Pótló zárthelyi dolgozat

A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. Egyszer dobunk egy szabályos kockával. Jelölje PR azt az eseményt, hogy prímszámot dobunk, PS azt, hogy párosat dobunk, LN pedig azt, hogy legfeljebb 4-et (azaz 4-et vagy kevesebbet) dobunk. (Egy pozitív egész számot akkor nevezünk prímszámnak, ha 1-nél nagyobb, és csak 1-gyel és önmagával osztható.) Fejezzük ki az alábbi A, B, C, D, E eseményeket a PR, PS és LN események ill. a halmazműveletek segítségével. **A kifejezések helyességének indoklása is szükséges.**

$$A = \{\text{1-et dobunk}\}, \qquad B = \{\text{2-t dobunk}\}, \qquad C = \{\text{3-at dobunk}\},$$

$$D = \{\text{5-öt dobunk}\}, \qquad E = \{\text{3-nál nagyobbat dobunk}\}.$$

2. Amikor Judit megérkezik a Kékszakállú herceg várába, a várban hét fekete csukott ajtót talál. Bár nem tudja pontosan, hogy mit rejtenek az ajtók, de abban biztos, hogy pontosan egy ajtó vezet a kastély virágoskertjébe, míg egy (és csak egy) másik ajtó mögött a kincseskamra rejtőzik. A Kékszakállú herceg véletlenszerűen kiválaszt hármat az ajtókhoz tartozó hét különböző kulcsból, és odaadja Juditnak, aki természetesen a virágoskertbe szeretne leginkább bejutni, de ha oda nem, akkor legalább a kincseskamrába. Mi a valószínűsége, hogy a fenti kettő közül legalább az egyik helyiségbe bejut? Mi a fenti esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy Judit az egyik kulccsal a kínzókamrába nyitott be (amelybe szintén pontosan egy ajtó vezet a hétből)?

3. Egy urnában 1 darab piros golyó van. Feldobunk egy érmét, és ha fejet dobunk, akkor 1 darab, egyébként pedig 2 darab fehér golyót rakunk a piros golyó mellé az urnába. Ezután összekeverjük őket, majd kihúznuk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk? Feltéve, hogy piros golyót húztunk, mi a valószínűsége, hogy fejet dobtunk?

4. Választunk egy pontot véletlenszerűen az $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; -1)$ és $(-1; 1)$ pontok által meghatározott négyzeten. Legyen A az az esemény, hogy a választott pont az origó középpontú, 1 sugarú körre esik, továbbá legyen B az az esemény, hogy a választott pont mindkét koordinátája pozitív. Döntsük el, hogy függetlenek-e az A és B események.

5. Svindler Sándor jól jövedelmező kártyajátékokkal keresi kenyerét. A mai nap a következő játékot játssza: ha valaki kockára tesz 2000 forintot, akkor összekever négy kártyalapot, melyeknek pontosan egyike piros, és lefordítva leteszi őket az asztalra. A másik játékos ezután választhat egyet a négy lapból, ha eltalálja a pirosat, megduplázza a feltett összeget, egyéb esetben elveszti azt. A vállalkozószelleműbb játékosok azonban feltehetnek 5000 forintot is, a nagyobb összeg kockáztatásáért cserébe viszont ekkor a következő szabályok érvényesek: ha elsőre eltalálja a piros lapot a játékos, akkor a feltett összeg duplázódik, azonban ha nem, akkor van egy második tippelési lehetősége is, választhat még egyet a maradék 3 lefordított kártyából. Ha másodjára találja el a piros lapot, akkor 6000 forintot kap vissza (azaz nyer 1000 forintot). Ha ekkor sem találja el a pirosat, akkor persze a tétet elveszíti. A kettő közül melyik verziónál nagyobb Sándor játékonkénti profitjának várható értéke? (A játékonkénti profit Sándor bevételének és kiadásának különbsége egy játéknál, amely természetesen negatív szám is lehet.)

6. Kétszer feldobunk egy szabályos érmét, jelölje X a dobott fejek számát. Határozzuk meg és ábrázoljuk az X eloszlásfüggvényét.

Nevezetes eloszlások táblázata

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p$, p	-	p
binomiális	$B(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	-	np
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	-	$\frac{1}{p}$
egyenletes	$U(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$