal{M}} = M \setminus Q^{\mathcal{M}}$. Végül, Σ-nak van modellje, pl. a következő: $M = \{1\} = P^{\mathcal{M}}$, $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$.

Az első állítás hamis, mert $\exists x \exists y(x \neq y \wedge Q(x) \wedge Q(y))$ nem igaz Σ előző bekezdésbeli modelljében. (Valójában Σ egyetlen modelljében sem, mert a második állítás igaz.)

A második igaz: Σ minden $\mathcal{M}$ modelljében bármely két elem közül legalább az egyik $P^{\mathcal{M}}$-beli, a harmadik Σ-beli formula és amiatt, hogy nincs több elem. De ez az elem nem lehet $Q^{\mathcal{M}}$-beli is, mert a Σ-beli második formula miatt $P^{\mathcal{M}} \cap Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$.

A harmadik is igaz, mert a második az, és mert $\forall x \forall y(Q(x) \wedge Q(y) \to x = y)$ ekvivalens $\neg \exists x \exists y(x \neq y \wedge Q(x) \wedge Q(y))$-al.

A negyedik hamis: Σ fenti (a megoldás elején szereplő) modelljében nem igaz $\exists x Q(x)$.

A utolsó igaz, mert $P^{\mathcal{M}} \cap Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$ Σ minden $\mathcal{M}$ modelljében.

	I	H
$\Sigma \models \exists x \exists y(x \neq y \wedge Q(x) \wedge Q(y))$		×
$\Sigma \models \neg \exists x \exists y(x \neq y \wedge Q(x) \wedge Q(y))$	×	
$\Sigma \models \forall x \forall y((Q(x) \wedge Q(y)) \to x = y)$	×	
$\Sigma \models \exists x Q(x)$		×
$\Sigma \models \forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to x \neq x)$	×	

3. Tartalmazza az $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv a binér S relációjelet. $S(x, y)$ jelentése: "x szereti y-t".

Az alábbi $\mathcal{L}$-formulák közül melyek a "Senki más nem szereti azokat, akik szeretik magukat." mondat formalizált változatai?

	igen	nem
$\forall x \forall y((S(x,x) \wedge S(y,x)) \to x = y)$		
$\forall x(S(x,x) \to \forall y(\neg S(y,x) \vee x \neq y))$		
$\forall x(S(x,x) \to \forall y(\neg S(y,x) \vee x = y))$		
$\forall x(S(x,x) \to \forall y(x \neq y \wedge S(y,x)))$		
$\forall x \forall y((S(x,x) \wedge x \neq y) \to \neg S(y,x))$		

Megoldás. Az utolsó a mondat direkt fordítása: azt mondja, hogy aki különbözik a magát szerető embertől, az nem szereti őt.

Az első és az utolsó formula ekvivalens, mert $(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$.

Az első és a harmadik formula ekvivalens, mert (a) $\forall x(S(x,x) \to \forall y(\neg S(y,x) \vee x = y))$ ekvivalens $\forall x \forall y(S(x,x) \to (\neg S(y,x) \vee x = y))$-nal, mivel y nem fordul elő szabadon $S(x,x)$-ben; és (b) $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (\neg q \vee r)$.

A második nem jó formalizáltja a mondatnak, mert ha csak egy ember van, és ő szereti magát, akkor a mondat igaz, de $\forall x(S(x,x) \to \forall y(\neg S(y,x) \vee x \neq y))$ nem igaz, mert $S(x,x)$ igaz x egyetlen lehetséges értékére, de $(\neg S(y,x) \vee x \neq y)$ nem igaz x és y egyetlen lehetséges értékére.

A negyedik sem jó formalizálás, és ugyanez a modell ($M = \{1\}$, $S^{\mathcal{M}}(1,1)$) mutatja ezt, mert még a gyengébb $\forall x(S(x,x) \to \forall y(x \neq y))$ is hamis benne.

	igen	nem
$\forall x \forall y((S(x,x) \wedge S(y,x)) \to x = y)$	×	
$\forall x(S(x,x) \to \forall y(\neg S(y,x) \vee x \neq y))$		×
$\forall x(S(x,x) \to \forall y(\neg S(y,x) \vee x = y))$	×	
$\forall x(S(x,x) \to \forall y(x \neq y \wedge S(y,x)))$		×
$\forall x \forall y((S(x,x) \wedge x \neq y) \to \neg S(y,x))$	×	

4. Legyen $\mathcal{F}$ a $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ frame, ahol $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza, $<$ pedig a racionális számok szokásos rendezése. Legyen $\mathcal{M}$ a $\langle \mathcal{F}, v \rangle$ modell, ahol $v(p) = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza. (Emlékeztető: az unér konnektívumok erősebben kötnek mint a binérek.)

Melyek igazak az alábbi állítások közül?

	I	H
$\mathcal{M} \models \Diamond p \to \Box\Diamond p$		
$\mathcal{M} \models \Box\Diamond p \to \Diamond p$		
$\mathcal{M} \models \Box\neg p \to \neg p$		
$\mathcal{M} \models \Diamond(\neg p \wedge \Diamond p)$		
$\mathcal{M} \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$		

Megoldás. Az első hamis, mert $\mathcal{M} \not\models_{-1} \Diamond p \to \Box\Diamond p$, mivel $\mathcal{M} \models_{-1} \Diamond p$ de $\mathcal{M} \not\models_{-1} \Box\Diamond p$.

A második igaz, mert $\mathcal{M} \not\models_x \Box\Diamond p$ minden $x \in \mathbb{Q}$-ra.

A harmadik hamis, mert $\mathcal{M} \not\models_0 \Box\neg p \to \neg p$.

A negyedik is hamis, mert $\mathcal{M} \not\models_0 \Diamond(\neg p \wedge \Diamond p)$, mivel p nem igaz egyetlen pozitív számon sem.

Az utolsó igaz, mert vab egy utolsó szám, 0, ahol p igaz. Részletesebben: ha $\mathcal{M} \models_x \Diamond p$, akkor $x < 0$, tehát $\mathcal{M} \models_x \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$, mert $\mathcal{M} \models_0 p \wedge \Box\neg p$.

	I	H
$\mathcal{M} \models \Diamond p \to \Box\Diamond p$		$\times$
$\mathcal{M} \models \Box\Diamond p \to \Diamond p$	$\times$	
$\mathcal{M} \models \Box\neg p \to \neg p$		$\times$
$\mathcal{M} \models \Diamond(\neg p \wedge \Diamond p)$		$\times$
$\mathcal{M} \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$	$\times$	