

# **FOLYAMATIDENTIFIKÁCIÓ**

—

# **SZIMULÁCIÓ**

Órai jegyzet

**DR. BENYÓ ZOLTÁN**

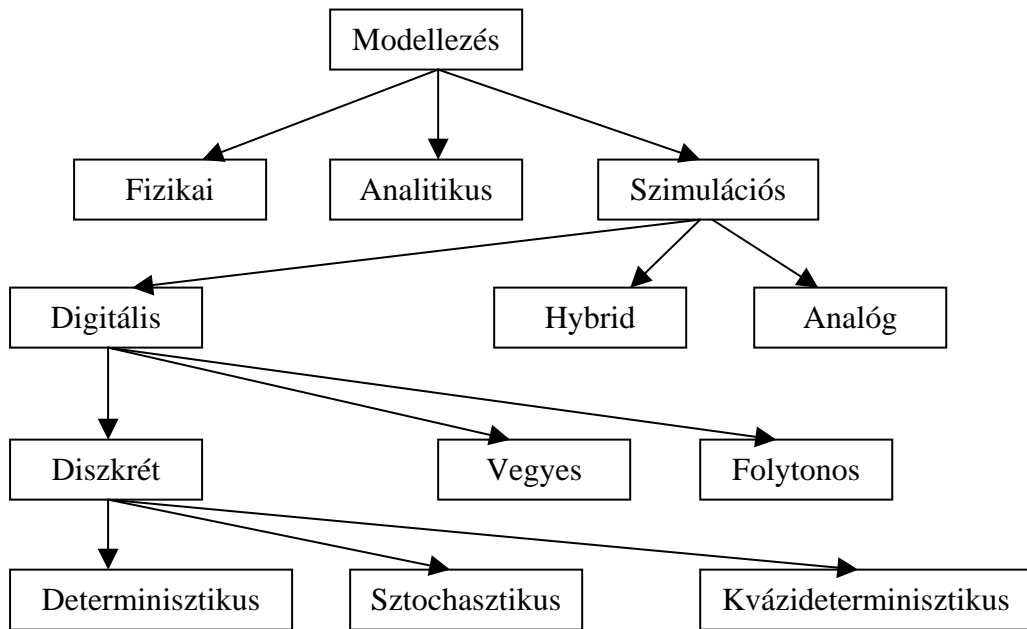
előadásai alapján készítette:  
**Bóta Péter**

Alapfogalmak

**Szimuláció:**

Modellek kidolgozása és azokon végzett kísérletek; létező vagy hipotetikus dinamikus rendszerek vizsgálatára melynek során a vizsgált rendszer egyes aspektusait számokkal vagy szimbólumokkal reprezentáljuk, oly módon hogy azok könnyen kezelhetőek legyenek és elősegítsék a rendszer tanulmányozását és kiértékelését.

**A szimuláció osztályozása**



**Rendszer:**

Objektumok olyan halmaza, amelyek között valamilyen kölcsönhatás vagy függőségi viszony van.

**Modell:**

A valóságos rendszer reprezentációja

**Kísérlet:**

A rendszer vagy modellje viselkedésének megfigyelése adott feltételhalmaz mellett.

**A rendszervizsgálatok fő fázisai:**

1. A probléma megfogalmazása
2. A vizsgált rendszert reprezentáló matematikai modell készítése
3. Megoldás a modell segítségével
4. A modell segítségével nyert megoldás vizsgálata
5. Az eredmény befolyásolási lehetőségeinek kialakítása
6. Az eredmény realizálása: implementálás

/Churchman, Ackoff, Arnoff/

## Modellalkotás-Kísérlettervezés

Valóság  $\neq$  modell  
(Folyamat)

Modell: a valóság (folyamat) egyszerűsített megadása rögzített szempontok szerint

*Modell*  $\leftrightarrow$  *Szimuláció*

### Modellalkotás célja:

- ismeretek összegzése, rögzítése matematikai formában
- ismeretek szerzése feltételezett, részben feltárt ismeretek birtokában
- "Jóslás " (prevenció ! !)
- Matematikai leírás – szimuláció
- Működő modell, kicsinyített más
- Dinamikus vagy statikus viselkedés teszt
- Egyebek

*Az, hogy "X szimulálja Y-t" akkor és csak akkor igaz, ha*

- A. X és Y formális rendszerek,
- B. Y-t tekintjük a valóságos rendszernek,
- C. X a valóságos rendszer közelítése,
- D. Az X-re vonatkozó érvényesség szabályai nem hibamentesek. /Churchman/

Egy rendszer vagy szervezet szimulációján egy modell vagy szimulátor működését értjük, ami a rendszer vagy szervezet reprezentációja. A modellen olyan műveletek hajthatók végre, amelyeket lehetetlen, túl drága vagy célszerűtlen lenne a leképzett elemen végrehajtani. A modell működését tanulmányozhatjuk és következtetéseket vonhatunk le belőle a rendszerre vagy alrendszerre vonatkozólag.

/Shubik/

Szimuláció a valóságos világ néhány aspektusának számokkal vagy szimbólumokkal való reprezentálása, oly módon, hogy azok könnyen manipulálhatók legyenek lehetővé téve tanulmányozásukat.

**Többféle osztályozási szempont:**

I. Működési mód:

1. Analóg
2. Digitális
3. Hibrid

II. Szerkezet

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. Mechanikus              |                            |
| 2. Elektromechanikus Hw    |                            |
| 3. Elektronikus generációk | } <i>Logikai szervezés</i> |
| 4. Optoelektronikus Sw     |                            |

III. Alkalmazott időlépték

1. Valóságos időben ("real time") dolgozó számítógépek
2. Lassított időben dolgozó számítógépek
3. Gyorsított időben dolgozó számítógépek

IV. Felhasználás

1. Differenciálanalizátor
2. Szimulátor
3. Kiképző berendezés

Számítógépes generációk

3 szempont:

- Hardware
- Logikai szervezés
- Software

*1. Elektronikus hardware:*

- I. generációs – elektroncsöves
- II. generációs tranzisztoros mágnesgyűrűs tár
- III. generációs - IC-s - újabb tagozódás az integráltsági fokot illetően

## 2. Logikai szervezés

I. generációs - egy időben egy műveletet hajt végre, B/K program félbeszakít mindeféle operációt; a szimultán működés teljes hiánya.

II. generációs - B/K és számítás párhuzamosan. Ezt úgy érték el, hogy adatcsatornát alkalmaznak, amely minimális figyelmet igényel a processzortól. Gondoskodni kell az ITról "aszinkron" eseményeknél.

III. generációs - Több program egyidejű végrehajtása lehetséges. Tárvédelem, operatív és háttértárak.

## 3. Software

I. generációs - egy programtöltőt, egyszerűen felhasználható rutinokat alkalmaz. Assembler nyelvű programozás.

II. generációs - OS megjelenésével alakul ki. Programkönyvtár alkalmaz. Linkiage editor, stb.

III. generációs - OS koordinálja a hardware - konfigurációt, figyeli a megszakítást. Multiprogramozhatóság, konverziós üzem biztosított.-

A II. és a III. generációs működés között átkapcsolási lehetőséget biztosítani kell (pl. nappal párbeszédés üzem, éjszaka pedig II. generációs programok).

## Mi jellemzi a két alarendszert?

<u>Analóg</u>	<u>Digitális</u>
1. <i>Folytonos</i>	1. <i>Diszkrét</i>
2. Pontosságot az <i>elemek pontossága</i> határozza meg	2. Pontosságot az <i>elemek száma</i> határozza meg
3. <i>Párhuzamos</i> üzem	3. <i>Soros</i> üzem
4. <i>Olcsó</i> üzemeltetés	4. <i>Drága</i> üzemeltetés
5. <i>Ember-gép</i> kapcsolat jó	5. Ember-gép kapcsolat <i>nem jó</i>
6. „ <i>Real-time</i> ” üzem	6. Lassú, <i>numerikus approximáció elvét alkalmazza</i>
7. Logikai műveletek nehezen végezhetőek el	Nagy lépésköz – instabilitás
8. Jeltárolás bonyolult	7. Logikai műveletek elvégzése egyszerű
	8. Jeltárolás egyszerűen végezhető el

**Törvény:** alapvető összefüggések rögzített érvényességi körben

pl.:

- energia megmaradás
- Ohm törvény
- Vérnyomás-életkor
- ...

Ezek maguk is modellek:

- matematikai formalizmus
- ismeretet, összefüggést rögzítenek
- sokszor nincs pontos ok-okozati összefüggés
- fejlődnek
  - o pontosabbakká válnak
  - o érvényességi körük változik

**A modellel kapcsolatos főbb kategóriák:**

**Törvény:**

- alapvető összefüggések rögzített érvényességi körben
- rendszerint matematizálható

**Struktúra:**

- részekre bonthatóság
- részek egymáshoz kapcsolódása
- hatásmechanizmus

**Paraméter:**

- a részekre bontott modell elemeinek konkrét viselkedését meghatározó értékek.

**Állapot (állapotváltó):**

a részekre bontott modell egyes elemeinek jellemzői, melyek a rendszer egészének meghatározó viselkedését írják le.

## ALGEBRAI EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Abban az esetben, ha a rendszer állandósult állapotban van, stady state állapotban van, abban az esetben a kimenet, bemenet közötti kapcsolatrendszer algebrai egyenletek, egyenlőtlenségek írják le. Általános esetben az egyensúly így néz ki:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n &= 0 \end{aligned}$$

ahol adott  $a_{ij}$  és  $b_i$ , kérdés az  $x_i$ .

A számítógépes megoldás feltétele, hogy az ismeretlen száma és az ismert egyenletek száma megegyezzen. Abban az esetben, hogyha kevesebb az ismert egyenlet, akkor alulhatározott, ha több, akkor felülhatározott.

Továbbiakban lássunk 3 különböző megoldást:

Az egyik tisztán teoretikus, a másik jóval használhatóbb, illetve van egy harmadik megoldás, ami mindig konvergens megoldást eredményez.

1) Az első megoldás, amit a matematikusok is használnak, a következő:

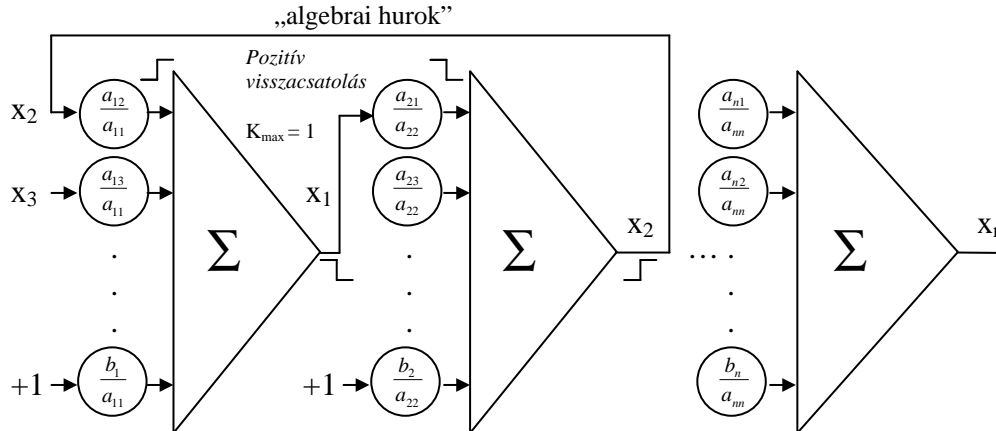
Fejezzük ki az  $x_1$ -et az első egyenletből:

$$\begin{aligned} x_1 &= - \left[ \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \right] \\ x_2 &= - \left[ \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \right] \\ &\dots \\ &\dots \\ x_n &= - \left[ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 + \dots + \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \right] \end{aligned}$$

Az első sorban  $x_2$ -t, az  $x_3$ -at megszorozva a megfelelő konstansokkal, összegezve, megkapjuk  $x_1$ -et.

A második sorból megkapjuk  $x_2$ -t, illetve az n. sorból  $x_n$ -et.

Az eddigieket a következőképp ábrázolhatjuk:



Ily módon előáll az megoldás vázlat.

Ez azt jelenti, hogy az  $x_1$ -et azt bekötjük a második összegzőbe.

Ez elvileg egy nagyon szép megoldást mutat, ahány ismeretlen, annyi egyenlet, csak behelyettesítünk, és kész, azonban a gyakorlatban ez nem így van.

Ha  $x_2$  felvesz valamilyen értéket, az azonnal megjelenik az első összegző bemenetén, mely egy arányos tag, késleltetés nincs. Az első összegző  $x_2$ -es bemenetére érkező pozitív jel pozitív kimenetet okoz a második összegző kimenetén. Ezáltal egy pozitív visszacsatolás jön létre, melynek maximális hurokerősítése 1.

Egy  $n$  ismeretlenes egyenletnél  $n$  sok ún. algebrai hurok keletkezik, és semmilyen garancia nincs arra, hogy egyik ilyen pozitív huroknál sem nagyobb a körerősítés 1-nél, ami, mint tudjuk, ez a rendszer gerjedéséhez vezet.

Ez azt jelenti, hogy ez a megoldás csak a legritkább esetben használható. Ha negatív a visszacsatolás, elvileg stabil a rendszer, valójában azonban minden elemében van késleltetés, így negatív visszacsatolásnál is felléphet az instabilitás.

Ezt sokszor használják hardware-tesztre, aholis azt vizsgálják, hogy a rendszer mikor kezd begerjedni még negatív visszacsatolás esetén is.

## 2) A második megoldás az *integráló módszer*.

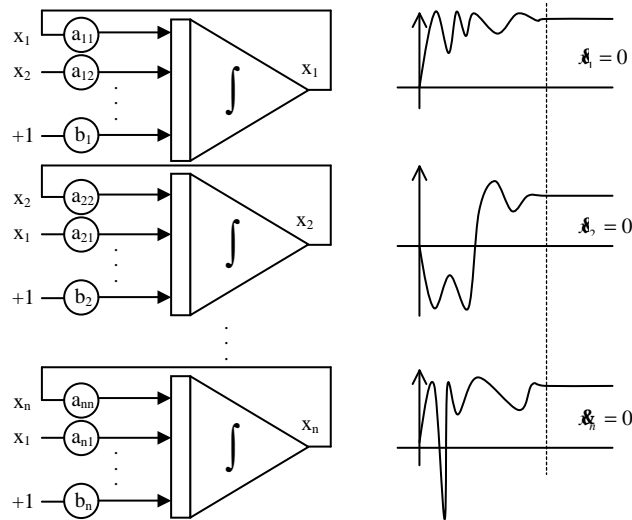
Abból indul ki, hogy ez az egyenlet nem csak egyenletrendszer. Ezt alakítsuk át úgy, hogy az első egyenlet legyen egyenlő mínusz  $x_1$  deriválttal, a második  $x_2$  deriválttal, az  $n$ -edik  $x_n$  deriválttal.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 &= 0 = -\dot{x}_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 &= 0 = -\dot{x}_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n &= 0 = -\dot{x}_n \end{aligned}$$

Ez esetben ezt a differenciálegyenlet-rendszert oldjuk meg az algebrai egyenlet-rendszer helyett. Az deriváltak állandósult állapotban nullák. A tranziens tetszőleges lehet, de a rendszer stabil legyen. Most az összegzők helyett integrátorokat fogunk használni. Ezekbe bevisszük az  $a_{11}x_1$ -t,  $a_{12}x_2$ -t, és így tovább. A kimeneten megkapom az  $x_1$ -et. Ugyanígy



megkapom  $x_2$ -t, és  $x_n$ -et is. Az integrátor elem köztudottan egy időkésésemes elem, tehát nem proporcionális tag. Ez az integráló módszer megoldotta a differenciálegyenlet-rendszert. A tranziens tetszőleges lehet, lényeg, hogy egy adott nagy T idő elteltével beálljon egy állandósult állapot, a deriváltak nullává váljanak.



A kérdés az, hogy valóban beáll-e az állandósult állapot?

Nézzük meg egy kicsit közelebbről, mi a feltétele, hogy beálljon az állandósult állapot!

Bevezetek egy A mátrixot:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \\ \dots \\ \mathfrak{x}_n \end{pmatrix}$$

Az eredeti egyenlet ezek után így fog kinézni:

$$\overline{A}\overline{x} + \overline{B} = 0$$

A megoldást úgy kapjuk, hogy a homogén részhez hozzáadjuk az inhomogén rész egy partikuláris megoldását.

A homogén rész a következőképp néz ki:

$$\overline{\mathfrak{x}} + \overline{A}\overline{x} = 0$$

A homogén egyenlet megoldását az  $\bar{x} = \bar{c}e^{at}$  alakban keressük, ahol  $c$  egy amplitúdó-vektor:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Ebből:

$$\dot{\bar{x}} = a\bar{c}e^{at}$$

Behelyettesítve:

$$a\bar{c}e^{at} + A\bar{c}e^{at} = 0$$

egyszerűsítve:

$$(a\bar{E} + \bar{A})\bar{c} = 0$$

Ez egy szorzat. A szorzat akkor zérus, ha valamelyik tényezője nulla. Most  $c$  nem lehet nulla, mert nullától eltérő értékeket keresünk.

$$\det(a\bar{E} + \bar{A}) = 0$$

Tehát ezt ki kell fejtenünk:

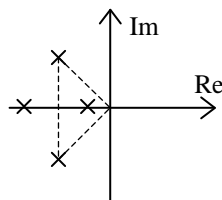
$$\begin{vmatrix} a_{11} + a & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + a & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + a \end{vmatrix} = 0$$

A következőt kapjuk:

$$D_n a^n + D_{n-1} a^{n-1} + \dots + D_1 a + D_0 = 0$$

Ez az egyenlet az indulási egyenlet karakterisztikus egyenlete.

Ennek az egyenletnek a gyökeit határozzuk meg, hogy a megoldás stabilis vagy nem. Azt jelenti, hogy a megrajzolt SI számsíkon, a gyökök akkor jeleznek stabilitást, ha negatív valósrésztűek, vagy negatív valós rész konjugált komplexek lesznek.



Ekkor használhatók a jól ismert stabilitási kritériumok, amelyek a karakterisztikus egyenlet tényleges megoldása nélkül eldöntik, hogy a gyökök stabilis rendszert jeleznek, vagy sem.

Tehát a második módszerről elmondható, hogy az integráló módszer azért jó, mert az időkézés nélküli elemek időkézéses elemek, magyarul az összegzőket integráló elemek váltják fel.

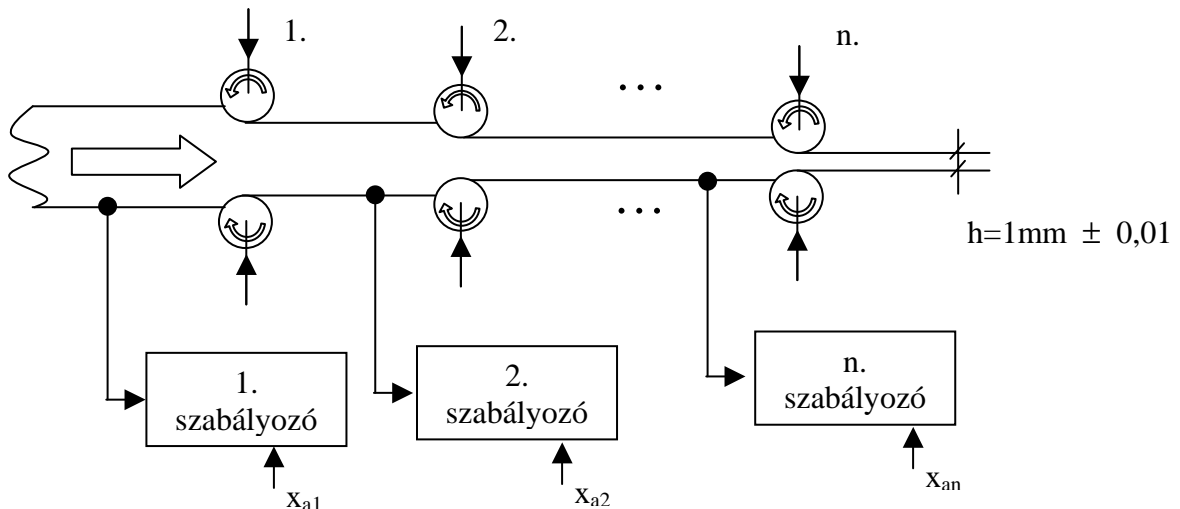
Ha stabilabb megoldást keresünk, a következőket tehetjük:

Ha konvergens megoldást kapunk, az  $A$  mátrixot pozitív definit mátrixnak nevezzük. Ez fordítva is igaz. Sajnos az  $A$  mátrixról eldönteni, hogy pozitív definit-e, még nincs általános megoldás.

Van azonban egy mérnöki szabály: ha a főátlóban lévő elemek jóval nagyobbak a háromszögben lévőknél, akkor a mátrix minden bizonnyal pozitív definit mátrix, azaz a rendszer stabil.

3) A harmadik megoldás mindig stabil megoldást eredményez.

Nézzünk először egy példát:



A kiindulási egyenlet:

$$\overline{A} \overline{x} + \overline{B} = 0$$

Mindkét oldalt szorozzuk az  $\overline{A}$  mátrix transzponáltjával. Ekkor:

$$\overline{A}_t \overline{A} \overline{x} + \overline{A}_t \overline{B} = 0 = -\overline{\mathbf{k}}$$

$\overline{A}_t$  mátrix mindig pozitív definit.

Bevezetünk egy  $\overline{Z}$  segédmatricát:

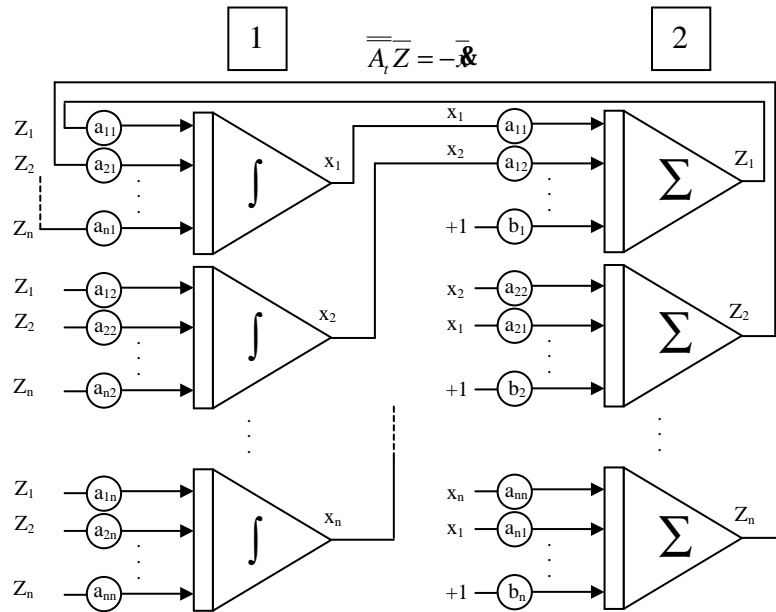
$$\overline{Z} = \overline{A} \overline{x} + \overline{B} = 0 \quad (\text{I.})$$

Így:

$$\overline{A}_t \overline{Z} = -\overline{\mathbf{k}} \quad (\text{II.})$$

Két egyenletre bontottuk az eredeti egyenletünket.

Tehát a következő ábrát kapjuk:



Ez a módszer biztos, hogy konvergens megoldást ad. Azonban ennek ára van, mert kétszer olyan bonyolult a hardware, kétszer annyi a hibalehetőség, mint az 1. vagy a 2. megoldásnál.

Az állandósult állapotra sohasem igaz, hogy minden áll, mert mögötte anyag, energia folyamatok, transzport folyamatok játszódnak le.

## DIFFERENCIÁL EGYENLETRENDSZEREK

$$A_n x^{(n)} + A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_1 x^{(1)} + A_0 x = Ax_{be}$$

$$A_n x^{(n)} = Ax_{be} - [A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_1 x^{(1)} + A_0 x]$$

$$x(0) = C_0$$

$$x^{(1)}(0) = C_1$$

...

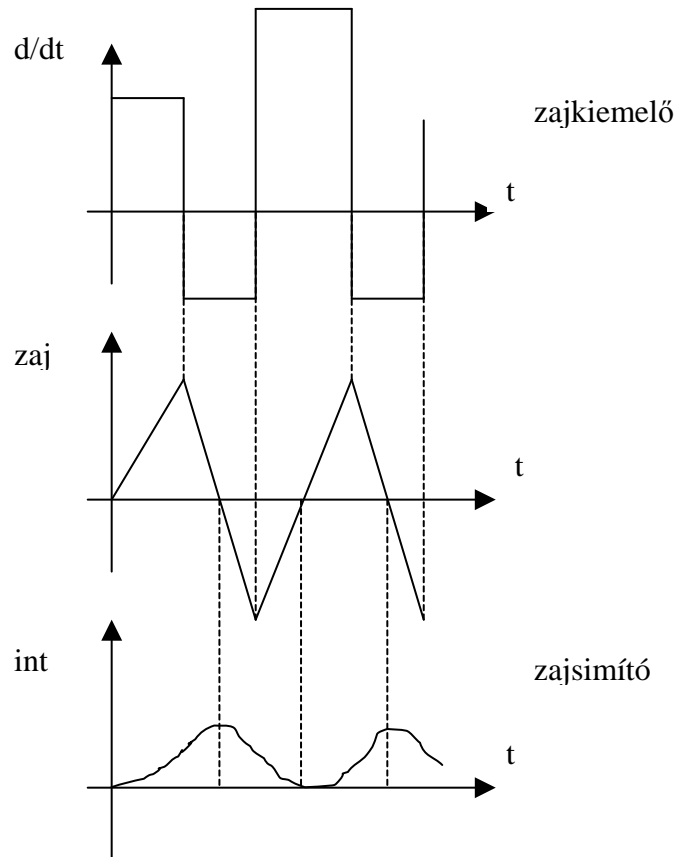
$$x^{(n)}(0) = C_n$$

Elvileg két módszer kínálkozik ilyen egyenletek megoldására.

Az egyik az, hogy feltételezek valamilyen  $x$  értéket, és ebből képezem az első, a második, az  $n$ -edik deriváltat. Ezt hívják *differenciáló módszernek*.

A másik módszer, hogy az  $n$ -edik deriváltból indulok ki, és ebből képezem az  $n-1$ -edik  $n-2$ -edik deriváltat, egészen  $x$  értékéig. Ez az *integráló módszer*.

Vizsgáljuk meg, hogy melyik módszernek milyen tulajdonságai vannak, ha egy adott alakú zaj fellép.



Az első módszer veszi a zaj deriváltját.

Az integráló módszer a görbe alatti területet veszi.

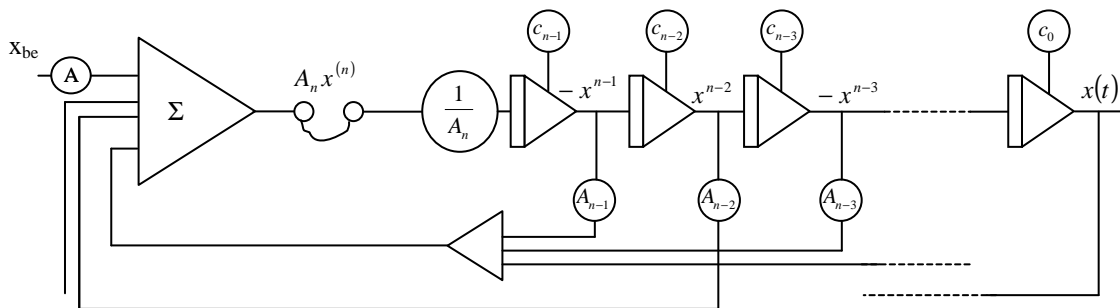
A differenciáló módszer veszi a gradiensét, tehát kiemeli a zajt, zajkiemelő tulajdonsága van. A második módszer az úgynevezett zajelnyomó, zajsimító eljárás. Ebből következik, hogy technikai elemeknél, ha tervezünk egy akármilyen műszert, vagy automatikát, real-time szimulátort, fontos, hogy a differenciálás műveletét, ahol csak lehet, kerüljük, mert a külső, belső zajok nagy zavart okozhatnak a működésben.

A lényeg tehát az, hogy az n-ed rendű tagra kell rendezni a differenciál egyenletet.

$$A_n x^{(n)} = A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_1 x^{(1)} + A_0 x = Ax_{be}$$

$$A_n x^{(n)} = Ax_{be} - [A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_0 x]$$

A valósidejű megoldás a következőképp néz ki:



A valóságban a differenciáló módszer annyira zajos, hogy nem vezet megoldáshoz, szemben az előbbi módszerrel.

$C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$  kezdeti feltételeket sorban be kell vezetni az integrátorokba, hogy partikuláris megoldást kapjunk.

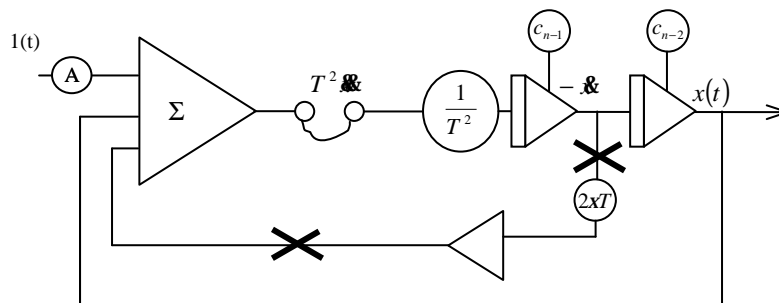
1. Példa

~~$$T^2 \ddot{x} + 2xT\dot{x} + x = A * 1(t)$$~~

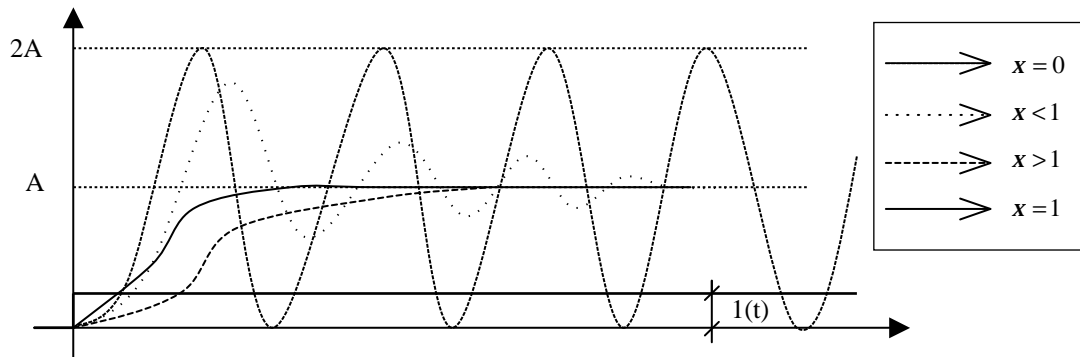
~~$$T^2 \ddot{x} = A * 1(t) - [2xT\dot{x} + x]$$~~

Feltételezzük, hogy a  $T^2 \ddot{x}$  ismert, valójában nem, és ez a feltételezés is mellőzhető, hisz a komponenseiből fogom előállítani.

kezdeti feltételek:  $x(0) = 0$ ;  $\dot{x}(0) = +0$



A megoldás különböző  $x$  értékeknél:



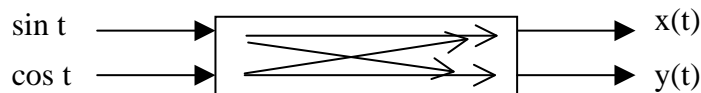
$x > 1$  - ha a bemeneten  $1(t)$  van, akkor a kimenet  $A$  értékhez fog tartani,  
 $x = 1$  - az aperiodikus határeset, a leggyorsabb aperiodikus beállítás,  
 $x < 1$  - ebben az esetben túllövés következik be,  
 míg  $x = 0$  - nál  $2A$  amplitúdóval fog állandó lengésbe kerülni a rendszer.

Ezen az elven működnek, a nagy pontosságú, lassú infra-generátorok, amelyeket a legkülönböző műszerekben, akár geodéziában, akár orvos-terápiában alkalmaznak.

Az előző példában a Kelvin-Thomson-féle visszavezetési elvet ismertük meg, amellyel többváltozós differenciál-egyenletek, egyenlet-rendszerek, sőt parciális differenciál-egyenletek is megoldhatók, mint ahogy azt később látni fogjuk.

## 2. Példa

Itt van egy két kimenet-két bemenetű elem, ahol szinuszos, és koszinuszos rezgések a bemenetek. Ez azt jelenti, hogy a szinusz nem csak az  $x(t)$ -t, a koszinusz nem csak az  $y(t)$ -t fogja befolyásolni, hanem köztük van egy úgynevezett cross-effect, kereszt-kapcsolat, mely sűrűn előfordul, ahogy egyik előző példánkban is láthattuk, a kávé hatásmechanizmusánál.



$$2x + 4y + 8x = \sin t$$

$$8x + 2y + 5y = \cos t$$



3 kezdeti feltételt tudok megadni:

$$x(0) = \cancel{x}(0)$$

$$y(0) = 0.5$$

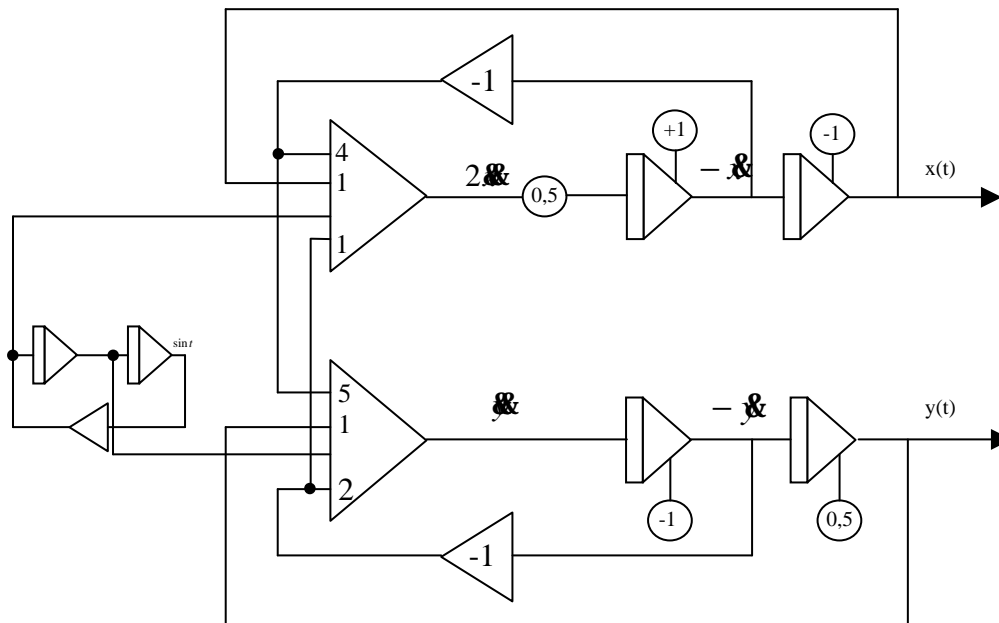
$$\cancel{x}(0) = -1$$

Átrendezve a legmagasabb rendű deriváltakra:

$$2\ddot{x} = \sin t - [4\dot{x} + \dot{y} + x]$$

$$\ddot{y} = \cos t - [5\dot{x} + 2\dot{y} + y]$$

A bemenetekre a  $-\sin(t)$ ,  $-\cos(t)$  függvényeket az előbb látható módon állítom elő, ahol a csillapító ág hiányzik ( $x = 0$ ).



Itt egy másik differenciál-egyenlet, ahol szintén van algebrai hurok, de ezt a hurkot a második derivált okozza. Hasonlóan járunk el, az első egyenletnél  $\dot{x}$ -ra, a másodikonál  $\dot{y}$ -ra rendezek.

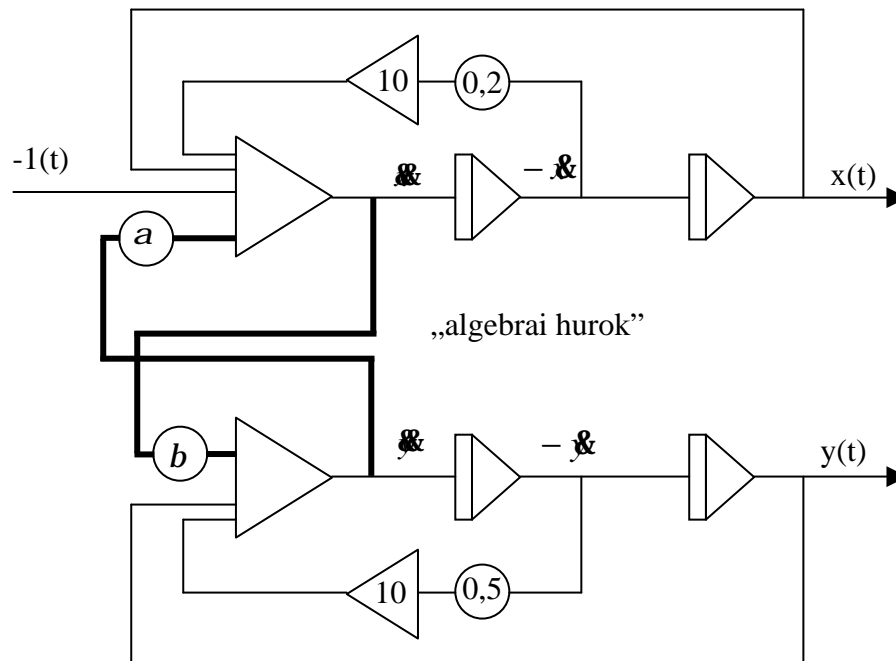
$$\dot{x} + a\dot{x} + 2x + x = 1(t)$$

$$\dot{y} + b\dot{y} + 5y = 0$$

Rendezve:

$$\dot{x} = 1(t) - (a\dot{x} + 2x + x)$$

$$\dot{y} = -(b\dot{y} + 5y)$$



A rendszer az algebrai hurok miatt csak elvileg működik, a valóságban biztos nem, ezért az algebrai hurkot eliminálni kell.

### Algebrai hurok kiküszöbölése:

Előzőekben az algebrai hurkot úgy kerültük ki, hogy összegzők helyett integrátorokat alkalmaztunk.

Továbbiakban lássunk egy másik módszert.

Kifejezem az első egyenletből az  $\dot{x}$ -t, a másodikból az  $\dot{y}$ -t, és ezeket behelyettesítem az ellenkező egyenletbe.

Tehát:

$$\dot{x} = 1(t) - (ax + 2x + y)$$

$$\dot{y} = -(bx + 5y + x)$$

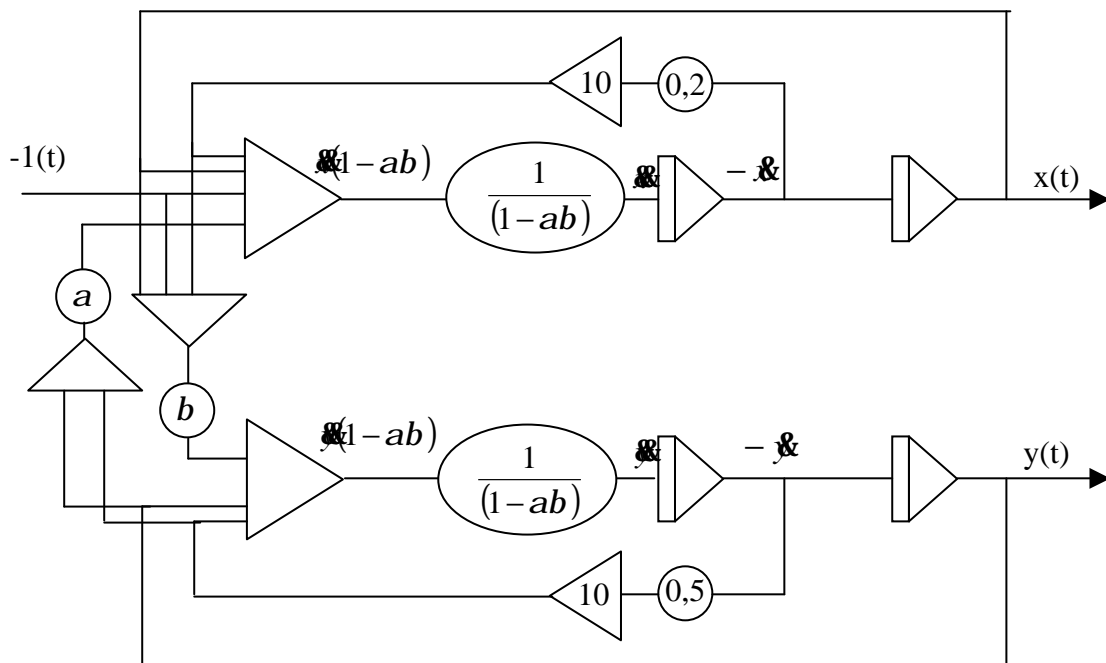
$$\dot{x} + abx + a5y + ay + 2x + x = 1(t)$$

$$\dot{x} + b1(t) - abx - b2x - bx + 5y + y = 0$$

Rendezve a Kelvin-Thomson visszavezetési elv értelmében:

$$\dot{x}(1-ab) = 1(t) - [2x + x - a(5y + y)]$$

$$\dot{x}(1-ab) = -[5y + y + b(1(t) - 2x - x)]$$

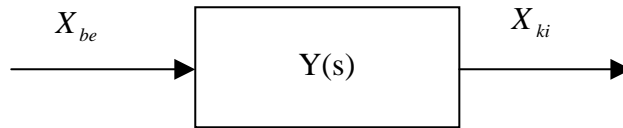


Látható, hogy itt már semmilyen algebrai hurok sincs.

Ha tehát kereszt kapcsolat van, és ebbe a legmagasabb deriváltak is szerepelnek, akkor algebrai hurkok keletkezhetnek, amit nekünk eliminálni kell.

Ennyit a differenciál egyenletekről, egyenlet-rendszerekről. Legtöbbször a szabályozástechnikában nem differenciál egyenletekkel dolgozunk, hanem átviteli függvényekkel.

### Átviteli függvény



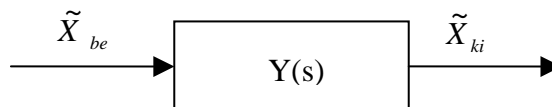
Átviteli függvény: tetszőleges bemenő jelre adott kimenő jel, feltéve, hogy ez a kimenet korlátos, tehát integráljának van egy korlátja.

Ebben az esetben képezhető a kimenő jel, és a bemenő jel Laplace transzformáltjának hányadosa.

$$Y(s) = \frac{X_{ki}(s)}{X_{be}(s)} = \frac{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0}{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0}; \quad n \geq m; \quad A_i \geq 0$$

Egy kétperces kitérő:

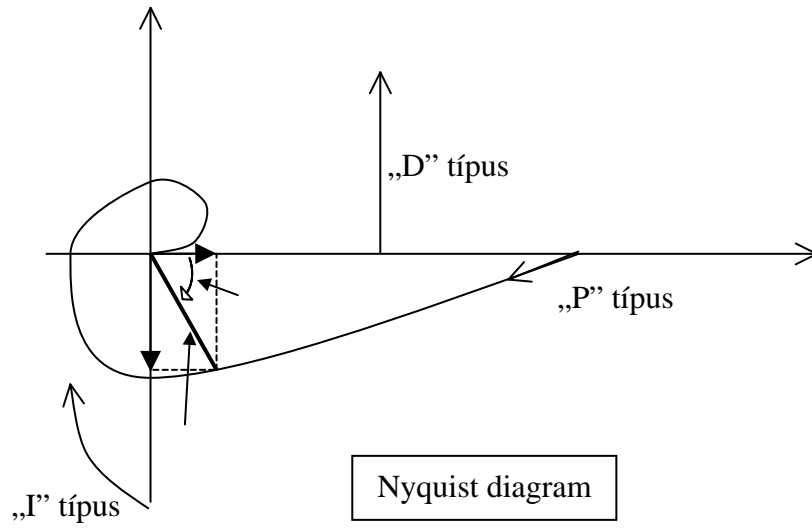
Nyquist és Bode diagramm:



$$Y(j\omega) = \frac{\tilde{X}_{ki}}{\tilde{X}_{be}} = \frac{B_0 + (j\omega)B_1 + (j\omega)^2 B_2 + \dots + (j\omega)^n B_n}{A_0 + (j\omega)A_1 + (j\omega)^2 A_2 + \dots + (j\omega)^n A_n} = \text{Re } Y(j\omega) + j \text{Im } Y(j\omega) =$$

$$= |Y(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

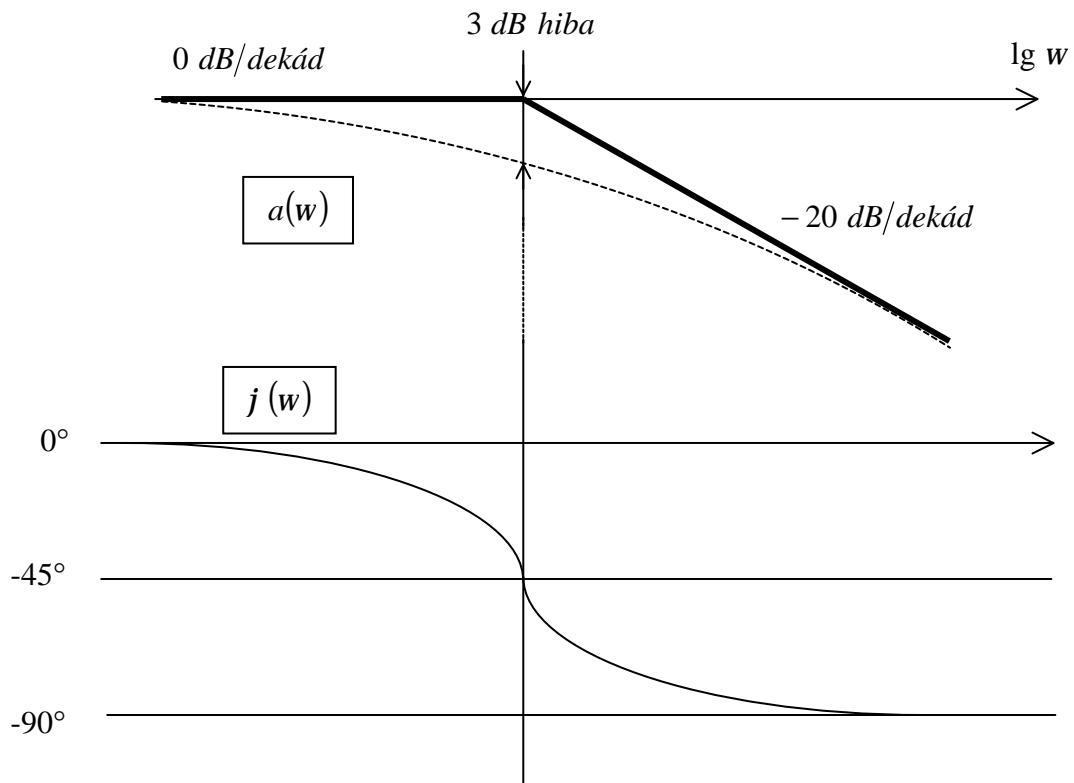
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im } Y(j\omega)}{\text{Re } Y(j\omega)}$$



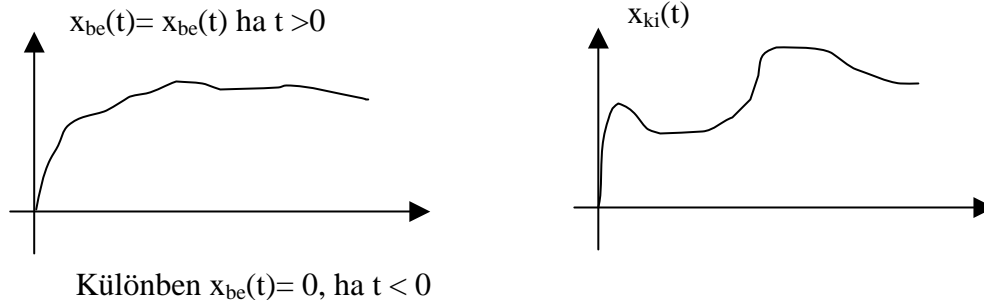
BODE

$$a(\omega) = 20 \lg |Y(j\omega)|$$

$$j(\omega) = \arctg \frac{\text{Im} Y(j\omega)}{\text{Re} Y(j\omega)}$$



Eddigiek esetén a szinusz volt a vizsgálójel.  
Most nézzük meg tetszőleges bemenőjel esetén:



Igaz :  $\int |x_{ki}(t)| dt = \text{korlátos}$

Definiálható:

$$\mathcal{A}\{x_{be}(t)\} = x_{be}(s)$$

$$\mathcal{A}\{x_{ki}(t)\} = x_{ki}(s)$$

definíció szerint:

$$Y(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} \left( = \underline{\underline{\text{átv. fv.}}} \right) = \frac{B_0 + B_1s + \dots + B_ms^m}{A_0 + A_1s + \dots + A_ns^n}$$

### Átviteli Függvény

Az átviteli függvényt a számolások egyszerűsítése miatt vezettük be, mint például a középiskolában a logaritmust, ahol pl. a szorzás összeadásra egyszerűsödik. Ebben az esetben pl. két sorba kötött hálózati elem eredő átviteli függvényét úgy kapom meg, hogy a tagok átviteli függvényét összeadom.

$$Y(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = \frac{B_ms^m + B_{m-1}s^{m-1} + \dots + B_0}{A_ns^n + A_{n-1}s^{n-1} + \dots + A_0}$$

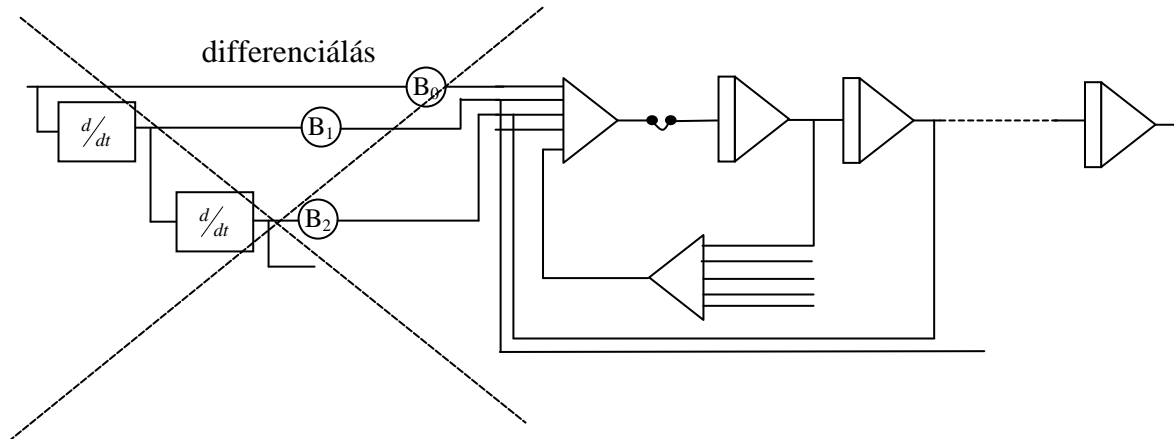
$$n \geq m; \quad A_i \geq 0$$

n értékének nagyobbak kell lenni, mint m, különben nem valódi törtet kapunk.

$$s = \frac{d}{dt}$$

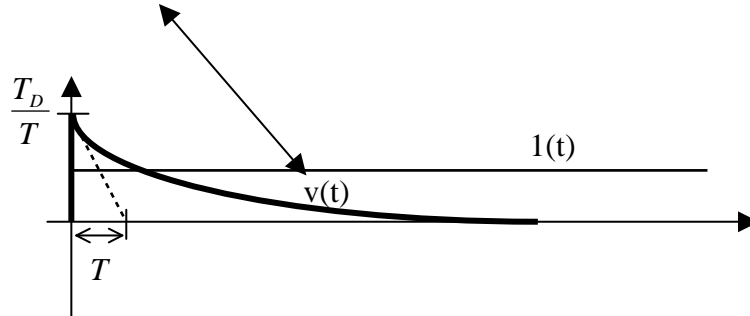
$$A_n x_{ki}^{(n)} + \dots + A_0 x_{ki} = B_m x_{be}^{(m)} + \dots + B_0 x_{be}$$

A Kelvin –Thomson visszavezetési elv alapján:



Ha mégis differenciálnunk kell, akkor a következő képletet realizálhatjuk:

$$\frac{sT_D}{1 + sT} = \text{''differenciálás''}$$



Most pedig tekintsünk meg néhány módszert, melyek a differenciálás műveletét kikerülni hivatottak.

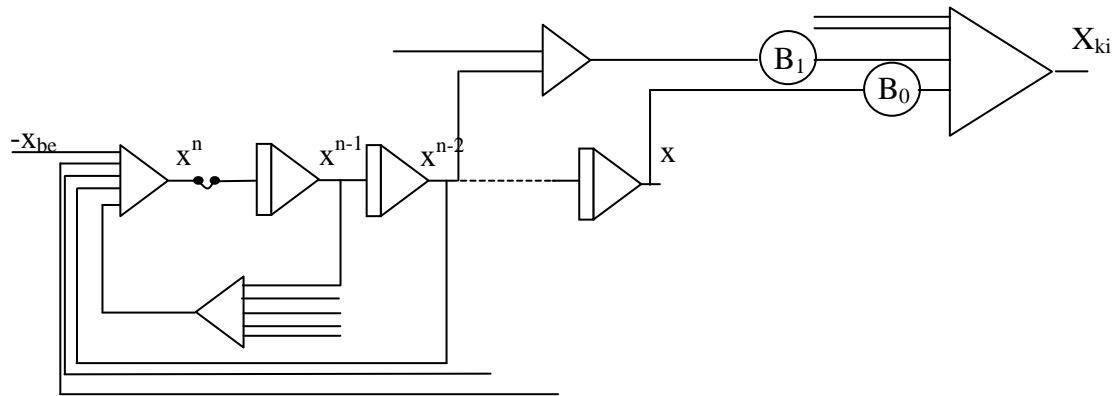
1. *Segédváltozás módszer*

Segédváltozó :  $X_s(s)$

$$Y(s) = \frac{X_{ki}(s)}{X_s(s)} \frac{X_s(s)}{X_{xe}(s)} = (B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0) \frac{1}{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0}$$

$$A_n x^{(n)} + A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_0 x = X_{be}$$

$$B_m x^{(m)} + B_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + B_0 x = X_{ki}$$



## 2. Közvetlen programozás

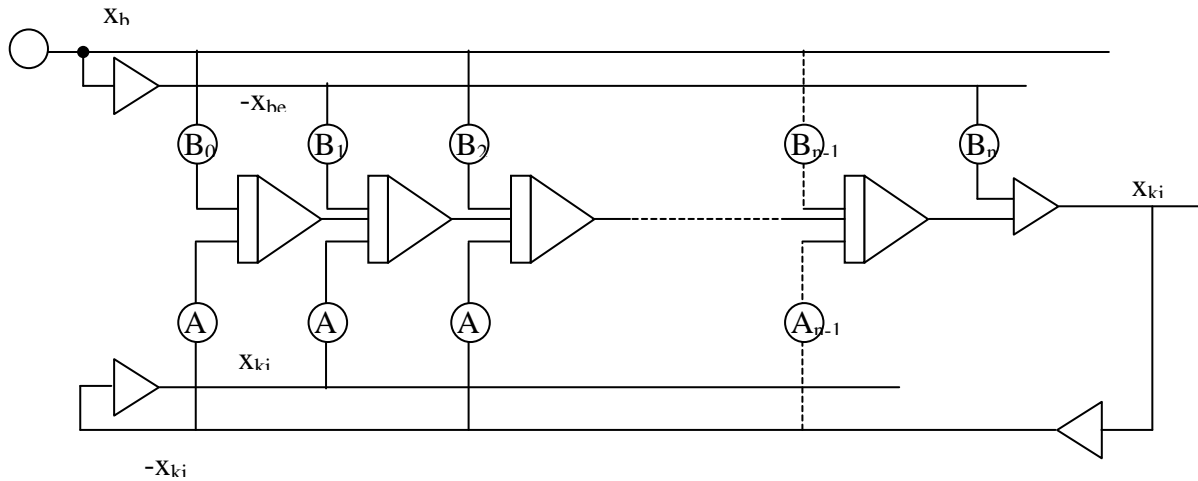
$n = m$  esetén,  $A_n = 1$

$$Y(s) = \frac{X_{ki}(s)}{X_{be}(s)} = \frac{B_n + B_{n-1} \frac{1}{s} + B_{n-2} \frac{1}{s^2} + \dots + B_0 \frac{1}{s^n}}{1 + A_{n-1} \frac{1}{s} + A_{n-2} \frac{1}{s^2} + \dots + A_0 \frac{1}{s^n}}$$

$$\begin{aligned} X_{ki}(s) &= B_n X_{be}(s) + \frac{1}{s} [B_{n-1} X_{be}(s) + A_{n-1} X_{ki}(s)] \\ &+ \frac{1}{s^2} [B_{n-2} X_{be}(s) + A_{n-2} X_{ki}(s)] \\ &\dots \\ &\dots \\ &+ \frac{1}{s^n} [B_0 X_{be}(s) + A_0 X_{ki}(s)] \end{aligned}$$

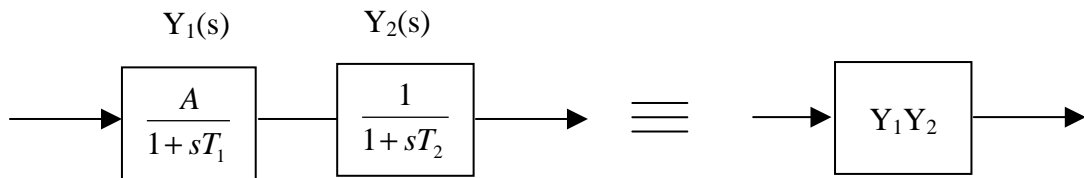


Általános átviteli függvény mindig előállítható n integrátor, és (2n+1) időkésés nélküli arányos tag megfelelő összekapcsolásával.



Átviteli függvénynél célszerű a gyöktényezőző alakot meghagyni, és részekre bontva végezzük el a programozást.

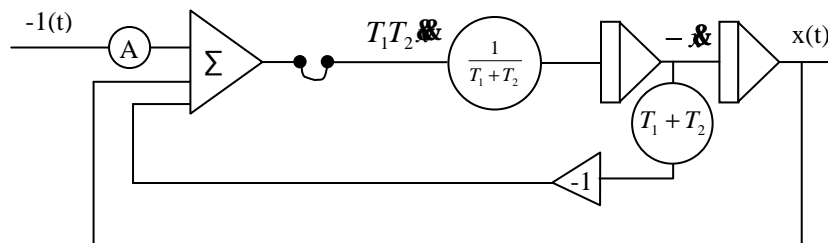
Példa:



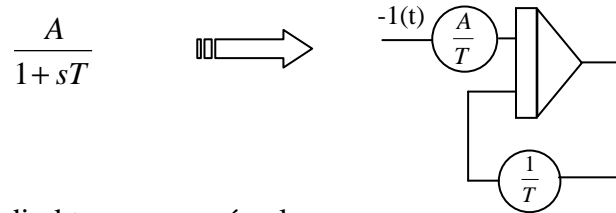
Az ábrához tartozó differenciál-egyenletek:

$$T_1 T_2 \ddot{x} + (T_1 + T_2) \dot{x} = A * 1(t)$$

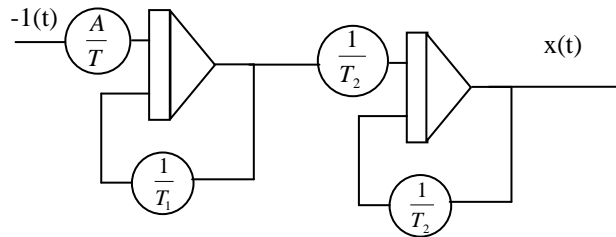
Ennek a megoldása Kelvin-Thomson elv alapján:



Ha a direkt módszert alkalmazzuk, akkor:



Így a teljes megoldás direkt programozással:



Ez a megoldás teljesen ekvivalens a Kelvin-Thomson féle megoldással, de láthatóan sokkal egyszerűbb, így célszerűbb a direkt programozást használni.

## PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA

Eddig lineáris SISO rendszerekkel foglalkoztunk. Azonban a valóságban nagyon sokszor előfordul, hogy nem lehet lineáris differenciál-egyenlettel leírni a rendszert, mert pl. több független és több függő változó van, vagy megosztott paraméterű a rendszer.

Ilyen megosztott paraméterű rendszerek leírására adottak a már jól ismert differenciál-egyenletek:

Hőterjedési vagy diffúziós egyenlet:

$$\nabla^2 u = k \frac{\partial u}{\partial t} + f$$

Laplace egyenlet:

$$\nabla^2 u = 0$$

Hullámegyenlet:

$$\nabla^2 u = k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f$$

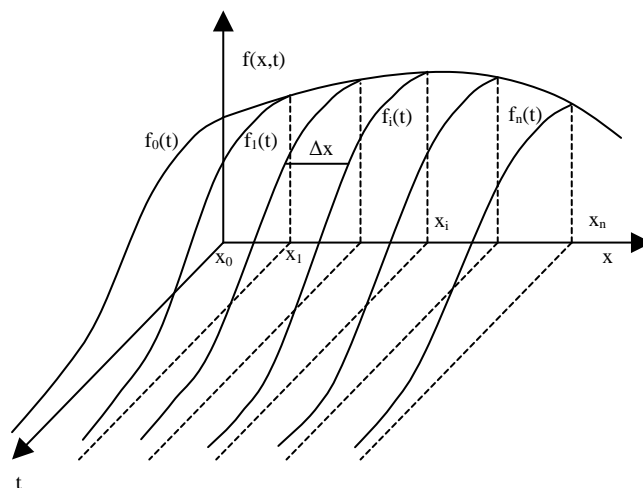
Membránegyenlet:

$$\nabla^4 u = k \frac{\partial u}{\partial t} + f$$

ahol:  $t$  az időt, mint független változót jelenti,  $f$  a gerjesztő függvényt,  $\nabla$  a Laplace-operátort,  $u$  pedig a függő változót jelenti.

Számítógépes modellezésnél mindig csak egy független változó van, az idő.

Adott egy kétváltozós függvény:



Az itt szereplő idő változót azonossá teszem a számítógép független változójával.

A másik változót egyenlő részekre,  $\Delta x$ -ekre osztom, és képezem a rész megoldásokat, az  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_i(t)$ ,  $f_n(t)$ -t.

A parciális deriváltak helyett definiálhatunk három féle differenciál-hányados:

- „előremenő” differencia hányados:

$$\left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_i} \cong \frac{f_{i+1}(t) - f_i(t)}{\Delta x}$$

- „hátramenő” differencia hányados:

$$\left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_i} \cong \frac{f_i(t) - f_{i-1}(t)}{\Delta x}$$

- „központos” differencia hányados:

$$\left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_i} \cong \frac{f_{i+\frac{1}{2}}(t) - f_{i-\frac{1}{2}}(t)}{\Delta x}$$

Nyilván egy parciális differenciálegyenlet által leírt folyamatot így visszavezethetünk koncentrált paraméterű differenciálegyenlet-rendszerre. A közelítés attól függ, hogy milyen távolságokat, milyen  $\Delta x$ -eket veszek. Tehát egy megosztott paraméterű rendszert koncentrált paraméterű rendszerrel helyettesítve hibát követelek el. Ezt a hibát meg kell határozni.

Elvégezve a számításokat azt tapasztaljuk, hogy a közelítés a  $\Delta x$  ill.  $\Delta x^2$ -től függ, az első, második, ill. harmadik differenciáhányados esetén. Legpontosabb közelítést a központos differencia hányados ad.

Nézzük meg, hogyan néznek ki a magasabb rendű központos differenciál-hányados képzési módszereket.

- a második parciális derivált közelítő értéke  $x=x_i$  helyen :

$$\left. \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \cong \frac{f_{i+1}(t) - 2f_i(t) + f_{i-1}(t)}{(\Delta x)^2},$$

- a harmadik parciális derivált közelítő értéke  $x=x_i$  helyen :

$$\left. \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=x_i} \cong \frac{f_{i+\frac{3}{2}}(t) - 3f_{i+\frac{1}{2}}(t) + 3f_{i-\frac{1}{2}}(t) + f_{i-\frac{3}{2}}(t)}{(\Delta x)^3}$$

illetve:

$$\cong \frac{f_{i+2}(t) - 2f_{i+1}(t) + 2f_{i-1}(t) + f_{i-2}(t)}{2(\Delta x)^3}$$

- a negyedik parciális derivált közelítő értéke  $x=x_i$  helyen :

$$\left. \frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^4} \right|_{x=x_i} \cong \frac{f_{i+2}(t) - 4f_{i+1}(t) + 6f_i(t) - 4f_{i-1}(t) + f_{i-2}(t)}{(\Delta x)^4}$$

Természetesen a pontosságot nem csak a  $\Delta x$ , és a különféle differenciálási módszer helyes megválasztásával lehet növelni, hanem azáltal is, hogy további mérési pontokat is felvesszünk.

Például a következő képletből látható, hogy az elsőrendű deriváltat nem csak két mérési pontból, hanem 4 pontból határozom meg.

$$\left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_i} \cong \frac{\frac{1}{12} f_{i-2}(t) - \frac{2}{3} f_{i-1}(t) + \frac{2}{3} f_{i+1}(t) + \frac{1}{12} f_{i+2}(t)}{\Delta x}$$

Ugyanígy lehet a magasabb rendű deriváltak pontosságát növelni:

$$\left. \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \cong \frac{-\frac{1}{12} f_{i-2}(t) - \frac{4}{3} f_{i-1}(t) - \frac{5}{2} f_i(t) + \frac{4}{3} f_{i+1}(t) - \frac{1}{12} f_{i+2}(t)}{(\Delta x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=x_i} \cong \frac{\frac{1}{8} f_{i-3}(t) - f_{i-2}(t) + \frac{13}{8} f_{i-1}(t) - \frac{13}{8} f_{i+1}(t) + f_{i+2}(t) - \frac{1}{8} f_{i+3}(t)}{(\Delta x)^3}$$

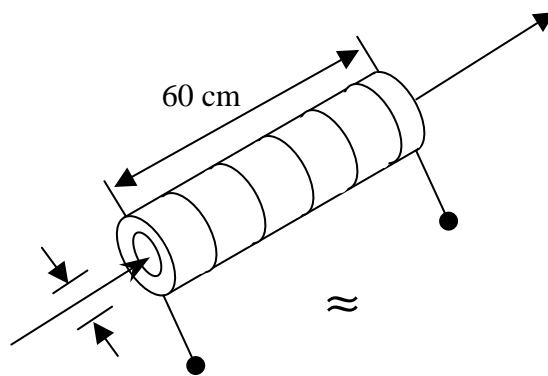
$$\left. \frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^4} \right|_{x=x_i} \cong \frac{-\frac{1}{6} f_{i-3}(t) - 2f_{i-2}(t) - \frac{13}{2} f_{i-1}(t) + \frac{28}{3} f_i(t) - \frac{13}{2} f_{i+1}(t) + 2f_{i+2}(t) - \frac{1}{6} f_{i+3}(t)}{(\Delta x)^4}$$

Hővezetés parciális differenciál egyenlete:

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial y(t, x)}{\partial t}$$

Adott kezdeti és peremfeltételek mellett határozzuk meg a megoldást!

Ilyen típusú differenciál egyenlet ír le például egy csőkemencét, amin átvezetünk valamilyen anyagot, és ezt elektromosan fűtjük. A bemenetem ráviszunk valamilyen festékanyagot, és ráégetjük.



További példa az aorta. Nézzük az aortában lévő áramlás-képet. Ha kíváncsiak vagyunk, hogy egy bizonyos helyen, egy adott időben milyen az áramláskép, akkor ezzel adott a két független változó a hely és az idő.

Legyen a cső esetében:

$$A=100$$

$$D > 0$$

$$x = 0..60\text{cm}$$

kezdeti feltételek:

$$y(0,x)=0,3$$

peremfeltételek:

$$y(t,0)=0,5$$

$$y(t,60)=0,9$$

Felosztjuk egyenletes szakaszokra az egész csőszakaszt, és keressük a megoldást  $x_1=10$ ,  $x_2=20$ ,  $x_3=30$ ,  $x_4=40$ ,  $x_5=50$  cm helyeken.

A centrális differenciál egyenlet:

$$\left. \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \right|_{x = x_k} = \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$100 \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{100} = \frac{dy_k}{dt}$$

Egyszerűsítés után, behelyettesítve:

$$k=1 \text{ esetén : } 0,5 - 2y_1 + y_2 = \frac{dy_1}{dt}$$

$$k=2 \text{ esetén: } y_1 - 2y_2 + y_3 = \frac{dy_2}{dt}$$

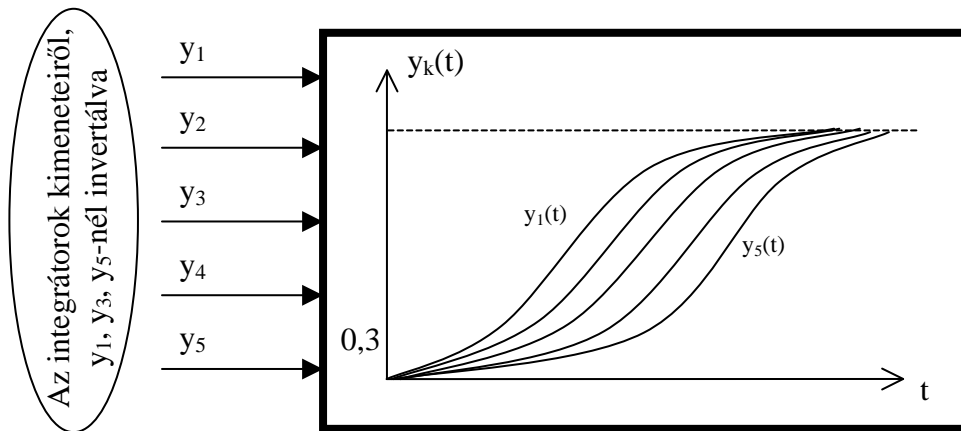
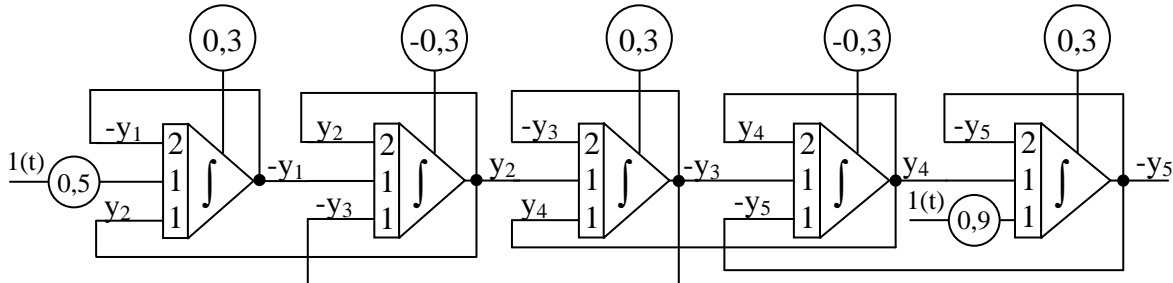
$$k=3 \text{ esetén: } y_2 - 2y_3 + y_4 = \frac{dy_3}{dt}$$

$$k=4 \text{ esetén: } y_3 - 2y_4 + y_5 = \frac{dy_4}{dt}$$

$$k=5 \text{ esetén: } y_4 - 2y_5 + 0,9 = \frac{dy_5}{dt}$$

Kezdeti feltételek:

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0,3$$



X-Y Plotter

Összefoglaló:

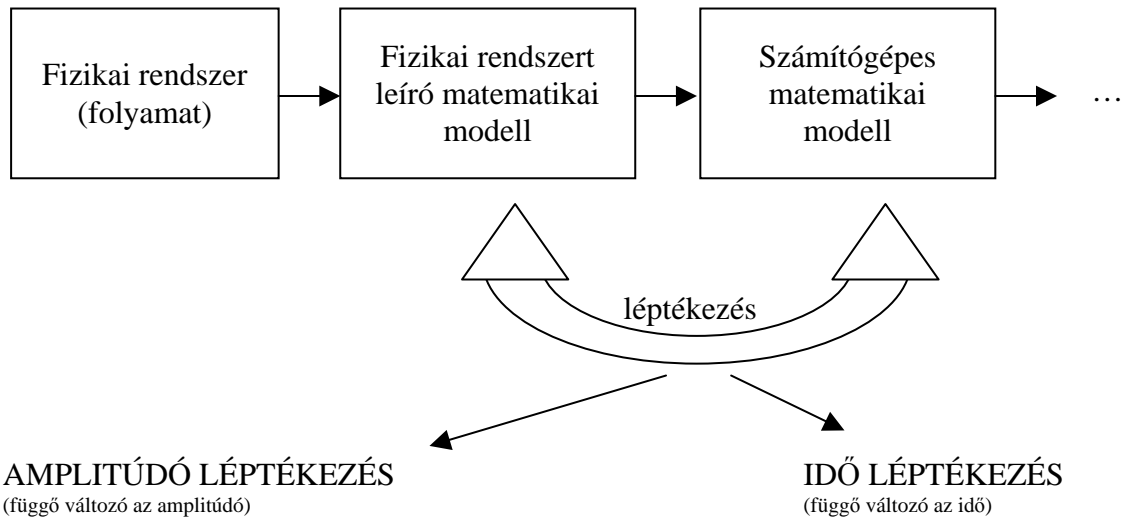
Megosztott paraméterű rendszereket parciális differenciál-egyenletekkel modelleztünk. A problémát az okozta, hogy egy valós rendszerben több függő és több független változó van, ezzel szemben számítógépen belül csak 1 függő változó van, az idő. Megoldásként az időt azonosá tesszük a számítógép független változójával, és a többi változót diszkrét helyeken vizsgálom. Definiáltunk előre-, hátramenő és központos differenciálhányados-képzési módszereket.

Ezzel hibát követünk el. A hiba nagysága attól függ, hogy milyen pontos a felosztás, illetve, hogy milyen differenciálhányados-képzési módszert választok.

Matematikailag bizonyítható, hogy az előre-, hátramenő differenciálhányados-képzési módszer pontossága  $\Delta x$ -tól, a központos módszer pontossága  $\Delta x^2$ -től függ. Ezért ajánlott a központos módszert használni. A pontosságot bármely módszernél tovább növelhetem, azzal hogy a mérési pontok számát növelem.



## AMPLITÚDÓ ÉS IDŐLÉPTÉKEZÉS



### Amplitúdó léptékezés

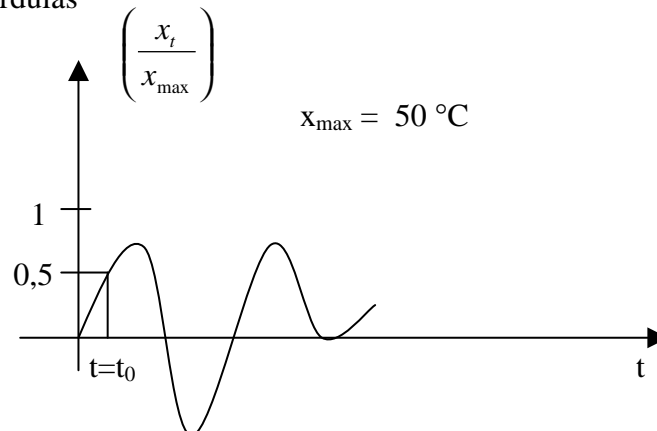
- 1) Normalizált változók módszere (NVM)
- 2) Dimenziós léptéktényezők módszere (DLM)

*Normalizált változók módszere (NVM)*

Fizikai változó  $\Leftrightarrow$  számítógépes változó

$$-1 \leq \left( \frac{x_t}{x_{\max}} \right) = \left( \frac{u_t}{u_{\max}} \right) \leq +1$$

Előnyök: - nincs mértékegység  
- nincs túlsordulás



$$\left(\frac{x}{x_{\max}}\right) = 0,5$$

$$t = 10^{30}$$

$$x(t = 10^{30}) = 0,5 * 50 = 25^\circ C$$

Példa:

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 20 * 1(t) \quad [x] = cm$$

$$x_{\max} = 40cm$$

$$\dot{x}_{\max} = 4 cm/s$$

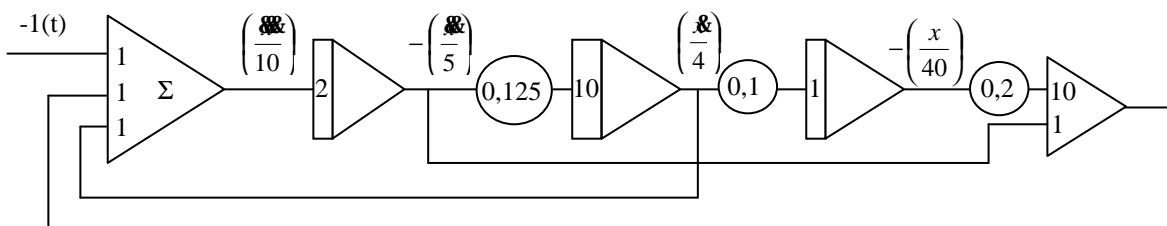
$$\ddot{x}_{\max} = 5 cm/s^2$$

$$\ddot{x}_{\max} = 10 cm/s^3$$

$$2 * 10 * \left(\frac{\ddot{x}}{10}\right) + 4 * 5 * \left(\frac{\dot{x}}{5}\right) + 5 * 4 * \left(\frac{x}{4}\right) + 40 * \left(\frac{x}{40}\right) = 20 * 1(t)$$

Egyszerűsítünk:

$$\left(\frac{\ddot{x}}{10}\right) + \left(\frac{\dot{x}}{5}\right) + \left(\frac{x}{4}\right) + 2 * \left(\frac{x}{40}\right) = 1(t)$$



Minden változó +1 és -1 tartományban fog változni.

### Dimenziós léptéktényezők módszere (DLM)

A dimenziós léptéktényezők módszer abból a mérnöki szemléletből indul ki, hogy ma már egy folyamatnál szinte minden mért érték elektromos jellé van alakítva, legyen az hőmérséklet, szint, nyomás,...

A jelek elektromos jellé való alakításának legfőbb előnye, hogy ezeket így jól tudjuk regisztrálni, detektálni, illetve a további átalakítások, műveletvégzések is egyszerűbbek.

$$\frac{U(t)}{U_{MAX}} = \frac{x(t)}{x_{MAX}} \rightarrow U(t) = \frac{U_{MAX}}{x_{MAX}} x(t) = Kx(t)$$

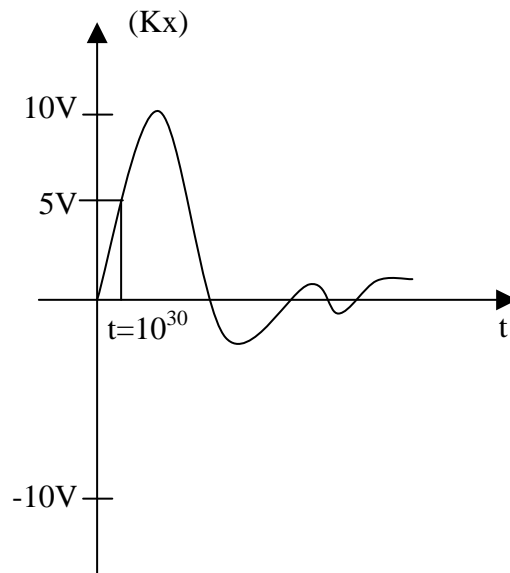
ahol: K – dimenziós léptéktényező

$$K \leq \frac{U_{MAX}}{x_{MAX}}$$

$$K = \frac{10V}{50^\circ C} = 0,2 \left[ \frac{^\circ C}{cm} \right]$$

$$(Kx)_{t=t_0} = 5V$$

$$x(t_0) = \frac{5V}{0,2 \text{ } ^\circ C/cm} = 25^\circ C$$



Az előző példánál maradva:

$$x_{max} = 40cm$$

$$\dot{x}_{max} = 4 \text{ cm/s}$$

$$\ddot{x}_{max} = 5 \text{ cm/s}^2$$

$$\dddot{x}_{max} = 10 \text{ cm/s}^3$$

$$x_{MAX} \rightarrow K_0 = \frac{10V}{40cm} = 0,25 \left[ \frac{V}{cm} \right]$$

$$\dot{x}_{MAX} \rightarrow K_1 = \frac{10V}{4 \text{ m/s}} = 2,5 \left[ \frac{Vs}{cm} \right]$$

$$\ddot{x}_{MAX} \rightarrow K_2 = 2 \left[ \frac{Vs^2}{cm} \right]$$

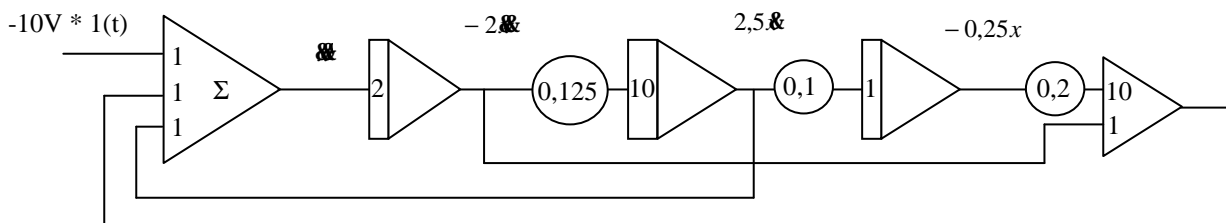
$$\dddot{x}_{MAX} \rightarrow K_3 = 1 \left[ \frac{Vs^3}{cm} \right]$$

DLM:

$$2(1 * \ddot{x}) + 2(2 \dot{x}) + 2(2,5 x) + 4(0,25x) = 20 * 1(t)$$

...

$$\ddot{x} + 2 \dot{x} + 2,5 x + 0,5 x = 10 * 1(t)$$



Látható, hogy teljesen azonos a két megoldás. Azonban itt a skálázásban az a különbség, hogy  $-10V$  és  $+10V$  között van minden változó. A maximális pontosságot azzal garantáljuk, hogy ebben az esetben egy  $\pm 10V$ -os műszerrel mérve nem fogunk mV-okat mérni, hanem a teljes méréstartományt kitölti a jel.

### Időléptékezés

Minden folyamat időben játszódik le. Vannak olyan folyamatok, amelyek a másodperc milliomed része alatt játszódik le (pl.:magnúzió). Ezeknél az folyamatok, mint információ adók sokkal gyorsabbak, mint a mi vevőink, mint például egy számítógép. Ezért ebben az esetben le kell „lassítani” a folyamatot, hogy fel tudjuk dolgozni a jelenséget, analizálni, vagy szintetizálni.

Ennek a fordítottja is előfordul. Például egy nagy katalizátorban a kémia folyamatoknak a nagy anyagmennyiség miatt órás, napos, esetleg hetes időállandójuk van. Ezeknek a tervezését természetesen úgy végezzük, hogy „felgyorsítjuk” a folyamatot.

számítógép  $\leftrightarrow$  fizika

$$\left( \frac{t}{t_{MAX}} \right) = \left( \frac{t}{t_{MAX}} \right) \rightarrow t = nt; t = \frac{t}{n}$$

ahol:  $n$  – időlépték tényező

$$n = \frac{t_{MAX}}{t_{MAX}}$$

ha  $n > 1$  – lassítás  
 $n < 1$  – gyorsítás  
 $n = 1$  – real-time üzem

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx\left(\frac{t}{n}\right)}{d\left(\frac{t}{n}\right)} = n \frac{dx\left(\frac{t}{n}\right)}{dt} = n \frac{dx_t(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2x\left(\frac{t}{n}\right)}{d\left(\frac{t}{n}\right)^2} = \dots = n^2 \frac{d^2x_t(t)}{dt^2}$$

....

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} = \frac{d^m x\left(\frac{t}{n}\right)}{d\left(\frac{t}{n}\right)^m} = \dots = n^m \frac{d^m x_t(t)}{dt^m}$$

$$X_{t_{MAX}}^{(1)} = \frac{X_{MAX}^{(1)}}{n}$$

$$X_{t_{MAX}}^{(2)} = \frac{X_{MAX}^{(2)}}{n^2}$$

....

$$X_{t_{MAX}}^{(m)} = \frac{X_{MAX}^{(m)}}{n^m}$$

Példa:

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x + x(t) = 20 * 1(t)$$

Időlépték változtatás:

$$2n^3\ddot{x} + 4n^2\dot{x} + 5n x + x(t) = 20 * 1(t)$$

$$X_{t_{MAX}} = 40cm$$

$$\dot{x}_{t_{MAX}} = 4 \frac{cm}{m}$$

$$\ddot{x}_{t_{MAX}} = 5 \frac{cm}{m^2}$$

$$\ddot{\ddot{x}}_{t_{MAX}} = 10 \frac{cm}{m^3}$$

Az időléptékezés megváltoztatja az amplitúdó maximális értékét.



Sorrend:

- 1 – Időléptékezés
- 2 – Amplitúdó léptékezés

Példa:

$$2\ddot{\ddot{x}} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} + 2x(t) = 20 * 1(t)$$

$$\ddot{\ddot{x}}_{\max} = 10 \frac{cm}{s^3}$$

$$\ddot{x}_{\max} = 5 \frac{cm}{s^2}$$

$$\dot{x}_{\max} = 4 \frac{cm}{s}$$

$$x_{\max} = 10cm$$

n = 2 (kétszeres lassítás)

1.) Időléptékezés:

$$2n^3 \ddot{\ddot{x}} + 4n^2 \ddot{x} + 5n \dot{x} + 2x(t) = 20 * 1(t)$$

$$16 \ddot{\ddot{x}} + 16 \ddot{x} + 10 \dot{x} + 2x_t(t) = 20 * 1(t)$$

2.)

Amplitudóléptékezés:

$$\ddot{\ddot{x}}_{\max} = \frac{\ddot{\ddot{x}}_{\max}}{n^3} = \frac{10}{8} = 1,25 \left[ \frac{cm}{s^3} \right] \quad K_3$$

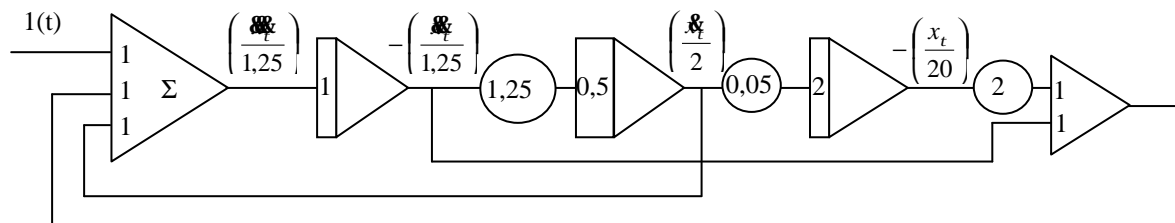
$$\ddot{x}_{\max} = \frac{\ddot{x}_{\max}}{n^2} = \frac{5}{4} = 1,25 \left[ \frac{cm}{s^2} \right] \quad K_2$$

$$\dot{x}_{\max} = \frac{\dot{x}_{\max}}{n} = \frac{4}{2} = 2 \left[ \frac{cm}{s} \right] \quad K_1$$

$$x_{t_{\max}} = 20 \left[ cm \right] \quad K_0$$

$$16 * 1,25 \left( \frac{\ddot{\ddot{x}}}{1,25} \right) + 16 * 1,25 \left( \frac{\ddot{x}}{1,25} \right) + 10 * 2 \left( \frac{\dot{x}}{2} \right) + 2 * 20 \left( \frac{x_t}{20} \right) = 20 * 1(t)$$

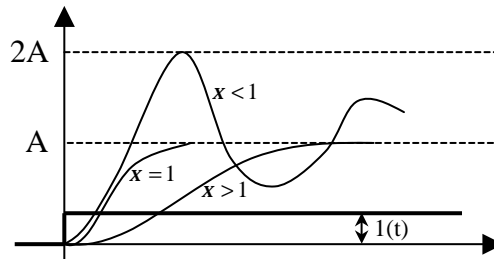
$$\left( \frac{\ddot{\ddot{x}}}{1,25} \right) + \left( \frac{\ddot{x}}{1,25} \right) + \left( \frac{\dot{x}}{2} \right) + \left( \frac{x_t}{20} \right) = 1(t)$$



## VÁLTOZÓK MAXIMÁLIS ÉRTÉKEINEK MEGHATÁROZÁSA

1. Először nézzünk egy másodrendű rendszert:

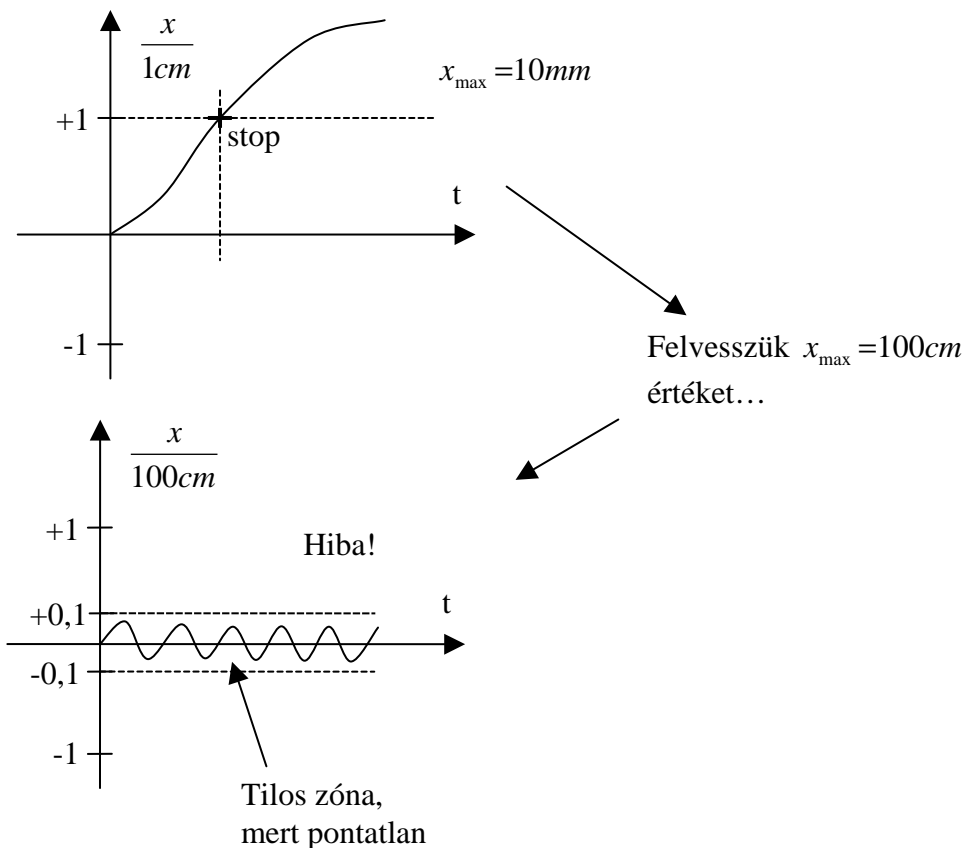
$$T^2 \ddot{x} + 2xT \dot{x} + x(t) = A * 1(t)$$



Másodrendű rendszerekre igaz:

$$A < x_{\max} < 2A$$

2. Becslés (közelítés maximális értékre)



Két probléma merülhet fel a maximális értékkel kapcsolatban:

- Alábecsült maximális érték
- Túlbecsült maximális érték

Tudunk-e valami harmadik módszert, ami célra vezető?

Tetszőleges rendű rendszerek esetén:

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_1 \dot{x}(t) + A_0 x(t) = A * 1(t)$$

Az összes kezdeti feltétel zérus, azaz a rendszer energiamentes.

A differenciál egyenlet annyiban különbözik a algebrai egyenletektől, hogy nem csak a rendszer stady-state állapotát, hanem a rendszer dinamikáját, a tranziens is leírja.

Minden mérnöki rendszer stabilnak tervezendő. Ha stabil, akkor:

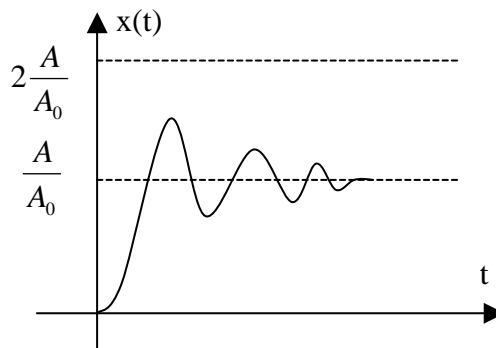
$T = \infty \rightarrow$  az összes derivált 0-ra csengett le, azaz előállt az állandósult állapot:

$$A_0 x(t) = A * 1(t) \rightarrow x_{(t=\infty)} = \frac{A}{A_0}$$

Az, hogy milyen módon áll be az

$\frac{A}{A_0}$  helyezethez, a többi tényezőtől is függ.

Általában igaz, hogy ha  $n > 2$  akkor túllendüléssel áll be.



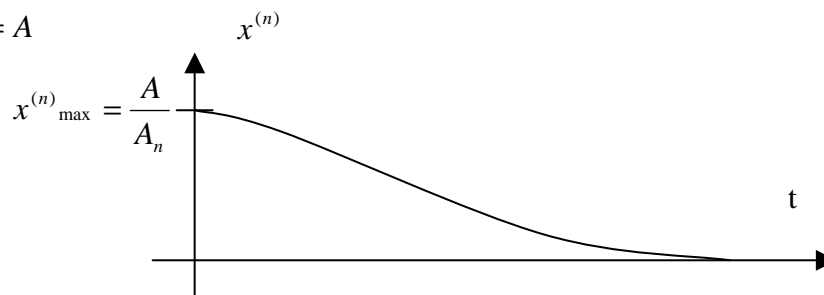
$$\frac{A}{A_0} \leq x_{\max} \leq 2 \frac{A}{A_0}$$



Ezt választom maximális értéknek.

$T = 0$  – ban:  $x(t) = 0$ .

$$A_n x^n = A * 1(t) = A$$





Egyenlő együtthatók szabálya (Jackson szabály)

$$x_{\max} = 2 \frac{A}{A_0}$$

$$\frac{A}{A_n} A_n \left( \frac{x^n}{A/A_n} \right) + x_{\max}^{(n-1)} A_{n-1} \frac{x^{(n-1)}}{x_{\max}^{(n-1)}} + \dots + 2 \frac{A}{A_0} A_0 \left( \frac{x}{2A/A_0} \right) = A * 1(t)$$

$$A \left( \frac{x^n}{A/A_n} \right) + x_{\max}^{(n-1)} A_{n-1} \frac{x^{(n-1)}}{x_{\max}^{(n-1)}} + \dots + 2A \left( \frac{x}{2A/A_0} \right) = A * 1(t)$$

Ebből a normalizált differenciál - egyenletből kiolvashatók a maximális értékek, ha az együtthatókat közel egyformára választjuk.

$$\begin{aligned} x_{\max}^{(n-1)} A_{n-1} \approx A &\rightarrow x_{\max}^{(n-1)} = \frac{A}{A_{n-1}} \\ x_{\max}^{(n-2)} A_{n-2} \approx A &\rightarrow x_{\max}^{(n-2)} = \frac{A}{A_{n-2}} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x_{\max}^{(n-i)} = \frac{A}{A_{n-i}}}$$

Példa:

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x + 2x(t) = 20 * 1(t) \quad [x] = cm$$

$$\ddot{x}_{\max} = 10 \frac{cm}{s^3}$$

$$\dot{x}_{\max} = 5 \frac{cm}{s^2}$$

$$x_{\max} = 4 \frac{cm}{s}$$

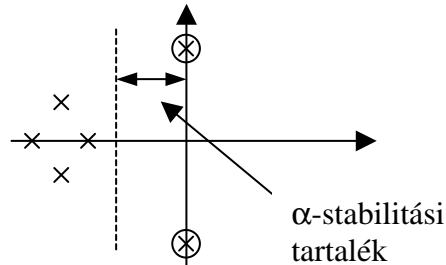
$$x_{\max} = 20 \text{ cm}$$

Példa:

$$4\ddot{x} + 25\dot{x} + 100x(t) = 50 * 1(t)$$

Változó maximális értéke	Jackson szabállyal	Tényleges max. érték
$\ddot{x}_{\max}$	50	50
$\dot{x}_{\max}$	10	7,5
$x_{\max}$	2	1,6
$x_{\max}$	1	0,8

Itt látható, hogy  $\dot{x}_{\max}$  értéke kisebb, mint ami a képlet alapján kijönne. Ennek az a magyarázata, hogy a Jackson szabály a kritikus helyzetet adja meg, a deriváltak maximális értéke mindig kisebb. Ez az alábbi ábrával magyarázható. Mindig hagyni kell egy stabilitási tartalékot.

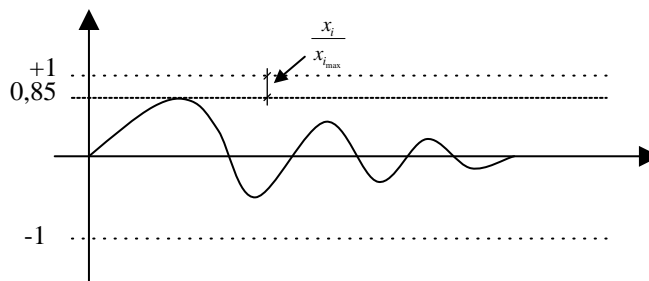


Példa:

$$10x^{(4)} + 5\ddot{x} + 3\dot{x} + 0,5x + 0,1x(t) = 20 * 1(t)$$

Változó maximális értéke	Jackson szabállyal	Tényleges max. érték
$x^{(4)}_{\max}$	2	2
$\ddot{x}_{\max}$	4	2,2
$\dot{x}_{\max}$	6	6
$x_{\max}$	36	33,4
$x_{\max}$	400	277

Ezekkel a közelítő maximális értékekkel elvégzem a szimulációt. Minden változónak bele kell esni a +1,-1 tartományba.



## PARAMÉTEROPTIMALIZÁLÁS

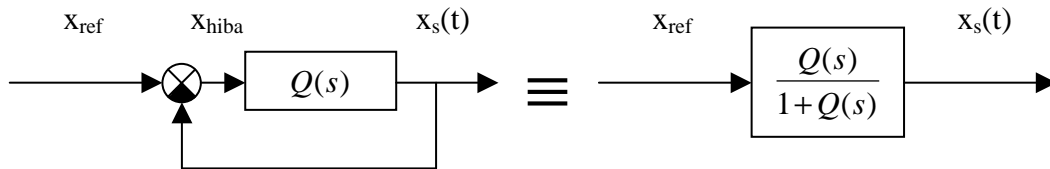
Tartalom:

- Optimalizálási kritériumok
- Optimalizálási kritériumok számítása
- Gyakorlati módszerek a paraméteroptimalizálásra

### Optimalizálási kritériumok

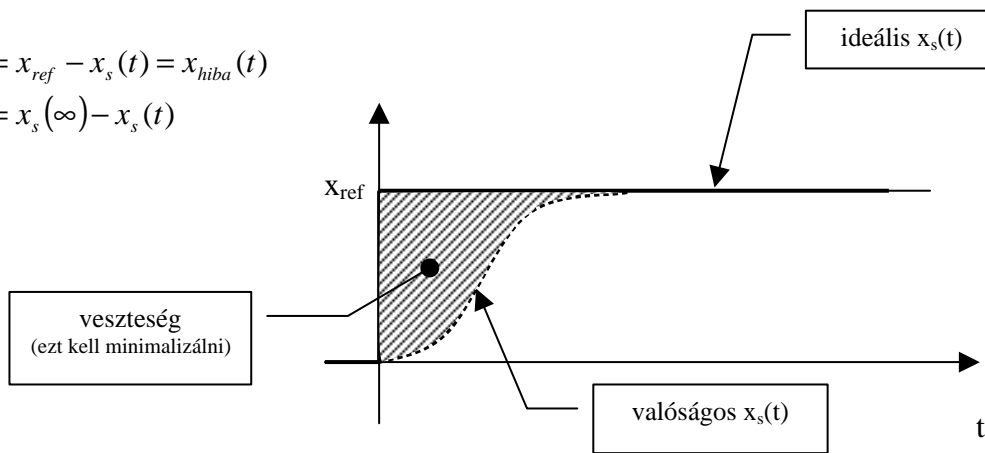
$$I = \int_0^{\infty} F\{x(t), t\} dt = \min$$

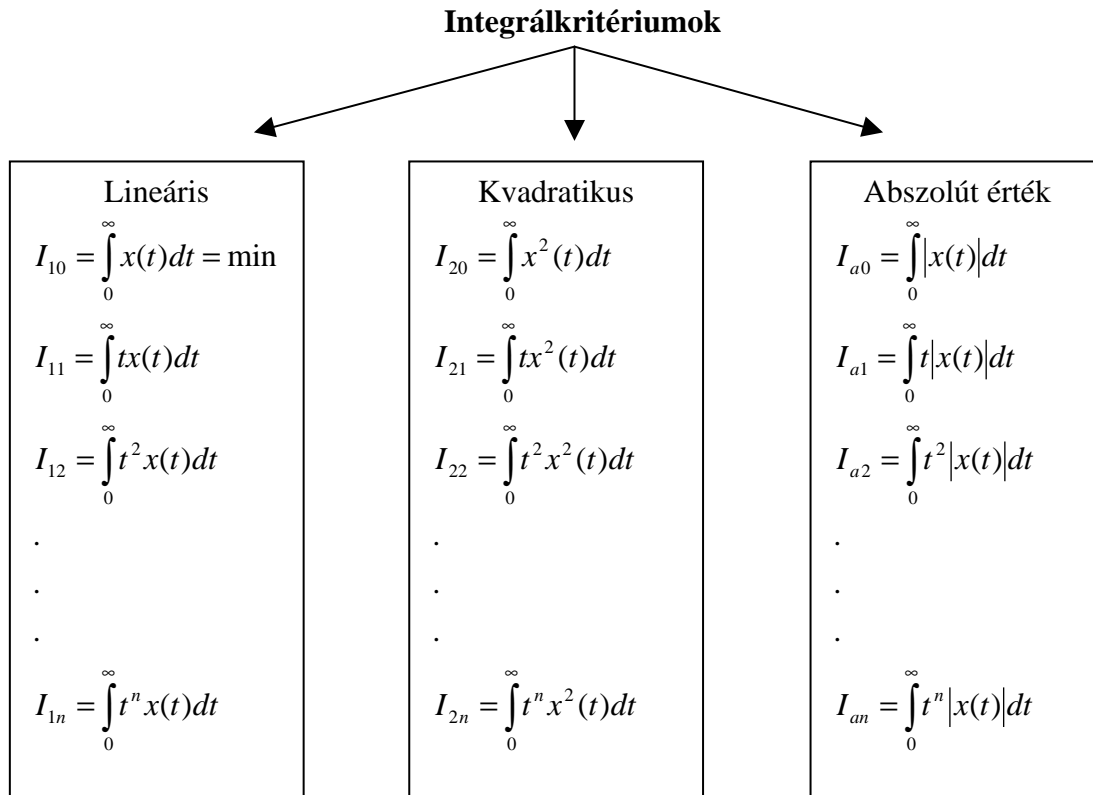
$x(t)$  lehet:



$$x(t) = x_{ref} - x_s(t) = x_{hiba}(t)$$

$$x(t) = x_s(\infty) - x_s(t)$$





Az, hogy melyiket választjuk, mindig folyamatfüggő, azonban vannak bizonyos általános törvényszerűségek.

Lineáris kritériumot akkor a használunk, amikor a folyamat aperiodikus.

Kvadratikus kritériumot periodikus, míg az abszolút érték módszert mind aperiodikus, mind periodikus rendszernél alkalmazhatjuk. Legutóbbi hátránya, hogy a vele végzett számítások bonyolultak.

### Lathroph és társai féle „8”-as

Lathroph és társai definiáltak egy nyolcast, mely az előbb vázolt rengeteg lehetőség közül 8-ra csökkenti azon kritériumok számát, melyek közül választhatunk.

Ez a nyolcas a következő:

- 1)  $\int x(t)dt$
- 2)  $\int tx(t)dt$
- 3)  $\int t^2x(t)dt$
- 4)  $\int x^2(t)dt$
- 5)  $\int tx^2(t)dt$
- 6)  $\int t^2x^2(t)dt$
- 7)  $\int |x(t)|dt$
- 8)  $\int t|x(t)|dt$

Ezeket összefoglaló néven ITAE (*Integral of Time Absolute-value of Error*) kritériumoknak nevezzük.

Eddig a kritériumokat ismertettem, most nézzük a kritériumok számításának különböző módszereit:

### Optimalizálási kritériumok számítása

*I*<sub>10</sub> számítása

$$I_{10} = \int_0^{\infty} x(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} X(s) = X(0) = \min$$

*Példa:*

$$W(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \text{ (aperiodikus folyamat)}$$

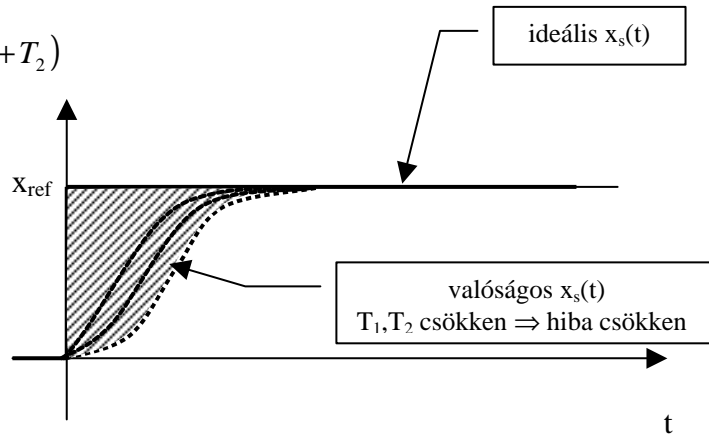
bemenőjel:

$$x(t) = 1(t)$$

$$X(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \frac{1}{s} = \dots = \frac{A(T_1+T_2) + sA(T_1T_2)}{1+s(T_1+T_2) + s^2T_1T_2}$$



$$I_{10} = X(0) = A(T_1 + T_2)$$



$I_{20}$  számítása

$I_{10}$  számításához a Parseval tételt használjuk, ami a következő:

$$\text{Parseval-tétel: } \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X(-s)X(+s) ds$$

$X(-s)$  és  $X(+s)$   $x(t)$  kétoldali Laplace-transzformáltjai.  
ahol:

$$X(+s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$X(-s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{+st} dt$$

Ha a  $X(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$  (racionális törtfüggvény alak), akkor igaz a következő:

$$I_{20} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{C(-s)C(+s)}{D(-s)D(+s)} ds$$

$$C(s) = C_{n-1}s^{n-1} + C_{n-2}s^{n-2} + \dots + C_0$$

$$D(s) = D_n s^n + D_{n-1}s^{n-1} + D_{n-2}s^{n-2} + \dots + D_0$$

Példa:

Adott egy folyamat:

$$W(s) = \frac{A}{1 + 2xT_s + T^2 s^2} \quad (\text{periodikus})$$

bemenőjel:

$$x(t) = 1(t)$$

$$X(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{1 + 2xT_s + T^2 s^2} \frac{1}{s} = \dots = \frac{A(2xT + sT^2)}{1 + 2xT_s + T^2 s^2}$$

Ekkor:

$$C_0 = 2AxT \quad C_1 = AT^2 \\ D_0 = 1 \quad D_1 = 2xT \quad D_2 = T^2$$

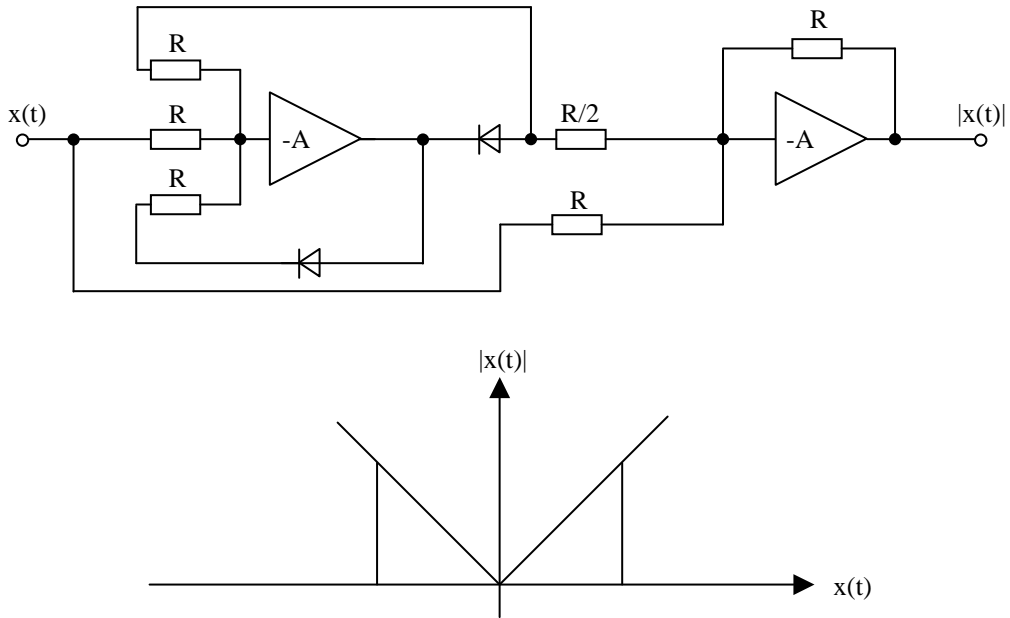
$$I_{20} = \frac{C_1^2 D_0 + C_0^2 D_2}{2D_0 D_1 D_2} \Rightarrow I_{20} = \frac{A^2 T^4 + 4A^2 x^2 T^4}{2 * 2xT * T^2} = \frac{A^2 T(1 + 4x^2)}{4x}$$

Mikor lesz  $I_{20}$  minimum?

$$\frac{\partial I_{20}}{\partial x} = \dots = \frac{A^2 T(4x^2 - 1)}{4x^2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0.5}}$$

*I<sub>a0</sub> számítása*

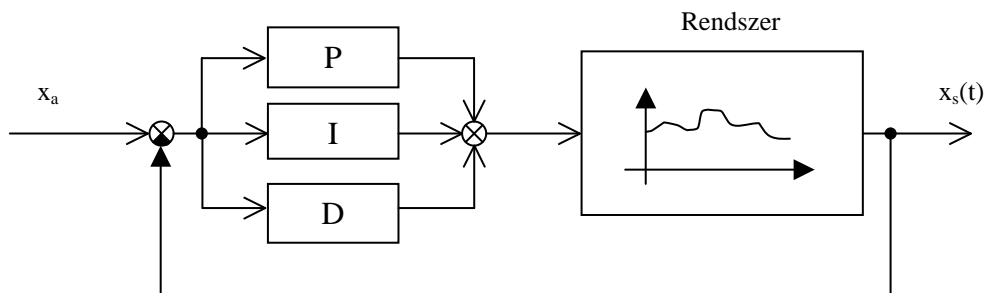
Egy sokak által már jól ismert megoldás van a segítségünkre:



Ebben az esetben ahogy  $n$  értéke növekszik, egyre bonyolultabbá válik a számolás, ezért alkalmazunk különféle gyakorlati módszereket.

*Gyakorlati módszerek a paraméteroptimalizálásra*

Szabályozott folyamatok





Zieglen-Nicholas módszer:

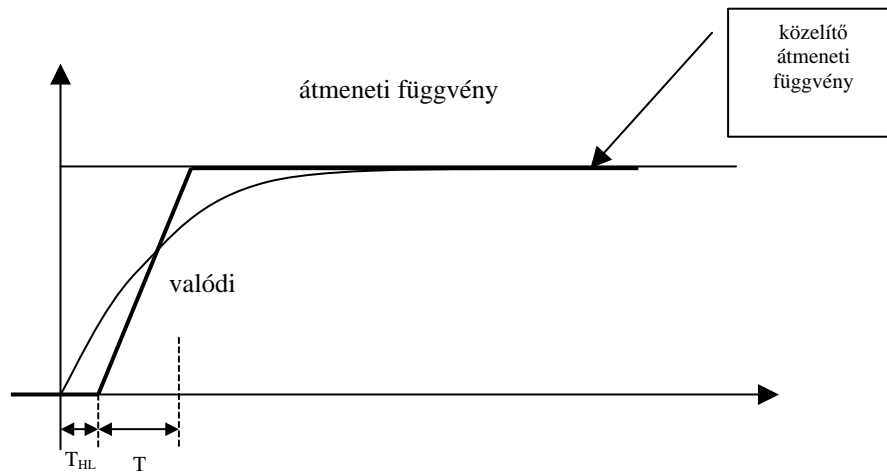
- I és D csatornát kiiktatja, így csak a proporcionális csatorna marad.
- Beállítja a szabályozott jellemzőre a kritikus értéket P csatornán keresztül.
- 2 paramétert vár :  $T_{per}$ ,  $K_{krit}$  (periódus idő, kritikus körerősítés)

Optimális Szabályozó paraméter	$K_{opt}$	$T_I$	$T_D$
P	$0,5 K_{krit}$	$\infty$	0
PI	$0,6 K_{krit}$	$0,85 T_{per}$	0
PID	...	...	...

Egy nagy hátránya van ennek a módszernek, mégpedig az, hogy a méréshez be kell lengetni a rendszert, amit nem minden esetben tehetünk meg.

Azon folyamatok esetén, ahol a belengetés nem megengedhető, a következő módszert használhatjuk:

Chien – Hrones – Reswrich módszer:

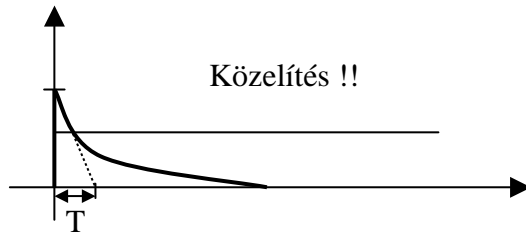


ahol:

- $T_{HL}$  („látszólagos” holtidő)
- $T$  (rendszer időállandója)

P	$K_{opt}$
PI	$K_{opt}, T_{Iopt}$
PD	$K_{opt}, T_{Dopt}$
PID	$K_{opt}, T_{Iopt}, T_{Dopt}$

$$sT_D \cong \frac{sT_D}{1+sT} \text{ (Ezt valósítjuk meg.)}$$



*Kessler módszer:*

3-féle rendszer-közelítés:

$$\begin{aligned} - & \frac{e^{-sT_{HL}}}{1+sT} \\ - & \frac{e^{-sT_{HL}}}{(1+sT_1)(1+sT_\Sigma)} \\ - & \frac{e^{-sT_{HL}}}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_\Sigma)} \end{aligned}$$

Példa:

$$\frac{A}{(1+s5)(1+s2)(1+s0,5)(1+s0,02)} = \frac{A}{(1+s5)(1+s2,52)}$$

$$T_\Sigma = 2 + 0,5 + 0,02$$

$$\dots \approx \frac{A}{(1+s5)(1+s2)(1+s0,52)}$$

**FOLYAMATIDENTIFIKÁCIÓ**  
inverz feladat

**Folyamatidentifikáció:**

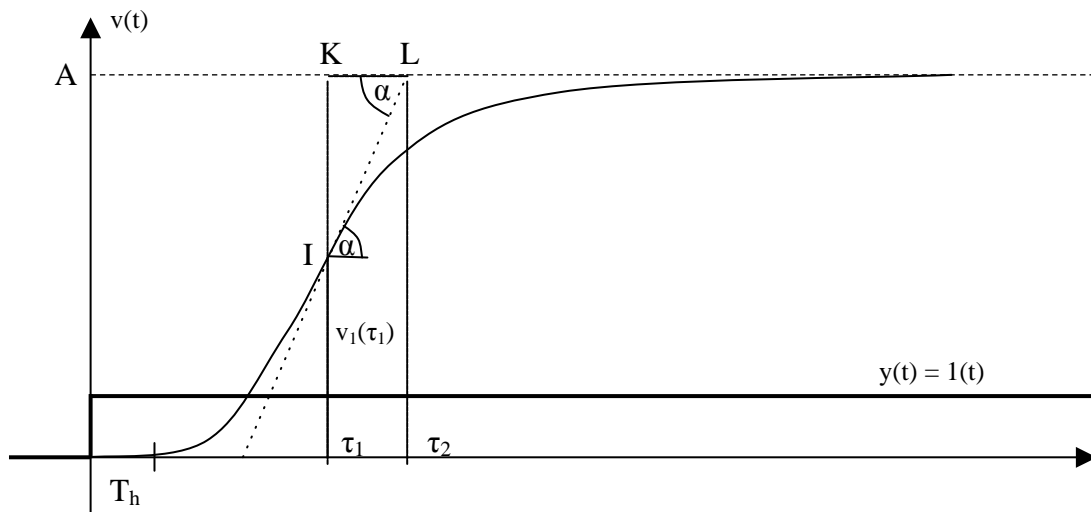
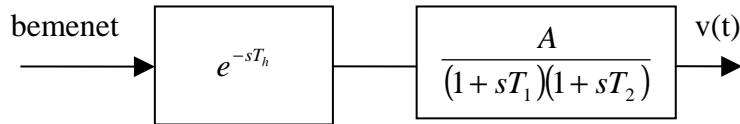
Méréseket végzünk, és a mérési eredmények kiértékeléséből meghatározzuk a modelt, model-  
struktúrát. Általában, a differenciál egyenlettel leírt rendszereknél definiáljuk, milyen  
konstansok, kezdeti feltételek legyenek, tehát adva van a partikuláris megoldás összes  
feltétele. Ennek a fordítottja, az inverz feladat, amikor nem tudok semmit a rendszerről, és  
meg kell határozni ezeket a paramétereket, a rendszerjellemzőket, a kapcsolódásokat.

Adott egy szürke doboz. Előzetes orvosi vizsgálatok tisztázzák a helyzet felépítését, hány  
elemű a rendszer, hogy kapcsolódnak (lánc rendszer, anya rendszer, ...), tehát a több száz  
éves kutatások tisztázták a struktúrát. Ilyenkor a folyamat identifikáció legegyszerűbb  
esetével állunk szembe. Feladat az, hogy a kvalitatív jelenségeket kvantitáivá,  
megfoghatóbbá, mérhetőbbé kell tenni. (pl.: Marquard módszer)

- 1) Marguard módszer (A leggyorsabb konvergenciát adja, a négyzetes hiba  
minimalizására szolgáló módszer)
- 2) Grafikus módszerek (A rendszer átmeneti függvényét közelítik)
  - a – Bleehan – Fisher módszer (ld.: jegyzet)
  - b – Cohn - Brues módszer (ld.: jegyzet)
  - c – Átmeneti függvényt közelítő módszer (nagyon gyakori)
- 3) Integráló módszer
- 4) Számítógépes optimalizációs módszer

2/c - Átmeneti függvényt közelítő módszer

A rendszer közelítő átviteli függvénye:  $Y(s) = A \frac{e^{-sT_h}}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$



$$\overline{IK} = A - v_1(\tau_1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{IK}}{\overline{KL}} = \frac{dv_1(\tau_1)}{dt} \rightarrow \overline{KL} = \frac{\overline{IK}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = A * 1(t)$$

legyen  $a_2 = T_1 T_2$

$$a_1 = (T_1 + T_2)$$

$$a_2 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = A * 1(t)$$

az egész sort integrálva:

$$a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) + \int_0^t v(t) dt = A * t$$

„I” pontban igaz, hogy :  $a_2 = 0$

$$a_2 \frac{dv(t_1)}{dt} + v(t_1) = A \rightarrow a_2 = \frac{A - v(t_1)}{\frac{dv(t_1)}{dt}}$$

ha  $T_1=T_2$ , akkor:

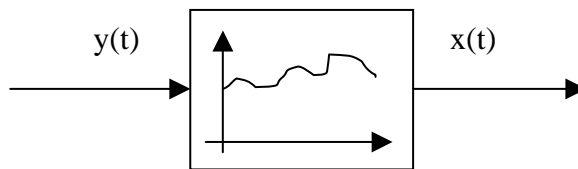
$$a_2 \frac{dv(t_2)}{dt} + a_1 v(t_2) + \int_0^{t_2} v(t_2) dt = A * t_2 \rightarrow a_2 = \frac{A t_2 - a_1 v(t_2) - \int_0^{t_2} v(t_2) dt}{\frac{dv(t_2)}{dt}}$$

*Holtidő meghatározása:*  
(gyakorlati módszer)

A módszer lényege, hogy a bemenetre  $10 * 1(t)$ -t teszek, rövid ideig, majd „fékezem”  $-10 * 1(t)$ -vel.

### 3 – Integráló módszer

A rendszert egy fekete doboznak tekintem, semmilyen információval nem rendelkezek róla.



$$A_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = A * 1(t)$$

$$x(0) = x^2(0) = \dots = x^{n-1}(0) = 0$$

$$y(t) = 1(t) \rightarrow x(t) = v(t)$$

Legyen  $t = t$ .

Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát n-szer:

$$A_n v_0(t) + A_{n-1} \int v(t) dt + \dots + A_1 \int \dots \int v(t) dt^{n-1} - A \frac{t^n}{n!} = - \int \dots \int v(t) dt^n$$

Legyen:

$$\int v(t) dt = v_1(t)$$

$$\iint v(t) dt^2 = v_2(t)$$

.

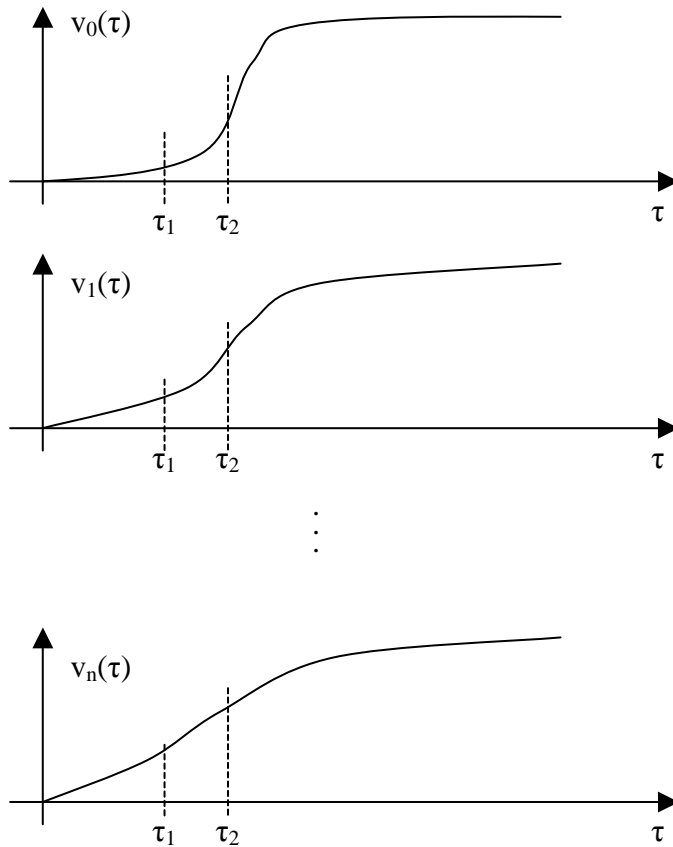
.

.

$$\int \dots \int v(t) dt^n = v_n(t)$$

Így az egyenlet a következőképp néz ki:

$$A_n v_0(t) + A_{n-1} v_1(t) + \dots + A_1 v_{n-1}(t) - A \frac{t^n}{n!} = -v_n(t)$$



ha  $t = t_1$

$$A_n v_0(t_1) + A_{n-1} v_1(t_1) + \dots + A_1 v_{n-1}(t_1) - A \frac{t_1^n}{n!} = -v_n(t_1)$$

ha  $t = t_2$

$$A_n v_0(t_2) + A_{n-1} v_1(t_2) + \dots + A_1 v_{n-1}(t_2) - A \frac{t_2^n}{n!} = -v_n(t_2)$$

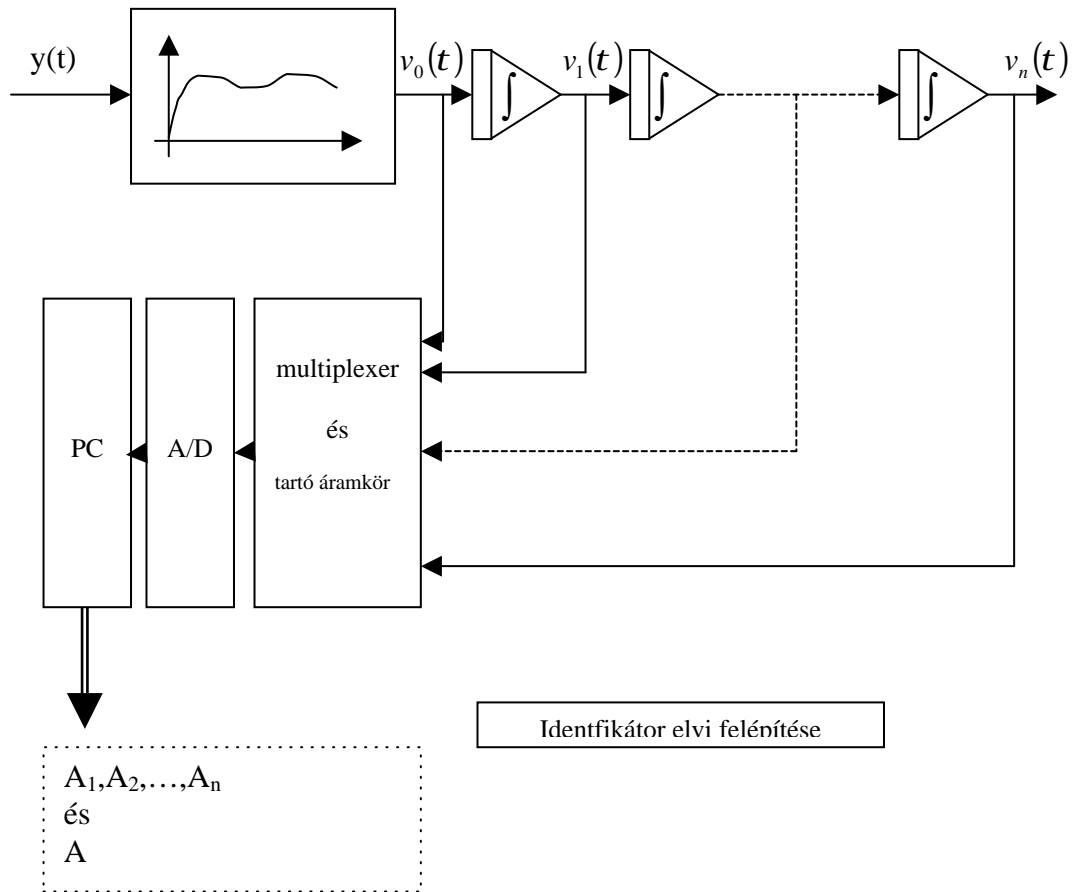
.

.  $t_{n+1}$  -ig, mert ennyi az ismeretlen

.

ha  $t = t_{n+1}$

$$A_n v_0(t_{n+1}) + A_{n-1} v_1(t_{n+1}) + \dots + A_1 v_{n-1}(t_{n+1}) - A \frac{t_{n+1}^n}{n!} = -v_n(t_{n+1})$$



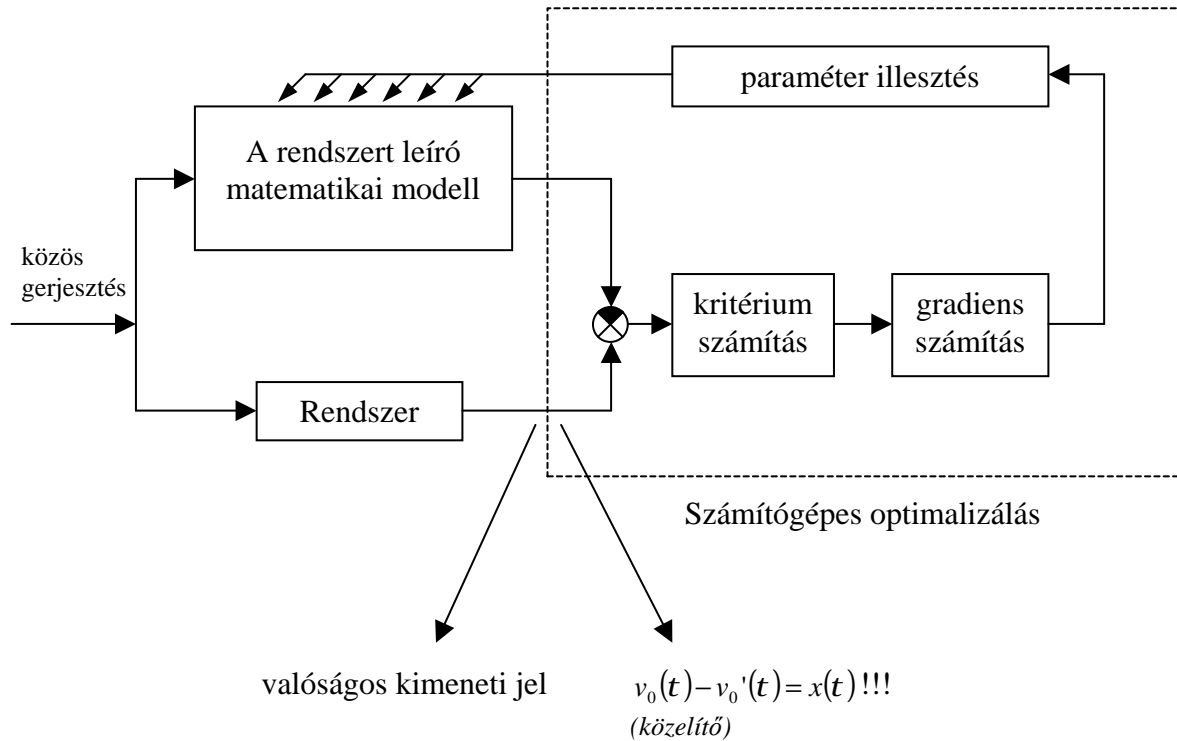
2 kérdés:

- $n$  értéke mennyi legyen?
- Pontosságot hogy lehet növelni?

$$\bar{A}_i = \frac{A_i + A_i' + A_i'' + \dots}{n}$$

4 – Számítógépes optimalizálási eljárás

A számítógépes, folyamat vizualizációs módszereket sűrűn használják identifikációra. Az alvi séma a következő:



Közös gerjesztést kapcsolok a valós rendszerre és az azt leíró matematikai modellre. A kimenetek különbségéből lehet kritériumot alkotni, ebből gradienseket számolni valós időben.

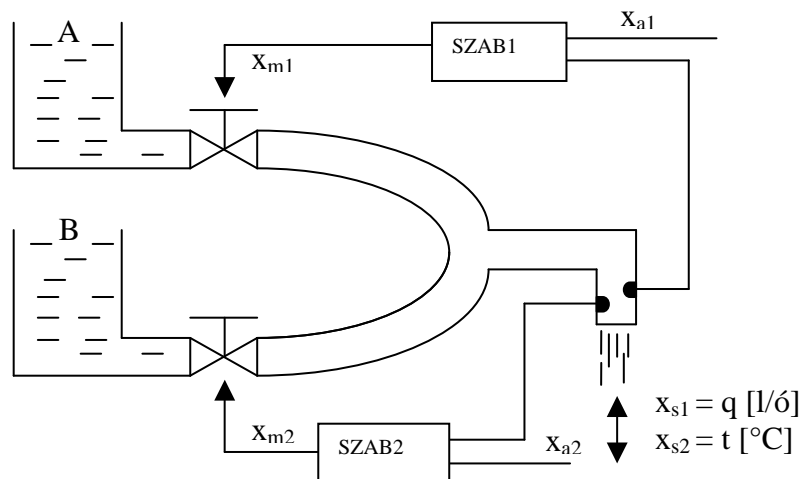


## TÖBBPARAMÉTERES KAPCSOLT SZABÁLYOZÁSOK (TKSz)

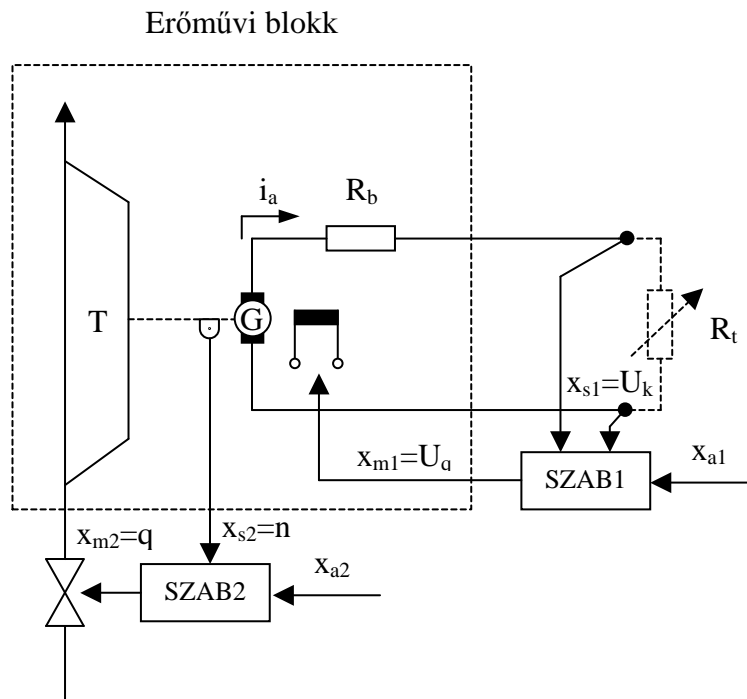
- probléma felvetés
- keresztkapcsolatok kimutatása
- keresztkapcsolatok kiküszöbölése
- többparaméteres kapcsolt szabályozások matematikai leírása
- többparaméteres kapcsolt szabályozások stabilitása
- többparaméteres kapcsolt szabályozások kompenzálása
- példák

### Probléma felvetés

Adott a kiömlő anyagmennyiség, illetve ennek hőmérséklete. A kimenetet pl. turbinás áramlásmérővel vizsgáljuk, és a két szabályozóval szabályozzuk az A ill. a B tartályból befolyó anyagmennyiséget. Azonban a két szabályozott mennyiség hatással van egymásra: ha a hőmérséklet szabályozás leszabályozza pl. az A tartályból beömlő mennyiséget, ezzel a kiömlő anyagmennyiség is csökken. Ugyanígy fordítva. Ezt úgy nevezzük, hogy kereszthatások lépnek fel.



Második példa egy erőművi blokk.

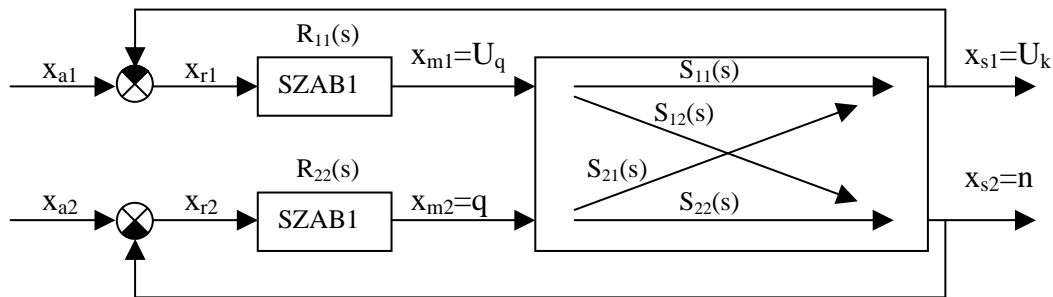


A turbinára időegység alatt egy  $q$  gőzmennyiséget viszek be, ezzel szabályozva a turbina fordulatszámát. A turbina tengelyére egy külső gerjesztésű generátor van kapcsolva, mely kimenetén a kívánt 230 vagy 380 volt rendelkezésre áll. A valós életben napszaktól függően változik a generátorra kapcsolt terhelés, ezért a kapocsfeszültség nem lesz állandó.

Szabályozni kell. Ezt a feszültség szabályozást úgy valósítják meg, hogy az  $x_{s1}$  szabályozott jellemzőt összehasonlítják  $x_{a1}$  alapjellel, és beavatkoznak a generátor gerjesztésébe. Azonban ez a gerjesztésbe való beavatkozás nem elég, a generátor fordulatszámát is adott fordulatszámon kell tartani. Ezt az SZAB2 szabályozóval valósították meg, mely a turbina lapátjaira időegység alatt bevitt gőzmennyiséget szabályozza.

Ha pl. hirtelen lecsökken a kapocsfeszültség, megnő a nyomaték igénye a generátornak, lecsökken a fordulatszám. Az SZAB1 szabályozó beavatkozik a gerjesztésbe, a SZAB2 nyitja a gőzszelepet. Lehet, hogy a SZAB1 már beállította a kívánt kapocsfeszültséget, azonban a SZAB2 hatása még nem ért a hatáslánc végére. Egy hatalmas tömeget, a turbinát forgatva számolni kell a lendülettel, így végül túlszabályozás történik. Szintén nem független egymástól a két szabályozás.

Ezt a kereszthatást a következőképp lehetne felfogni:



$S_{11}$  – az egyes szabályozási kör átviteli függvénye

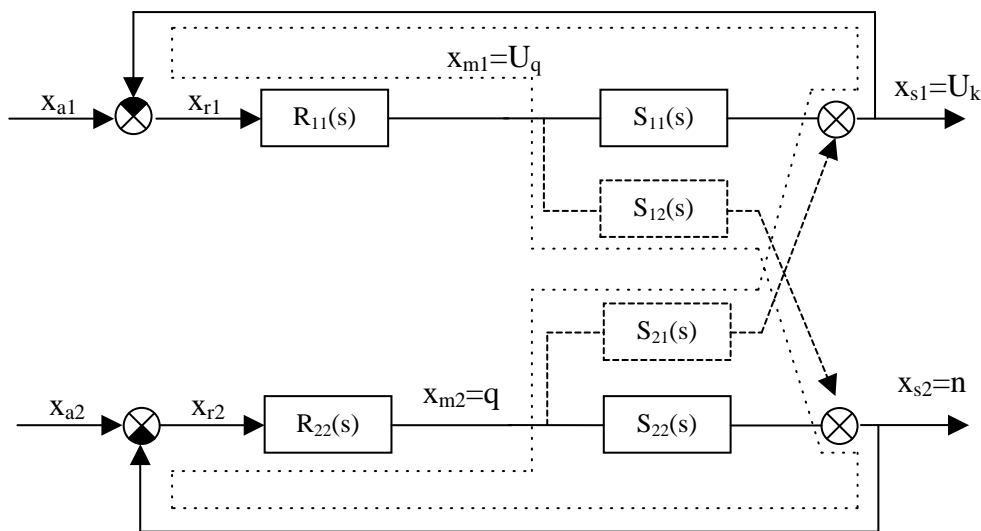
$S_{22}$  – a kettes szabályozási kör átviteli függvénye

$R_{11}$  – az egyes szabályozó függvénye

$R_{22}$  – a kettes szabályozó függvénye

$S_{11}, S_{22}$  – kereszthatások

A folyamatábra a következőképp bővül:



Tételezzünk fel egy  $\Delta x_{m1}$  változást:

$$+ \Delta x_{m1} S_{12}(s) * \frac{1}{1 + R_{22} S_{22}} * R_{22} * S_{21}(s) * \frac{1}{1 + R_{11} S_{11}} * R_{11} = \Delta x_{m1}$$

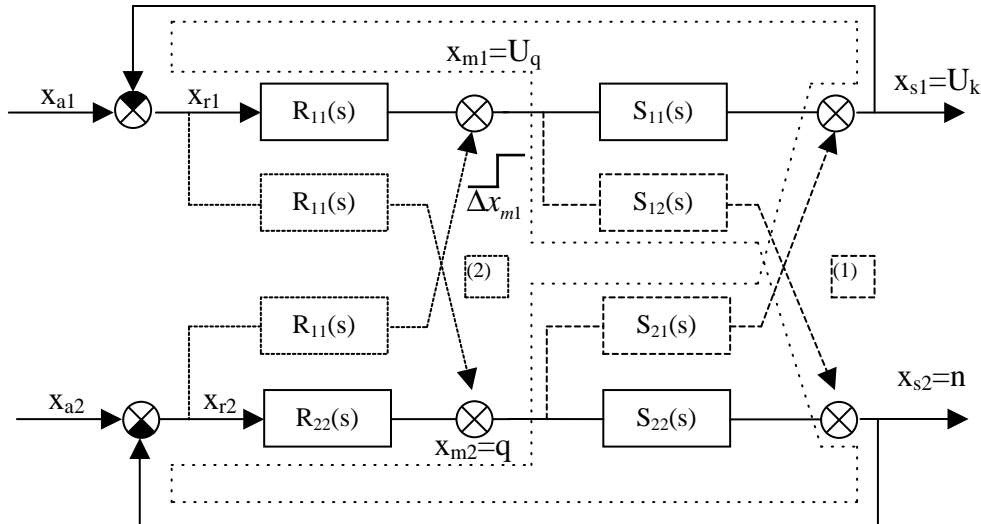
egyszerűsítve:

$$S_{12}(s) * \frac{1}{1 + R_{22} S_{22}} * R_{22} * S_{21}(s) * \frac{1}{1 + R_{11} S_{11}} * R_{11} = 1$$

Pontozott vonallal ábrázolva láthatjuk a járulékos szabályozási kört, amely stabilitási problémát okoz.

A keresztkapcsolatok kiküszöbölése

Megoldásként segéd szabályzókat helyezünk el a rendszerben.



$$+ \Delta x_{m1} S_{12}(s) \frac{1}{1 + R_{22}(s) S_{22}(s)} R_{22}(s) S_{21}(s) \frac{1}{1 + R_{11}(s) S_{11}(s)} R_{11}(s) = \Delta x_{m1} \quad (1)$$

$$+ \Delta x_{m1} S_{11}(s) \frac{1}{1 + R_{11}(s) S_{11}(s)} R_{12}(s) S_{22}(s) \frac{1}{1 + R_{22}(s) S_{22}(s)} R_{21}(s) = \Delta x_{m1} \quad (2)$$

Látható, hogy a stabilitási hibát akkor tudjuk kompenzálni, ha az (1)-es és (2)-es kör egyenletei megegyeznek.

Egyszerűbben, a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$x_{r1} R_{11}(s) S_{12}(s) + x_{r1} R_{12}(s) S_{22}(s) = 0$$

$$\rightarrow R_{12}(s) = \frac{R_{11}(s) S_{12}(s)}{S_{22}(s)}$$

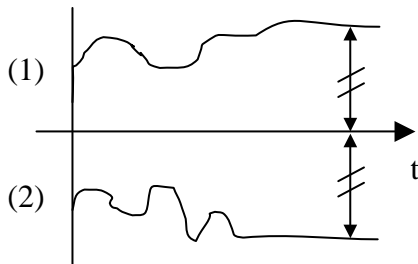
$$x_{r2} R_{22}(s) S_{21}(s) + x_{r2} R_{21}(s) S_{11}(s) = 0$$

$$\rightarrow R_{21}(s) = \frac{R_{22}(s) S_{21}(s)}{S_{11}(s)}$$

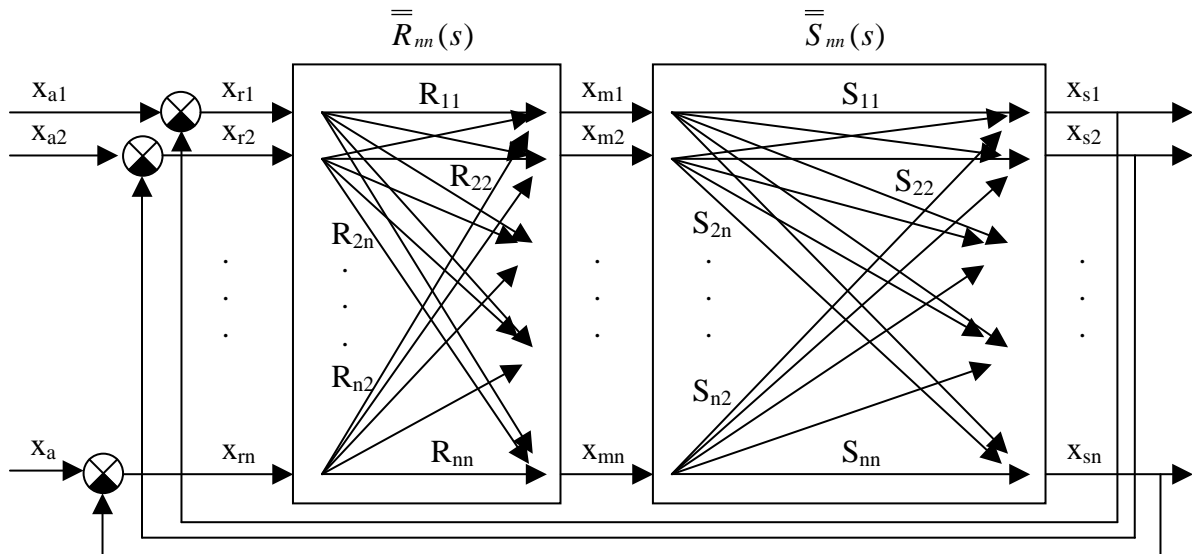
Így tehát definiáltuk a segéd szabályozók átviteli függvényét.

Megvalósíthatóság:

- Teljes invariancia: ha lefedhető P, PI, PD vagy PID-vel  $R_{12}$  és  $R_{21}$ .
- Részleges invariancia:



Ha csak bizonyos tranziens után lesz az  $(1) + (2) = 0$  egyenlet igaz.

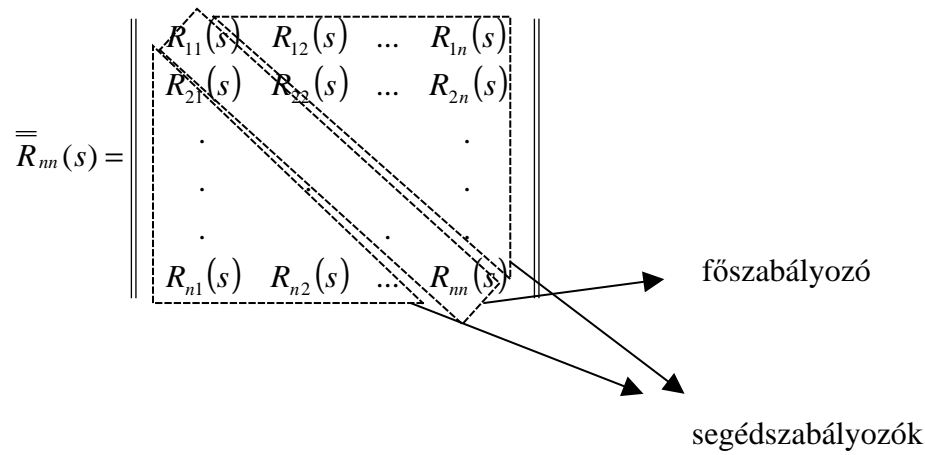


Rendszer:

$$\bar{\bar{S}}_m(s) = \begin{pmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) & \dots & S_{1n}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) & \dots & S_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1}(s) & S_{n2}(s) & \dots & S_{nn}(s) \end{pmatrix}$$

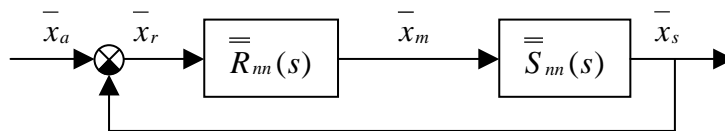
kereszthatások

Szabályozó:



- Szabályozott jellemzők:  $\bar{x}_s = \begin{bmatrix} x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} \end{bmatrix}$
- Alapjelek:  $\bar{x}_a = \begin{bmatrix} x_{a1} & x_{a2} & \dots & x_{an} \end{bmatrix}$
- Rendelkező jelek:  $\bar{x}_r = \begin{bmatrix} x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rn} \end{bmatrix}$
- Módosított jelek:  $\bar{x}_m = \begin{bmatrix} x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$

A hatásvázlat a következőképp egyszerűsödik:



$$\bar{x}_r = f_1(\bar{x}_a) = ?$$

$$\bar{x}_s = f_2(\bar{x}_a) = ?$$

$$\bar{x}_s = \bar{x}_m * \bar{S}_{mn}(s)$$

$$\bar{x}_m = \bar{x}_r * \bar{R}_{mn}(s)$$

$$\bar{x}_r = \bar{x}_a - \bar{x}_s$$

Ezekből  $\bar{x}_r, \bar{x}_s$  kifejezve:

$$\bar{x}_r = \bar{x}_a \left( \bar{E} + \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \right)^{-1}$$

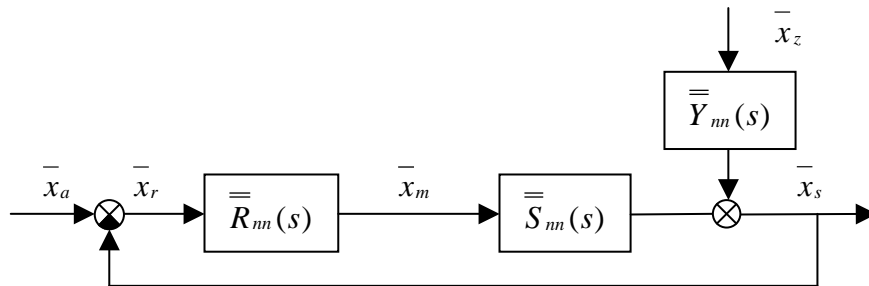
$$\bar{x}_s = \bar{x}_a \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \left( \bar{E} + \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \right)^{-1}$$

Ebből a két egyenletből kifejezhető a többparaméteres kapcsolt szabályozások matematikai leírása:

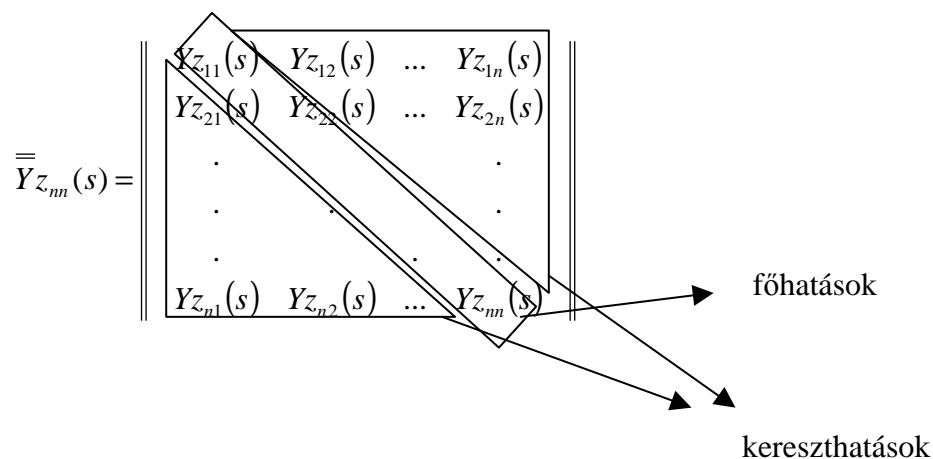
$$\bar{x}_r = f_1(\bar{x}_a, \bar{x}_z) = \bar{x}_a \left( \bar{E} + \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \right)^{-1} - \bar{x}_z \bar{Y}_z \left( \bar{E} + \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \right)^{-1}$$

$$\bar{x}_s = f_2(\bar{x}_a, \bar{x}_z) = \bar{x}_a \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \left( \bar{E} + \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \right)^{-1} + \bar{x}_z \bar{Y}_z \left( \bar{E} + \bar{R}_{nn} \bar{S}_{nn} \right)^{-1}$$

Itt már figyelembe vettük a zavarások hatását, a következők szerint:



ahol:  $\bar{x}_z = \|x_{z1} \quad x_{z2} \quad \dots \quad x_{zn}\|$



## TÖBBPARAMÉTERES KAPCSOLT RENDSZEREK STABILITÁS VIZSGÁLATA, KOMPENZÁLÁSA

### Stabilitás:

Bármely jelet kiválasztva, annak véges értékhez kell tartania, különben a rendszer instabil.

A stabilitás a rendszer belső tulajdonsága. Ha egy rendszer labilis, az mindegy, hogy a külső vagy a belső zajoktól száll el.

Ebből következik, hogy vizsgálhatjuk a rendszert a zajoktól függetlenül.

Feltételezzük:  $\bar{x}_z = 0$

$$\bar{x}_r = \bar{x}_a \left( \bar{E} + \bar{R}_{mn} \bar{S}_{mn} \right)^{-1} \quad (1)$$

$$\bar{x}_s = \bar{x}_a \bar{R}_{mn} \bar{S}_{mn} \left( \bar{E} + \bar{R}_{mn} \bar{S}_{mn} \right)^{-1} \quad (2)$$

Az (1) egyenletet vizsgáljuk, mert az egyszerűbb.

$\bar{x}_r$  akkor lehet végtelen, ha a egyenlet túloldalán a szorzat legalább egyik tagja végtelen.

-  $\bar{x}_a$  nem lehet végtelen, lévén az egy konstans érték.

- vizsgáljuk meg a  $\left( \bar{E} + \bar{R}_{mn} \bar{S}_{mn} \right)^{-1}$  kifejezést:

Legyen a felnyitott rendszer eredő átviteli mátrixa:  $\bar{K}_{mn}(s) = \bar{R}_{mn} \bar{S}_{mn}$ .

A vizsgált feltétel tehát a következőképp alakul:

$$\det \left( \bar{E} + \bar{K} \right) = 0$$

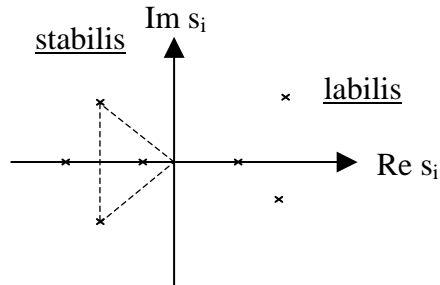
$$\bar{x}_r = \bar{x}_a \frac{\text{adj} \left( \bar{E} + \bar{K} \right)}{\left| \bar{E} + \bar{K} \right|}$$

$$\begin{vmatrix} K_{11} + 1 & K_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} + 1 & \cdot & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{nn} + 1 \end{vmatrix} = 0$$



Kifejtés után:

$$D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_1 s + D_0 = 0 \quad (\text{n-ed fokú karakterisztikus egyenlet})$$



Eddigi tanulmányaink alatt is találkoztunk már olyan stabilitás vizsgálati eljárásokkal, stabilitási kritériumokkal, amelyekkel a gyökök meghatározása nélkül megállapíthatjuk a rendszerről, hogy stabil-e.

Most nézzük a Hurwitz-kritériumot:

$$1 - D_i > 0$$

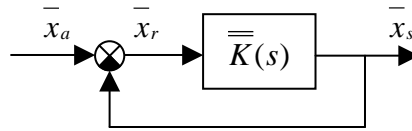
$$2 - \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n > 0$$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  magyarázata:

$$\begin{array}{cccc} & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \begin{array}{c} D_{n-1} \\ D_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} D_{n-3} \\ D_{n-2} \\ D_{n-1} \\ D_n \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} D_{n-5} \\ D_{n-4} \\ D_{n-3} \\ D_{n-2} \\ D_{n-1} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & \dots \end{array}$$

Ha mindegyik feltétel teljesül, a vizsgált rendszer stabil.

Ha valamelyik feltétel nem teljesül, a rendszer labilis.



$$\overline{\overline{K}}(s) = \begin{vmatrix} \frac{5}{s(1+s)} & \frac{1}{1+2s} \\ 10 & \frac{2}{1+s} \end{vmatrix}$$

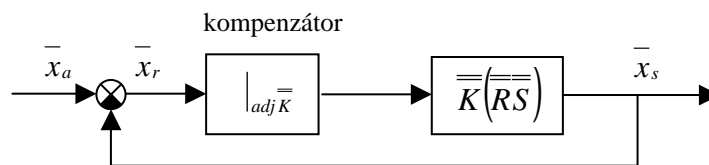
$$\overline{\overline{E}} + \overline{\overline{K}} = \begin{vmatrix} \frac{5}{s(1+s)} + 1 & \frac{1}{1+2s} \\ 10 & \frac{2}{1+s} + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5+s(1+s)}{s(1+s)} & \frac{1}{1+2s} \\ 10 & \frac{3+s}{1+s} \end{vmatrix}$$



$$\frac{5+s(1+s)}{s(1+s)} * \frac{3+s}{1+s} - \frac{10}{1+2s} = \dots = 15 + 28s + 2s^2 - 3s^3 + 2s^4 = 0$$

Mivel  $D_3$  negatív, ezért a rendszer instabil.

### Kompenzálás



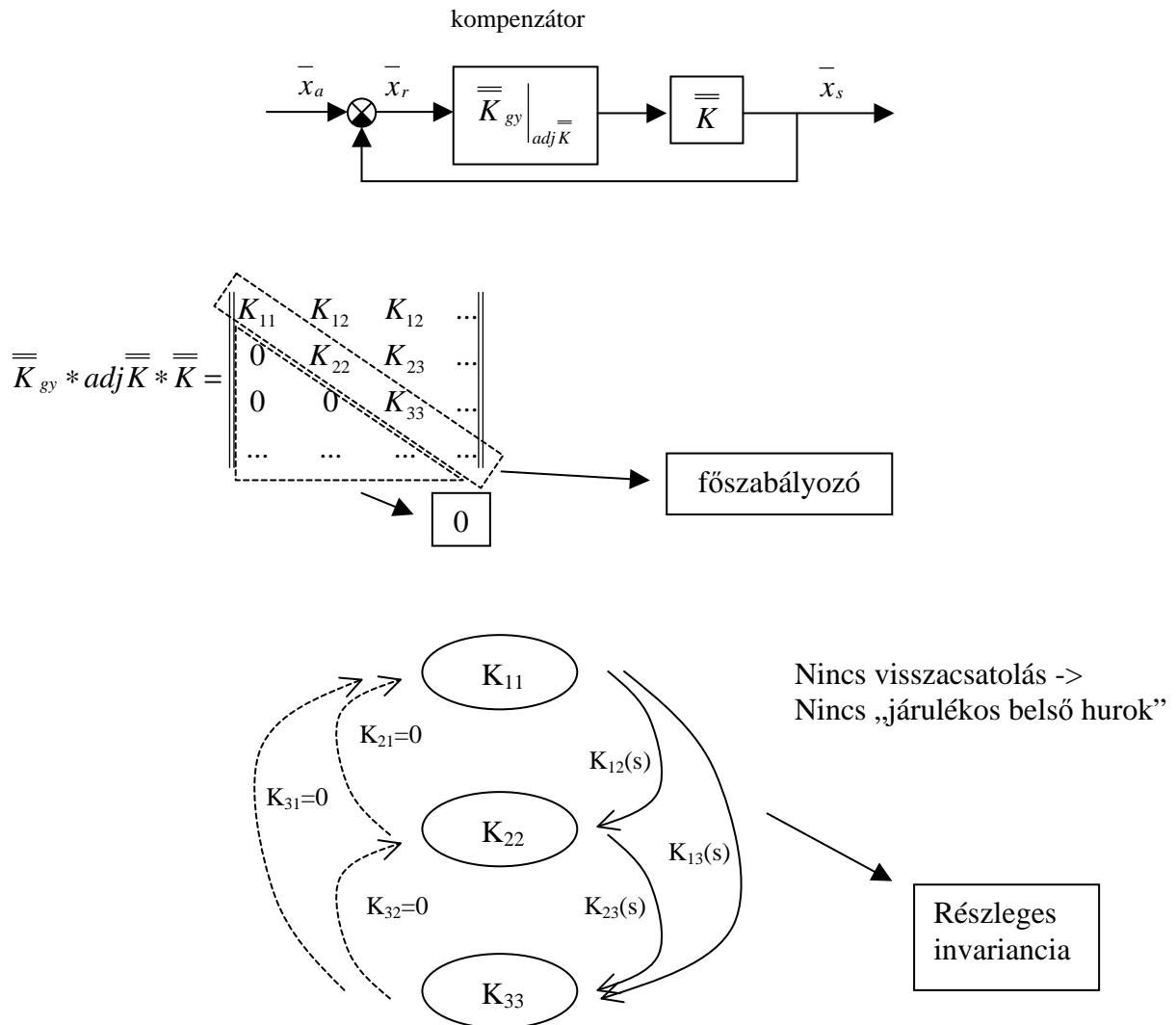
$$\overline{\overline{A}} * \overline{\overline{A}}^{-1} = \overline{\overline{E}}$$

$$\frac{\overline{\overline{adj A}}}{\overline{\overline{A}}} * \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{E}}$$

$$\overline{\overline{adj K}} * \overline{\overline{K}} = \begin{vmatrix} \overline{\overline{K}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{K}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\overline{K}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (= \text{teljes invariancia})$$

A valóságban azonban kérdéses, hogy  $\overline{\overline{adj K}}$  realizálható-e.

Megoldás: a bemeneten egy  $\overline{\overline{K}}_{gy}$  - gyorsító mátrix:



Összefoglalva: Megismertük a többparaméteres kapcsolt rendszereket egy-egy bevezető példán. Ezekkel mindig számolni kell, mindig felléphetnek, és azért veszélyesek, mert a belső járulékos hurok mindig bonyolultabb szabályozások, mint önmagukban az egyes körök. Stabilitás vizsgálatnál felírtuk a kapcsolt rendszer eredeti átviteli mátrixát, meghatároztuk a karakterisztikus egyenletét a rendszernek, és ennek alapján – a lineáris rendszereknél megismert- stabilitási kritériumokat használhatjuk.

## NEMLINEÁRIS RENDSZEREK

### I.) Probléma felvetés:

A tudományban először lineáris rendszerekkel foglalkoztak, és körülbelül az 50-es évektől találkoztak olyan jelenségekkel, amelyeket már nem tudtak lineáris módszerekkel vizsgálni. Így jutottak a nemlineáris rendszerekhez.

Mai napig igaz, hogy a szakirodalom, közel 80 %-a a lineáris rendszerekkel foglalkozik. Ez azt a hamis képet keltheti, hogy a lineáris rendszerek speciális esetei a nemlineáris esetek, nem pedig fordítva.

Nemlineáris rendszerre egy jó példa a következő:

Egy terembe beviszek egy 10 vagy 100 kW-os fűtőteljesítményt, és elkezdem növelni a betáplált hőteljesítményt, akkor a terem hőmérséklete majdnem lineárisan elkezd majd növekedni. Azonban csak egy bizonyos szintig megy ez, hiszen egy idő után beáll egy egyensúlyi állapot a fűtőtest által betáplált és a nyílászárókon, falakon távozó hőmennyiség között.

Ugyanilyen jó példa a vízcsap. Ha megnyitom egy kicsit, akkor egy adott vízmennyiség folyik ki belőle időegység alatt, ha kétszer, vagy háromszor annyira nyitom meg, kétszer, háromszor annyi vízmennyiség folyik majd ki. Azonban egy bizonyos szint után már hiába nyitom jobban a csapot, nem jön több víz időegység alatt.

Tehát általában a lineáris rendszereknél beáll a szaturáció, a telítődés, és a rendszer nemlineárisá válik.

Ahogy a szakemberek egyre inkább megismerték a nemlineáris rendszereket, az esetlegességből szándékosság lett.

### II.) Nemlinearitások osztályozása:

- egyértékű
- többértékű

### III.) Nemlineáris rendszerek vizsgálati módszerei:

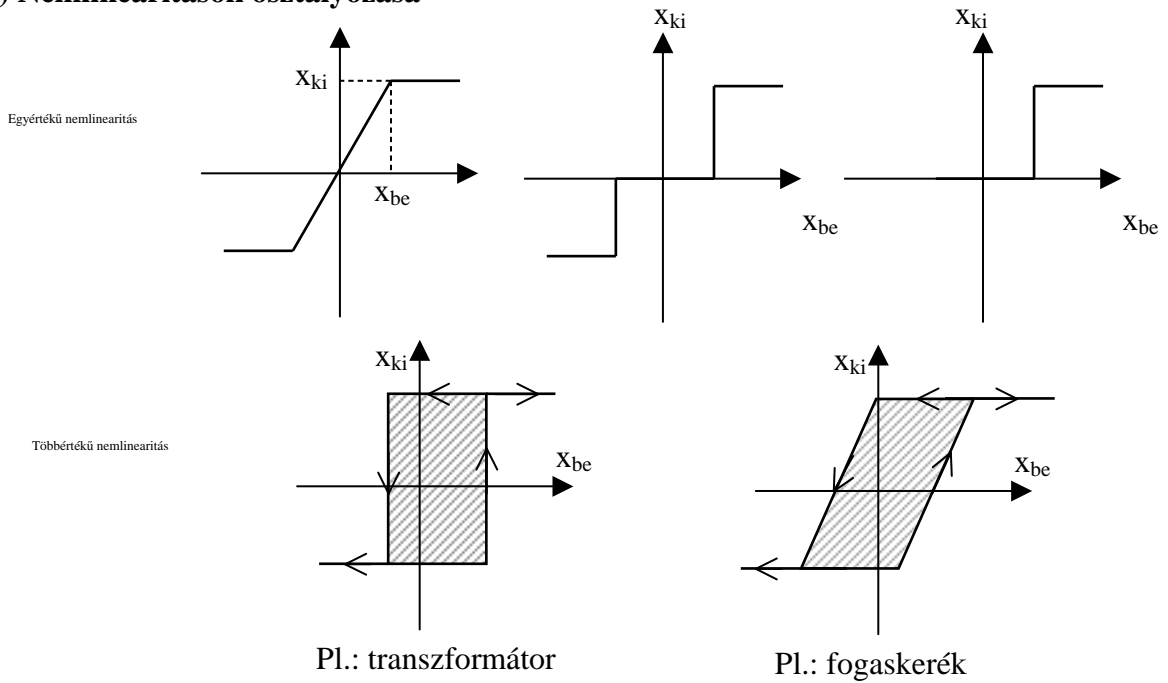
- 1) munkaponti linearizáció
- 2) fázis-sík módszer
- 3) leíró függvény módszer
- 4) számítógépes szimuláció

Az 1) és 2) módszer lineáris modellre próbálja visszavezetni, időtartományban az eredeti folyamatot.

A 3) módszer ugyancsak lineáris módszerre próbálja visszavezetni, de már frekvenciatartományban a vizsgált rendszert.

Visszavezetésnél, egyszerűsítéseknél mindig hibát kell számolni, hogy milyen hiba mellett érvényes a módszer.

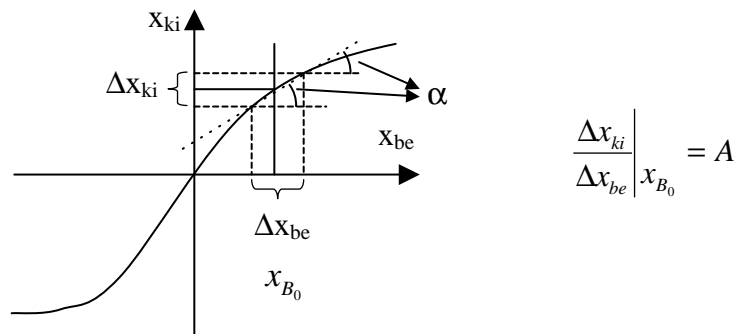
## II.) Nemlinearitások osztályozása



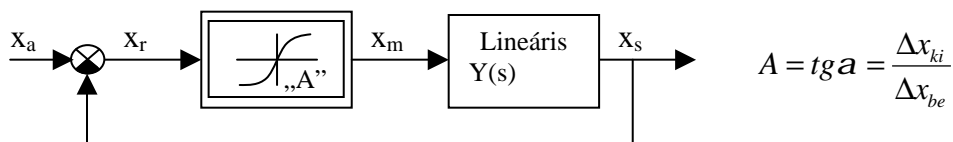
A nemlinearitások ilyen jellegű osztályozása azért fontos, mert a két fajta nemlinearitást különböző egyenletek írják le. Egyik esetben skaláris függvényekkel, másik esetben pedig komplex függvények fogják leírni ezeknek a működését.

## III.) Nemlineáris rendszerek vizsgálati módszerei

### 1.) Munkaponti linearizáció

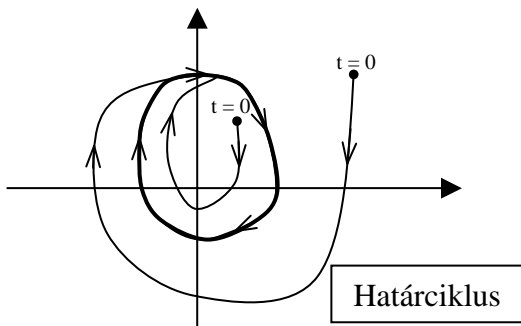
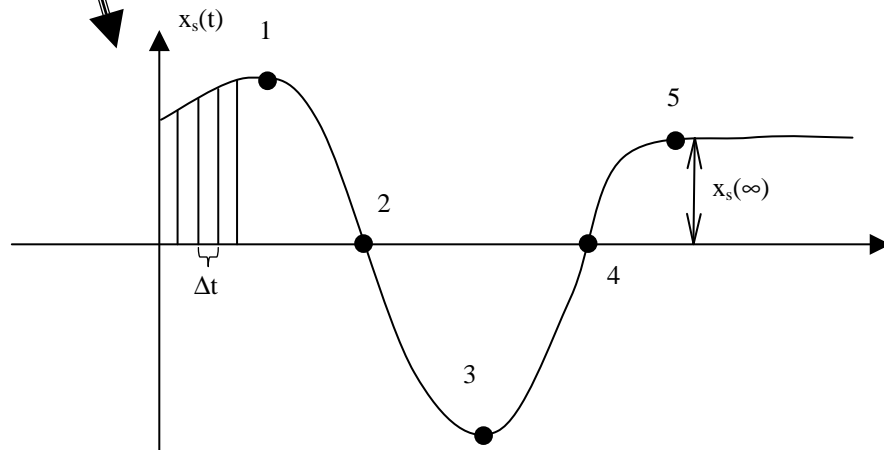
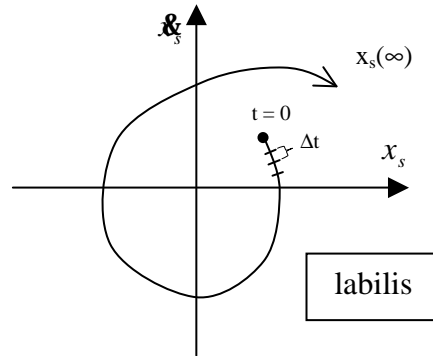
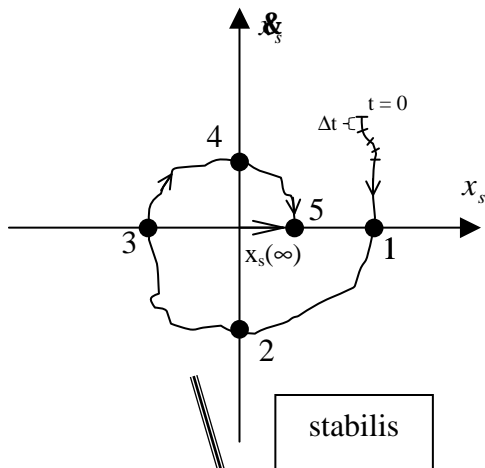
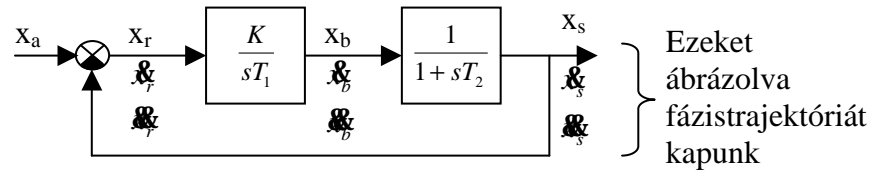


Ennél a módszernél időtartományban linearizáltunk. Fontos, hogy ez az eljárás csak kis változások esetén használható.



Ha eltolódik a munkapont, akkor akár 100%-os hibát is elkövethetünk!

2.) Fázis – síkmódszer



Bárhonnan indítjuk a rendszert, mindig ebbe a határciklusba kerül.  
Hasonló ez, mint lineáris esetben a kritikus körerősítés.

Nemlineáris rendszereknél a HATÁRCIKLUST stabil rendszer-állapotnak tekintjük!

Példa:

$$x_r(s) = \frac{1}{1+Y} x_a(s)$$

$$x_r + \frac{K}{s\Delta T_1(1+sT_2)} x_r = \frac{x_a(s)}{sT_1(1+sT_2)}$$

$$s^2 T_1 T_2 x_r(s) + s T_1 x_r(s) + K x_r(s) = s T_1 (T_1 T_2) x_a(s)$$

Ha  $x_a = 1(t)$

Időtartományban:

$$\ddot{x}_r + \underbrace{\frac{1}{T_2}}_{\cong 2xw_0} \dot{x}_r + \underbrace{\frac{K}{T_1 T_2}}_{\cong w_0^2} x_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_r + 2xw_0 \dot{x}_r + w_0^2 x_r = 0$$

gyökök:

$S_1$  és  $S_2$

Ha  $x_r(0) = 1$  ( $x_a = 1(t)$ )

$$\dot{x}_r(0) = 0$$

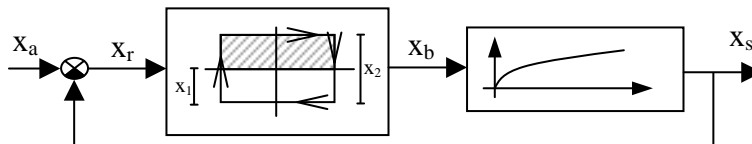
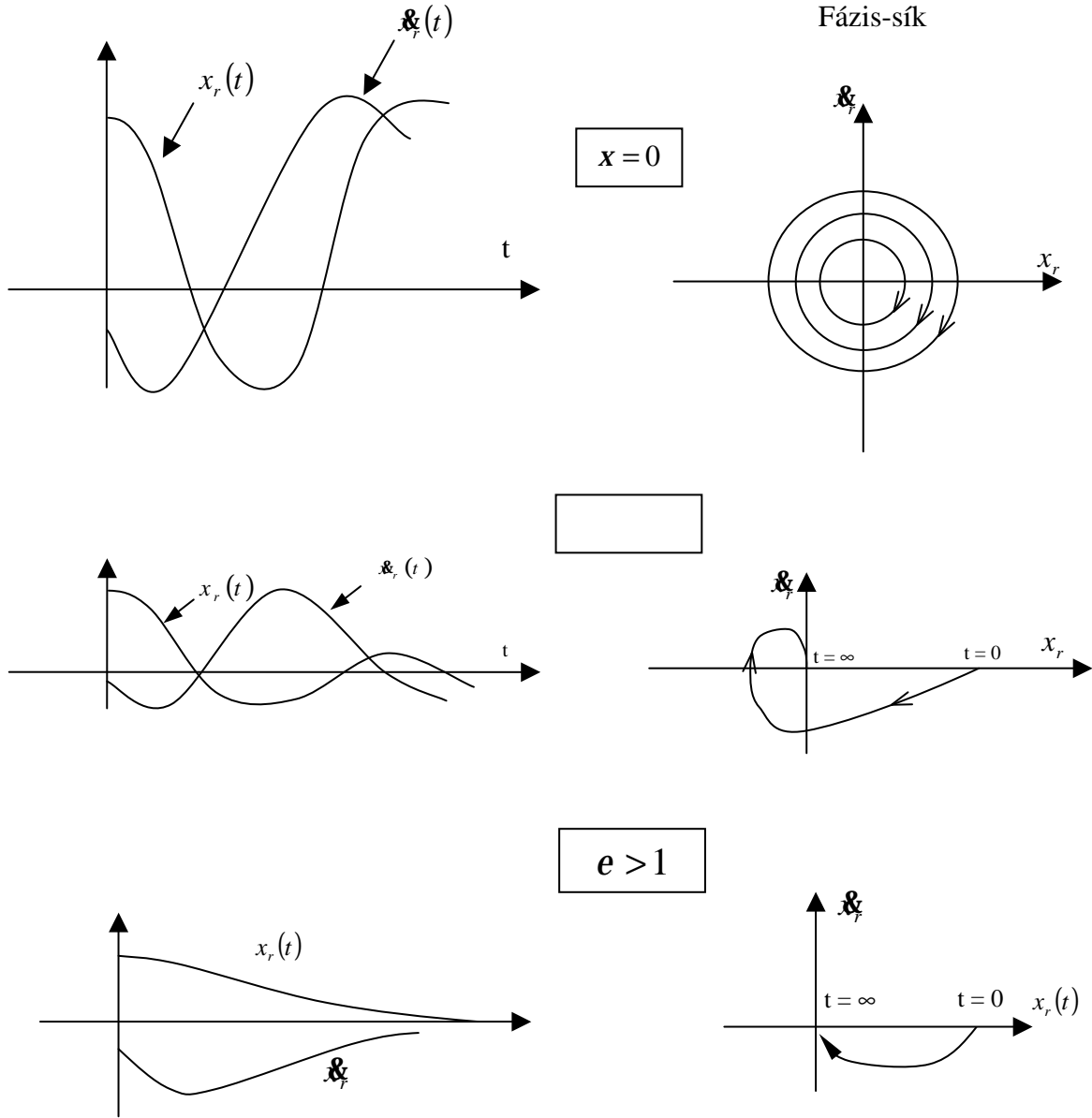
$S_1 \neq S_2$

Megoldás:

$$x_r(t) = \frac{S_2}{S_2 - S_1} e^{S_1 t} + \frac{S_1}{S_2 - S_1} e^{S_2 t}$$

$$\dot{x}_r(t) = \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1} e^{S_1 t} + \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1} e^{S_2 t}$$

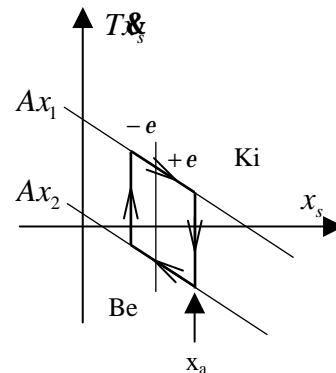
Ábrázolás:





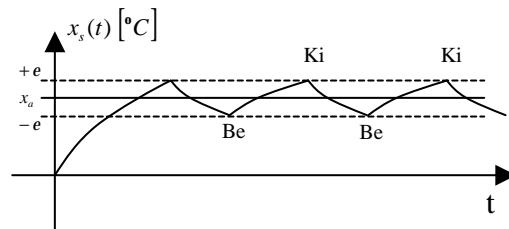
$$T \frac{dx_s}{dt} + x_s(t) = Ax_1 \begin{cases} e < +e_0 & \frac{de}{dt} > 0 \\ e < -e_0 & \frac{de}{dt} < 0 \end{cases}$$

$$T \frac{dx_s}{dt} + x_s(t) = Ax_2 \begin{cases} e > +e_0 & \frac{de}{dt} > 0 \\ -e_0 < e < +e_0 & \frac{de}{dt} < 0 \end{cases}$$



$$T \dot{x}_s = Ax_1 - x_s$$

$$T \dot{x}_s = Ax_2 - x_s$$



Ez a módszer csak olyan rendszereknél alkalmazható, amelyek fokszáma nem haladja meg a kettőt.

## A LEÍRÓ FÜGGVÉNY MÓDSZER ÉS ALKALMAZÁSA

Alap feltevések:

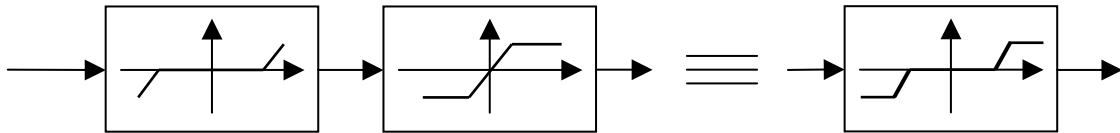
Bemeneti jel : szinuszos

Kimeneti jel: periodikus, de nem szinusz

Feltételezések:

- 1) Kimeneti jel periódus ideje megegyezik a bemeneti jel periódus idejével
- 2) A rendszer a fel- és szubharmónikusokra *nagy* csillapítást jelent
- 3) A nemlinearitás az idő folyamán *nem* változik
- 4) Csak *egy* nemlinearitás van a rendszerben

Ha több nemlinearitás van, akkor összevonjuk azokat:



Mivel a kimeneti jel periodikus, van Fourier sora.

Ez a következőképp néz ki:

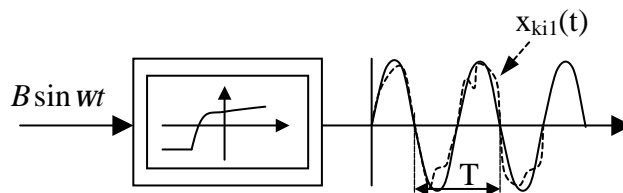
$$x_{ki}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

ahol:

$$A_n = \frac{2}{\Pi} \int_0^{\Pi} x_{ki}(t) \cos n\omega t d\omega t$$

$$B_n = \frac{2}{\Pi} \int_0^{\Pi} x_{ki}(t) \sin n\omega t d\omega t$$

A rendszer a fel- és szubharmónikusokra *nagy* csillapítást jelent:



$$x_{ki1}(t) = B_1 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t$$

$$\sin j = \frac{A_1}{C_1} \quad \cos j = \frac{B_1}{C_1}$$

$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

$$x_{ki}(t) = C_1 \sin(\omega t + j)$$

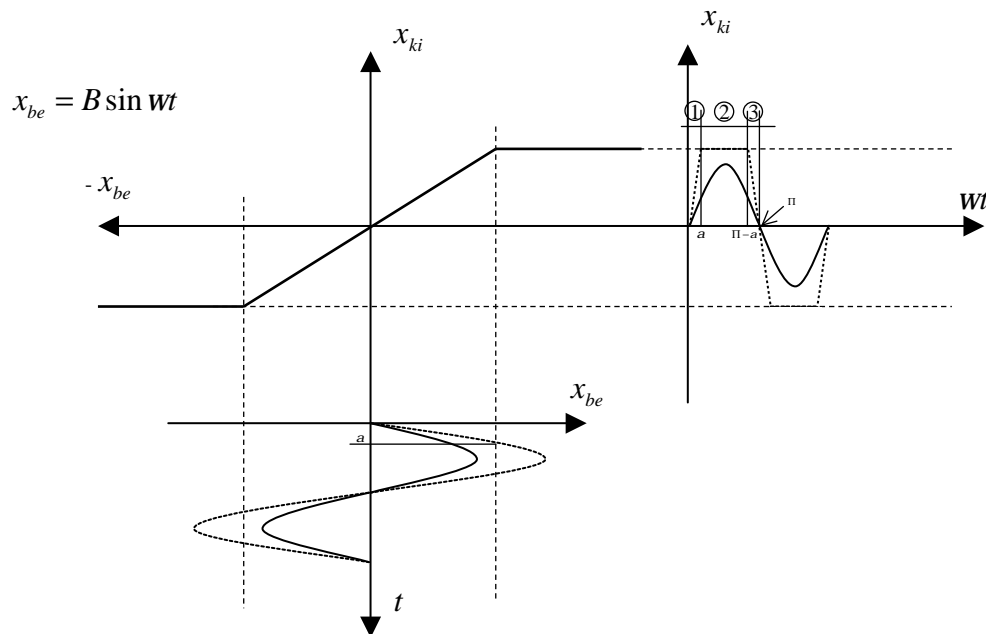
Leíró függvény:  $Y_L(\underline{B}, j\omega)$

$$\text{Definíció: } Y_L(\underline{B}, j\omega) = \frac{\tilde{x}_{ki}}{\tilde{x}_{be}} = \frac{C_1(B, j\omega)}{x_{be}(j\omega)} e^{j\varphi_1(B, j\omega)}$$

Más alak:

$$Y_L(\underline{B}, j\omega) = \frac{\sqrt{A_1^2(B, j\omega) + B_1^2(B, j\omega)}}{B} \quad j = \arctg \frac{A_1(B, j\omega)}{B_1(B, j\omega)}$$

Egyértékű nemlinearitások esetén  $Y_L(\underline{B}, j\omega)$  skalár, többértékű nemlinearitások esetén pedig komplex értéket vesz fel.



Keressük a  $B_1$  értékét.

- 1)  $x_{ki} = Ax_{be} = A * B \sin \omega t \quad 0 \leq \omega t \leq a$
- 2)  $x_{ki} = Ab \quad a \leq \omega t \leq \pi - a$
- 3)  $x_{ki} = Ax_{be} = A * B \sin \omega t \quad \pi - a \leq \omega t \leq \pi$

$$B_1 = \frac{2}{\Pi} \int_0^a A * B \sin^2 wtdwt +$$

$$+ \frac{2}{\Pi} \int_a^{\Pi-a} A * b \sin wtdwt +$$

$$+ \frac{2}{\Pi} \int_{\Pi-a}^{\Pi} A * B \sin^2 wtdwt$$

$$B_1 = \frac{AB}{\Pi} a - \frac{AB}{\Pi} \sin a \cos a +$$

$$+ \frac{4AB}{\Pi} \cos a +$$

$$+ \frac{AB}{\Pi} a - \frac{AB}{\Pi} \sin a \cos a$$

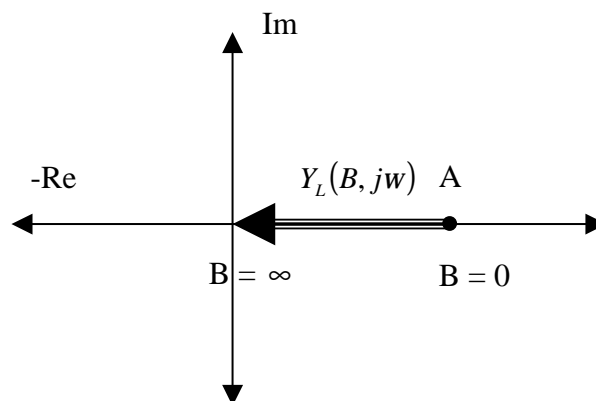
$$B_1 = \langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle + \langle 3 \rangle = \frac{2}{\Pi} AB \left[ \arcsin \frac{b}{B} + \frac{b}{B} \cos \arcsin \frac{b}{B} \right]$$

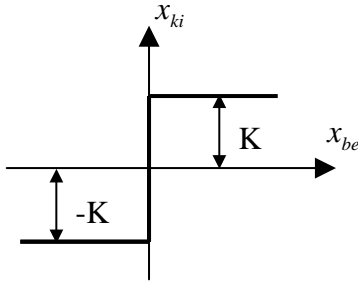
$$A_1 = 0 \text{ (páratlan függvény)}$$

$$C_1 = B_1$$

$$j = 0$$

$$Y_L(B, jw) = \frac{C_1}{B} = \frac{2}{\Pi} A \left[ \arcsin \frac{b}{B} + \frac{b}{B} \sqrt{1 - \left( \frac{b}{B} \right)^2} \right]$$



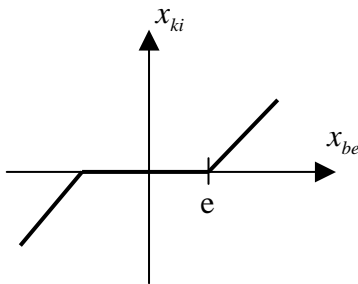


$$x_{be} = B \sin \omega t$$

$$x_{ki} = +K \quad 0 \leq \omega t \leq \pi$$

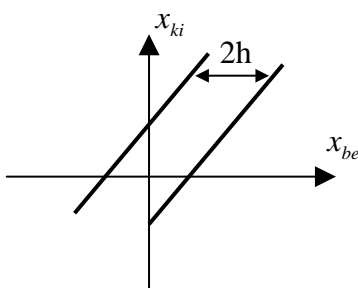
$$x_{ki} = -K \quad \pi \leq \omega t \leq 2\pi$$

$$Y_L(B) = \frac{4}{\pi} * \frac{K}{B} \quad j = 0^\circ$$



$$Y_L(B, j\omega) = \frac{2}{\pi} A \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{e}{B} - \frac{e}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{e}{B}\right)^2} \right]$$

$$j = 0^\circ$$



$$A_1 = \frac{4A}{\pi} \left( \frac{h^2}{B^2} - \frac{h}{B} \right)$$

$$B_1 = \frac{A}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2h}{B} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2h}{B} \right) * \sqrt{\frac{h}{B} - \frac{h^2}{B^2}} \right]$$

$$Y_L(B, j\omega) = \sqrt{A_1^2 - B_1^2} \quad j = \arctg \frac{A_1}{B_1}$$

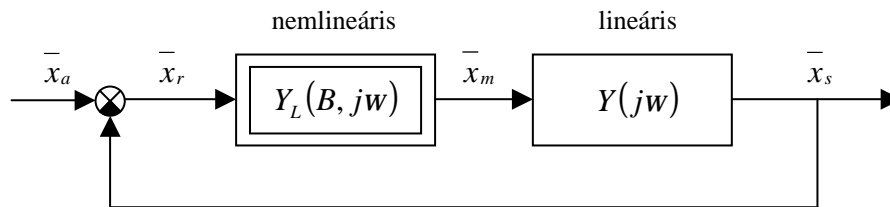
Bármely más nemlinearitás esetén ajánlott a szakirodalom használata.

Feltételeztük, hogy a bemenő jel szinusz, a kimenőjel periodikus, de nem szinusz, hanem torz. A kimeneti jel periódus ideje megegyezik a bemenő jelével, és mivel periodikus, felírható a Fourier sora, azzal a „szépséghibával”, hogy a frekvencia-tartományban való linearizálásnál csak az alapharmónikust vesszük figyelembe, feltételezzük, hogy a rendszer a szub-, és felharmónikusokra nagy csillapítást jelent. Gyakran használunk közelítő módszereket, azonban minden közelítéskor meg kell adni a közelítés hibáját.

A leíró függvény egy nagyon jó általános módszer, de elsősorban kvalitatív, azaz minőségi vizsgálatokra alkalmas, kvantitatív vizsgálatokra kevésbé.

Továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy ha már ismerjük egy rendszer leíró függvényét, akkor azzal mit lehet kezdeni.

**A leíró függvény módszer alkalmazása**



$Y(jw)$  - amplitúdó-fázis függvény

$Y_L(B, jw)$  - leíró függvény

$$\langle 1 \rangle \quad x_r = f_1(x_a) = x_a \frac{1}{1 + Y_L(B, jw)Y(jw)}$$

$$\langle 2 \rangle \quad x_s = f_2(x_a) = x_a * Y_L(B, jw) * Y(jw) \frac{1}{1 + Y_L(B, jw)Y(jw)}$$

*Stabilitás vizsgálat:*

Az  $\langle 1 \rangle$ -es egyenletet vizsgáljuk, mert az egyszerűbb, de a másik egyenletből is hasonló eredményre jutnánk.

Vizsgáljuk, hogy az  $x_r = x_a \frac{1}{1 + Y_L(B, jw)Y(jw)}$  kifejezés mikor ad végtelen értéket.

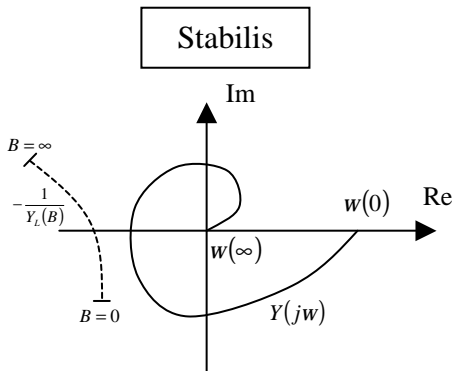
Ez ekvivalens azzal, ha a  $1 + Y_L(B, jw)Y(jw) = 0$  helyzetet keressük.

$$1 + Y_L(B, jw)Y(jw) = 0 \quad \begin{cases} \rightarrow Y(jw) = -\frac{1}{Y_L(B, jw)} \\ \rightarrow \frac{1}{Y(jw)} = -Y_L(B, jw) \end{cases}$$

gyakorlatban ezt használjuk

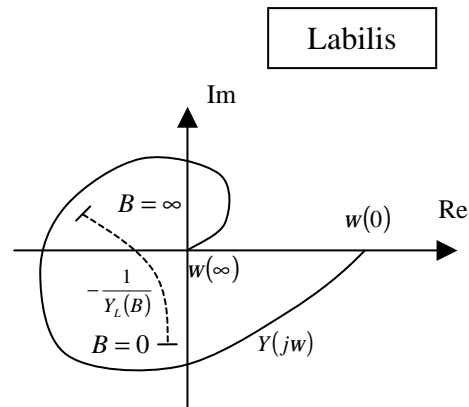
A továbbiakban tételezzük fel, hogy a leíró függvény nem függ a frekvenciától:

$$Y_L(B, j\omega) = Y_L(B)$$

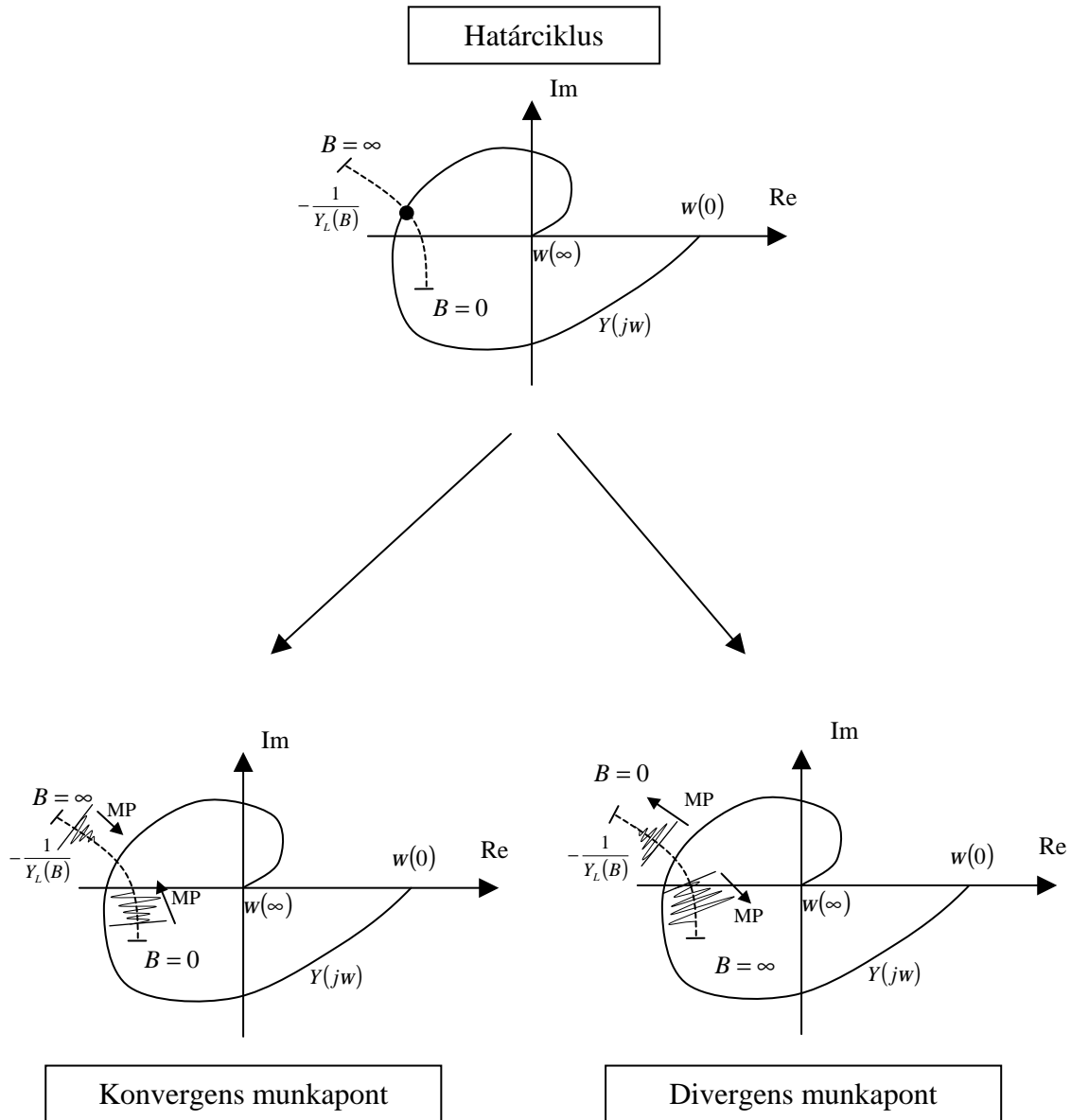


Stabilis, ha  $Y(j\omega)$  nem fogja körül  $Y_L(B)$  negatív reciprokát.

Labilis, ha  $Y(j\omega)$  közrefogja  $Y_L(B)$  negatív reciprokát.



A bevezetőben már szerepelt, hogy általában a nemlineáris rendszereket úgy kezelik, mint speciális esetek, holott ezek az általánosok, és a nemlineáris rendszereknek a speciális esetei a lineáris rendszerek. A lineáris esetben nem függ a B-től a kimenő jel, csak az átviteli tényezőtől, tehát lineáris rendszereknél a  $-\frac{1}{Y_L(B)}$  szakasz egy jól definiált, a  $(-1, j0)$  pontba sűrűsödik.

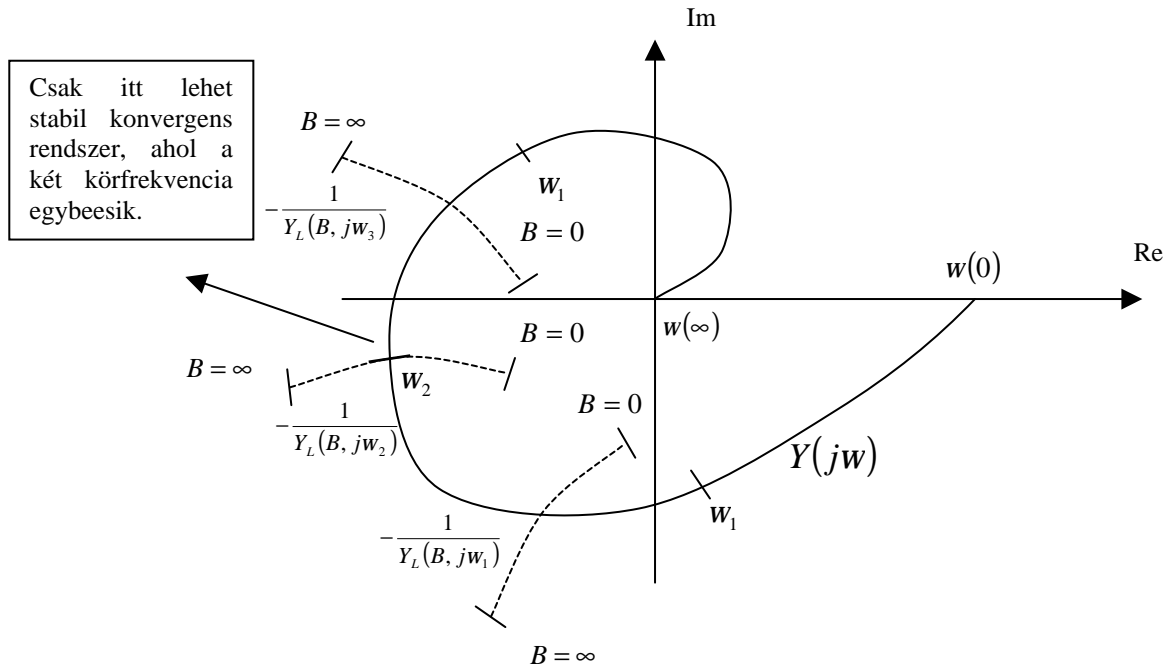


Fontos ez a stabil határciklus, mert a hátköznapi életben rengeteg helyen használják. A költséges PD, PI, PID szabályozók helyett egyszerű bimetált alkalmaznak a hűtőszekrényekben, vasalókban, fűtés-szabályozásnál, fény-, mozgáskapcsolóknál. A szabályozási problémák 80%-át ilyen stabil határciklusban dolgozó szabályozásokkal oldják meg.

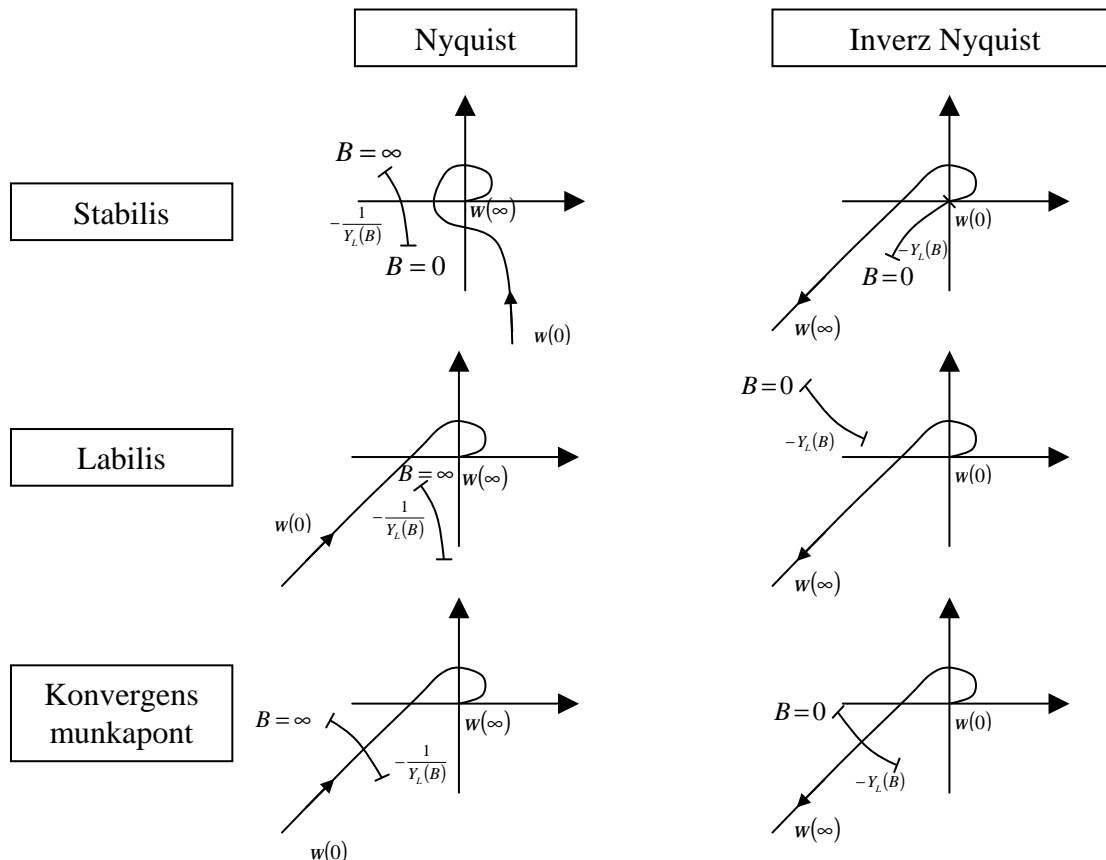


Stabilitás vizsgálat frekvencia-függő nemlinearitás esetén:

$$Y_L(B, j\omega) \neq Y_L(B)$$



Összefoglalásként nézzük meg, hogy néz ki a Nyquist és az inverz Nyquist diagram.



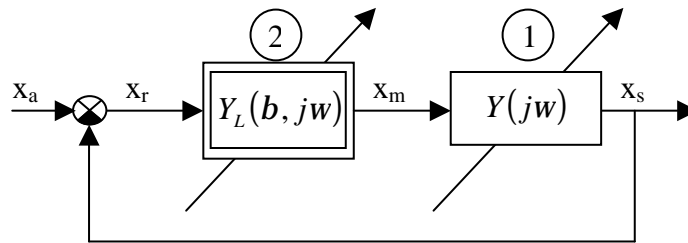
## NEMLINEÁRIS RENDSZEREK KOMPENZÁLÁSA

A kompenzálásnak két fajtája van:

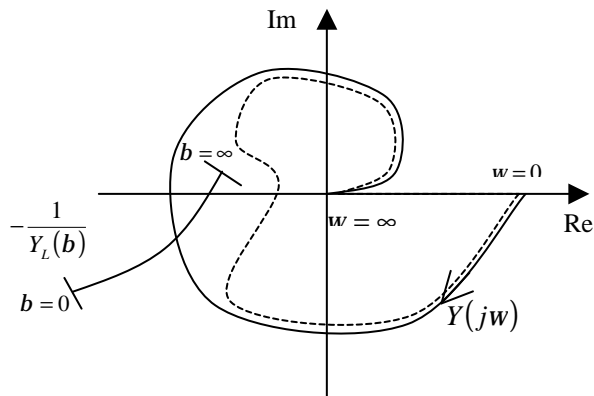
- lineáris
- nemlineáris

### Lineáris kompenzálás megvalósítása

Lineáris esetben az 1-es blokkba avatkozok be, nemlineáris esetben a 2-esbe.



Ha a lineáris részbe avatkozok be, akkor az eredőben a középfrekvenciás részbe avatkozok be, például az alább látható módon.



Ezek a hagyományos P, PI, PD, PID kompenzálások..

P kompenzálás:

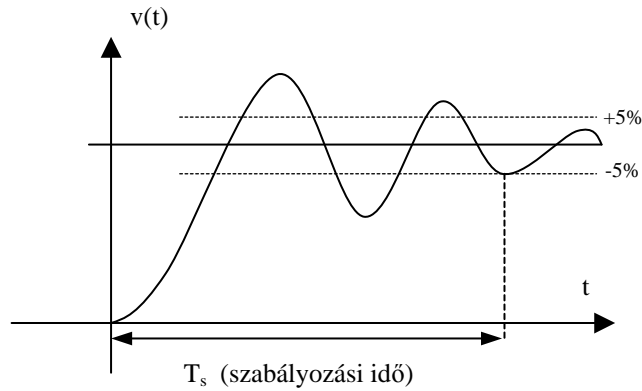
- erősítés csökkenés

$$\text{hiba} : \frac{1}{1+K}$$

⇒ K csökken, hiba nő.

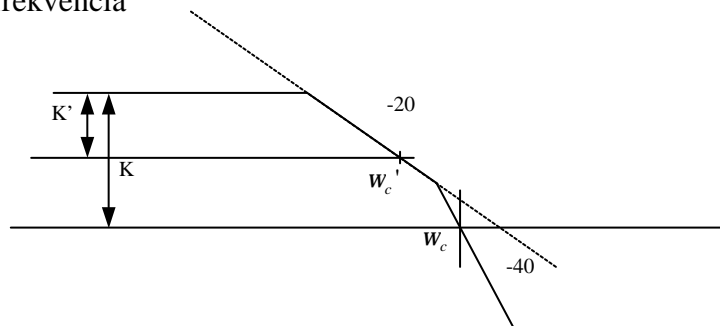
- $w_c$  csökken

⇒  $T_s$  nő



$$\frac{\Pi}{w_c} \leq T_s \leq \frac{3\Pi}{w_c}$$

$w_c$  - vágási körfrekvencia



$T_s$  lecsökkenését lehet ellensúlyozni PD kompenzációval.

- $w_c$  nő

⇒  $T_s$  csökken

PI kompenzálás:

- $K = \infty \Rightarrow \text{hiba} = 0$

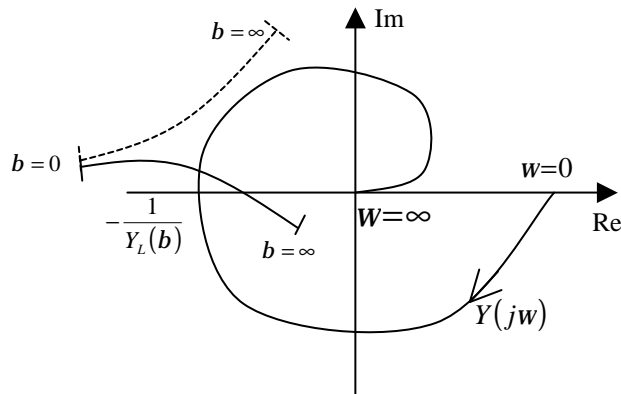
PID kompenzálás:

- $T_s$  csökken
- hiba csökken

### Nemlineáris kompenzálás megvalósítása

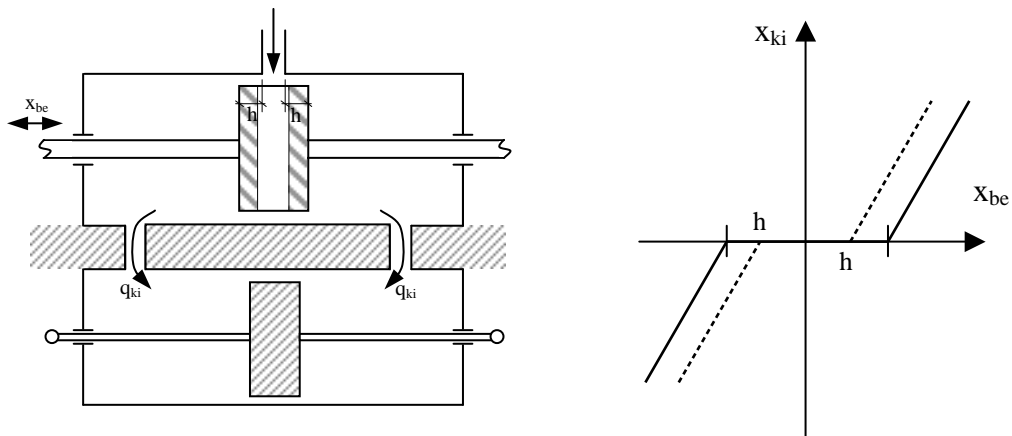
Nemlineáris kompenzálásnál a *nemlinearitást* változtatom meg.

Ez grafikusán a következőképp ábrázolható:



Nézzünk egy példát:

Az eredeti felépítésből adódóan fellépő  $h$  pozitív túlfedést a szelep fizikai méreteinek csökkentésével tudom csökkenteni.



Célunk, hogy az egyébként divergens munkapontból egy stabil állapotba kerüljön a rendszer.

## SZÁMÍTÓGÉPES OPTIMALIZÁCIÓS MÓDSZEREK

- számítógépes optimalizálás előnyei
- számítógépes optimalizálás hátrányai
- kronológia
- statikus, dinamikus optimalizáció
- optimalizációs módszerek
  - o folytonos gradiens módszer
  - o diszkrét gradiens módszer
  - o relaxációs módszer
  - o „The Brutal Force Method”

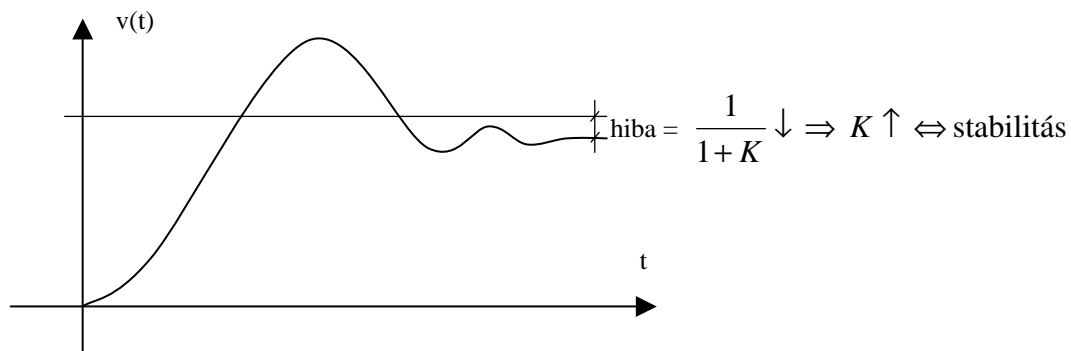
$$I = \int F\{x(t), t\} dt = \text{Extrémum} \begin{cases} \rightarrow \text{minimum} \\ \rightarrow \text{maximum} \end{cases}$$

A számítógépes optimalizálás feladat mindig valamilyen integrálkritérium halmaz köré csoportosul. Ezen integrálkritérium teljesítését perem- és mellékfeltételek (pl.: a rendszerben lévő nemlinearitások) befolyásolják.

### **Számítógépes optimalizálás előnyei**

- a rendszer méretezése, tervezése közvetlenebb, mert a legfontosabb követelmények egy integrálkritérium minimalizálásában, teljesülésében, integrál-funkcionál minimalizálásában, tehát tömörített formában jelentkeznek.
- az előbbi miatt az elvi és gyakorlati korlátozások, és azok befolyása szembetűnő.
- bizonyos előrelátással megmondható, hogy miképp viselkedik a rendszer későbbi időpontban változó körülmények között, azaz prevencióra van lehetőség.
- a szabályozás adaptálódóvá, alkalmazkodóvá tehető.
- nemlineáris rendszerek is optimalizálhatók számítógépes módszerrel.
- változó együtthatójú rendszerek is optimalizálhatók.

Nulltípusú szabályozás:



### Számítógépes optimalizálás hátrányai

- optimalizálási kritérium kiválasztása nehéz feladat
- egy optimális működő rendszer működését igen erősen rontják az esetlegesen hibás feltevések, illetve az optimalizált rendszer, folyamat paramétereinek változása.

### Kronológia

- WIENER – KOLMOGOROV → statisztikus szűréselmélet
- BOOTON és munkatársai továbbfejlesztették változó paraméterű rendszerekre
- NEWTON és iskolája már különböző nemlinearitásokat, korlátokat is figyelembe vesznek a tervezés során

Cél : Egy optimális átviteli függvény meghatározása

Más megfogalmazás:

- Optimális irányítójel
- Optimális irányítás törvényeinek meghatározása

AZ optimális rendszerek tervezése, méretezése az alábbi három részből áll napjainkban:

- 1 – optimalizálási kritérium meghatározása
- 2 – optimális irányítás törvényének meghatározása
- 3 – optimális irányítóberendezés („szabályozó”) felépítésének meghatározása

### Statikus optimalizálás

Az optimalizálandó rendszer algebrai egyenletekkel van leírva.

### Dinamikus optimalizálás

Az optimalizálandó rendszer differenciál-egyenletrendszerekkel van leírva.  
Visszavezethető statikus optimalizálásra, ha van kellő gyorsaságú számítógép.

Nézzünk egy egyszerű példát:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathfrak{F}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Végértékek:

$$\begin{aligned}x_1(T) &= x_{1T} \\ x_2(T) &= x_{2T}\end{aligned}$$

Kérdés:

$$x_1(0) = ?$$

$$x_2(0) = ?$$

A rendszer differenciál egyenleteivel adott, így dinamikus optimalizálást alkalmazunk. Vezessük be a következő költségfüggvényt:

$$C = |x_1(t) - x_{1T}| + |x_2(t) - x_{2T}|$$

$$C = C(x_1(0), x_2(0))$$

Ha elég gyors az aritmetikai egység, akkor az összes időbeli változóhoz folytonos költségfüggvény rendelhető.

Így végül statikus optimalizálásra vezettem vissza a dinamikus optimalizálást.

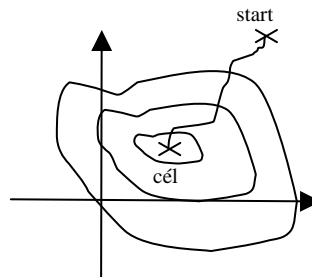
### Optimalizációs módszerek

*Folytonos gradiens módszer*

$$F = F(p_1, p_2)$$

$$p_1(t) = ?$$

$$p_2(t) = ?$$



Mindig a maximális meredekséggel juttassuk le a rendszert.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dt} = \vec{\text{grad}} F * \vec{p}$$

optimum:

$$\vec{p} = \pm k \vec{\text{grad}} F$$

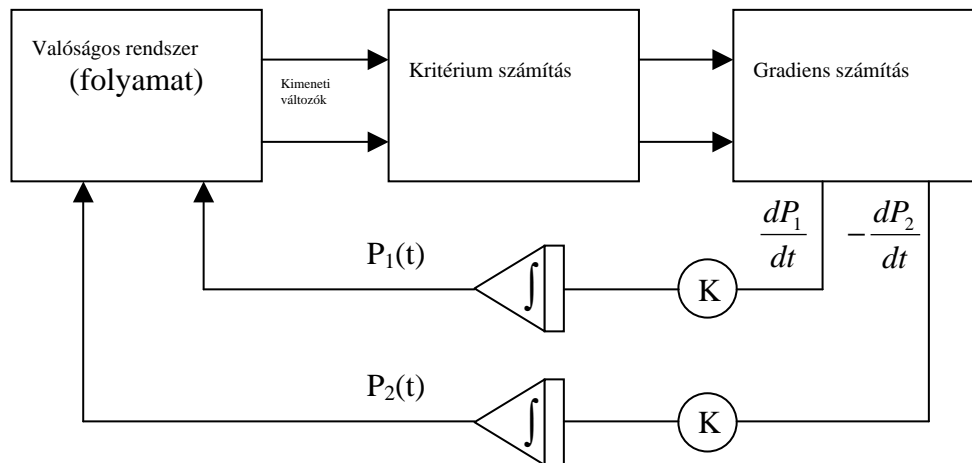
k – arányossági tényező

+  $\eta$  (hatásfok)

- költség

$$\frac{dF}{dt} = \pm K \left| \vec{\text{grad}} F \right|^2$$

Folytonos gradiens módszer gyakorlati megvalósítása:

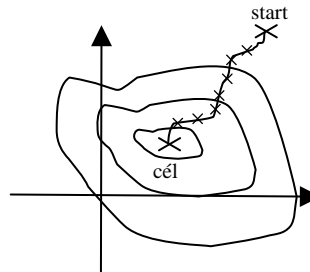


Diszkrét gradiens módszer

$$\dot{\mathbf{P}} = (d_{p_1} \ d_{p_2})$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial P_1} \Delta P_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2} \Delta P_2 = \vec{\text{grad}} F * \Delta \mathbf{P}$$

$$\Delta \mathbf{P} = \pm K \vec{\text{grad}} F$$



Iterációs módszer:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{P}_{i-1} \end{pmatrix} \pm K \vec{\text{grad}} F$$

$\vec{\text{grad}} F$  számítása

$$\frac{\partial F}{\partial P_j} = \frac{F\left(\vec{P} + d_{P_j} \vec{\phantom{P}}\right) - F\left(\vec{P} - d_{P_j} \vec{\phantom{P}}\right)}{2d_{P_j}}$$

ahol:

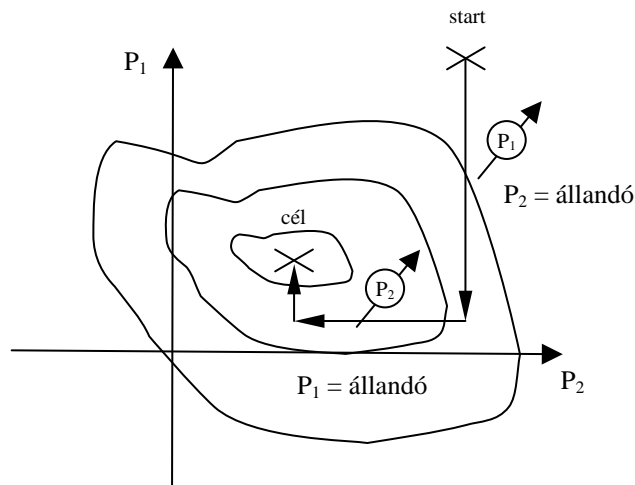
$$d_{P_j} \vec{\phantom{P}} = (0, 0, \dots, d_{P_j}, \dots, 0) \text{ (a } j\text{-ik komponens)}$$

K arányossági tényező megválasztása kompromisszum eredménye, kompromisszum a sebesség és a számítás pontossága között.



*Relaxációs módszer*

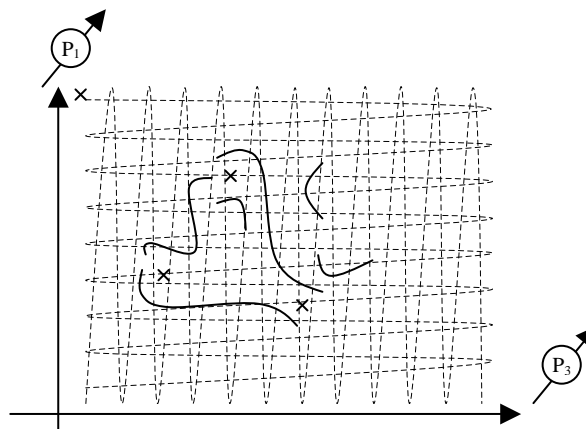
Az egyik paramétert (pl.:  $p_2$ -t) adott szinten tartjuk.  $P_1$ -t változtatjuk. Eljutunk egy olyan pontra, ahol a költség már nem csökken. Ekkor a fix és a változtatott paramétereket felcseréljük,  $p_1$  lesz az állandó.



Az eddig említett három eljárás közös hátránya, hogy megállhatnak a rendszer lokális maximumában, vagy minimumában.

*BFM („The Brutal Force Method”)*

A paramétereket úgy változtatjuk, hogy az összes lokális maximum helyeket végigpásztázom. Fontos, hogy a rendszerben ne okozzunk maradandó károsodást. Nagyon lassú, de tényleges optimum-meghatározást megvalósító eljárás.

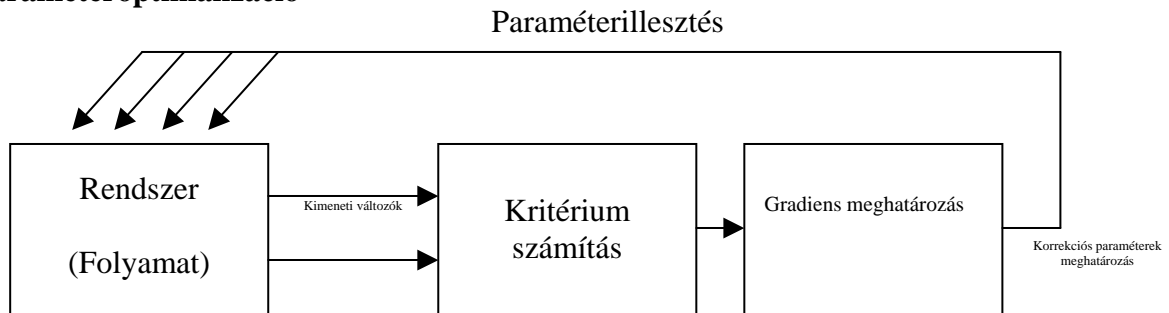


## SZÁMÍTÓGÉPES OPTIMALIZÁCIÓS MÓDSZEREK GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

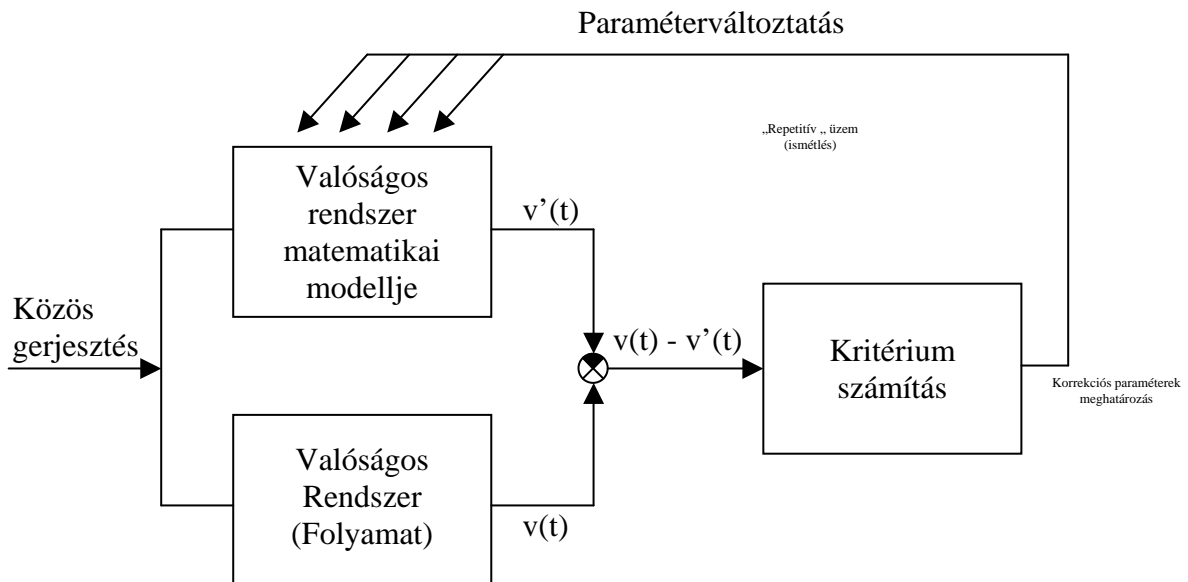
Gyakorlati alkalmazásnál két fontos dologról kell beszélni:

- Paraméteroptimalizáció
- Folyamat identifikáció

### Paraméteroptimalizáció



### Folyamat identifikáció



Példa:

$$Y(s) = \frac{A}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

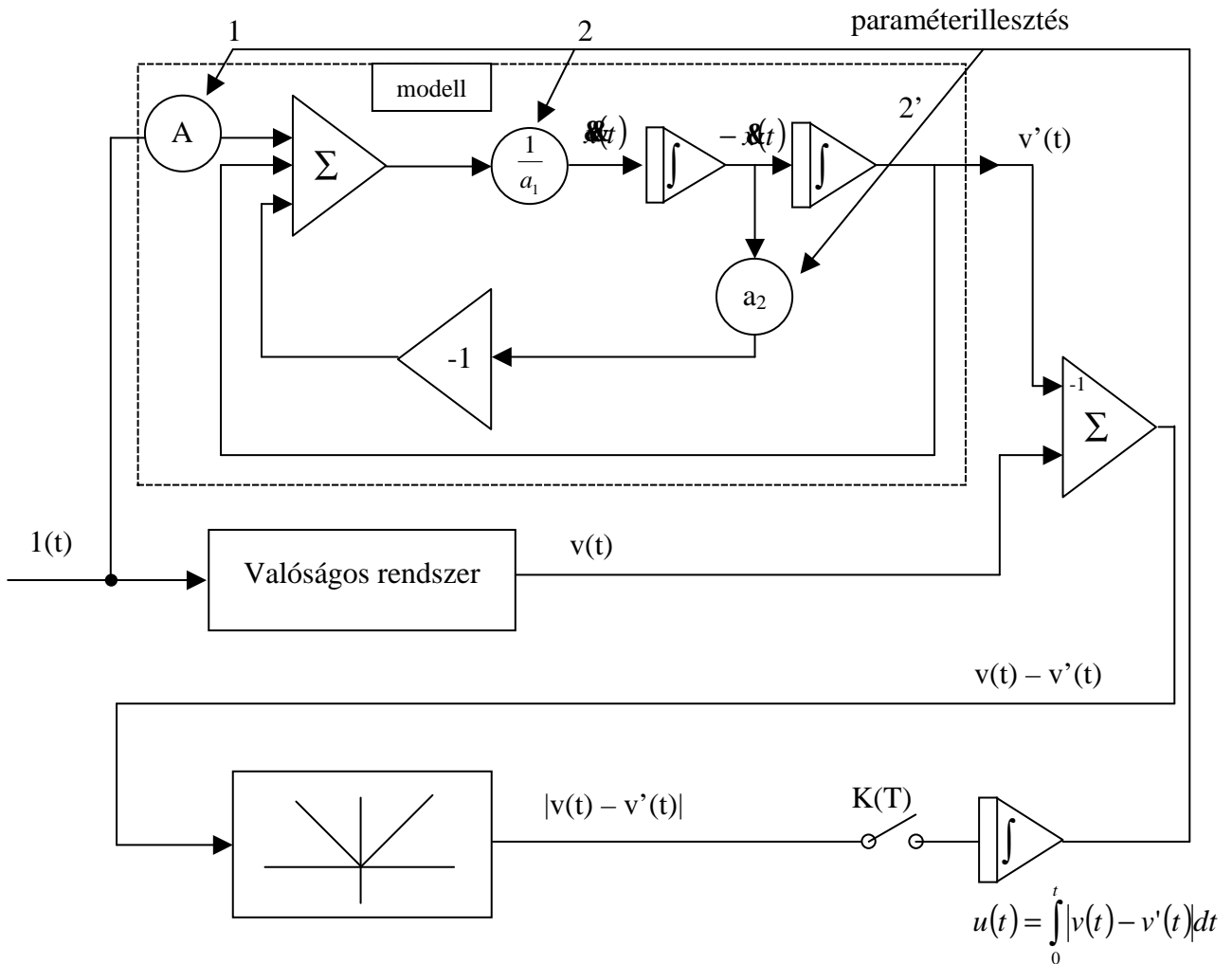
$$T_1 T_2 \ddot{x}(t) + (T_1 + T_2) \dot{x}(t) + x(t) = A * x_{be}$$

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + x(t) = A * x_{be}(t)$$

Legyen  $x_{be}(t) = 1(t)$

Kérdés:

A = ?  
a<sub>1</sub> = ?  
a<sub>2</sub> = ?



Adott egy valóságos rendszer, párhuzamosan kapcsolva annak matematikai modellje. A matematikai modellt kell úgy illeszteni, állandóan változtatva a három paramétert,  $A, a_1, a_2$  paramétereket ismétlődő üzemben, hogy az minél jobban leképezze a valóságos rendszert. A „K” kapcsoló egy  $T$  idő múlva kapcsol.

A  $T$  késletetés olyan, hogy, az első két tag már zérussá vált, tehát marad a következő differenciál egyenlet:

$$x(t) = A * x_{be}(t)$$

Így csak egyetlen paramétert kell változtatnom, és máris meghatároztam a rendszer tényleges  $A$  értékét.

Amikor ez megtörtént, zárom a kapcsolót.

Ciklikusan változtatom  $a_1, a_2$  paramétereket úgy, hogy a két átmeneti függvény azonos legyen.

A számítógépes programban vagy úgy adom meg az integrál kritériumot, hogy 1% eltérés, vagy hogy a gradiens pl.: 10 mV/perc, amikor már olyan kicsi a változás, hogy nem érdemes tovább végezni az iterációt.

## TARTALOMJEGYZÉK

Folyamatidentifikáció.....	1
Algebrai egyenletek, egyenlőtlenségek.....	7
Differenciál egyenletrendszerek.....	14
Algebrai hurok kiküszöbölése:.....	18
Átviteli függvény.....	20
Egy kétperces kitérő:.....	20
Átviteli Függvény.....	22
1. Segédváltozás módszer.....	23
2. Közvetlen programozás.....	24
Parciális differenciálegyenletek megoldása.....	27
Amplitúdó és időléptékezés.....	33
Amplitúdó léptékezés.....	33
Normalizált változók módszere (NVM).....	33
Dimenziós léptéktényezők módszere (DLM).....	34
Időléptékezés.....	36
Változók maximális értékeinek meghatározása.....	39
Egyenlő együtthatók szabálya (Jackson szabály).....	41
Paraméteroptimalizálás.....	43
Optimalizálási kritériumok.....	43
Integrálkritériumok.....	44
Lathroph és társai féle „8”-as.....	45
Optimalizálási kritériumok számítása.....	45
$I_{10}$ számítása.....	45
$I_{20}$ számítása.....	46
$I_{30}$ számítása.....	48
Gyakorlati módszerek a paraméteroptimalizálásra.....	48
Zieglen-Nicholas módszer:.....	49
Chien – Hrones – Reswicz módszer:.....	49
Kessler módszer:.....	50
Folyamatidentifikáció.....	51
Folyamatidentifikáció:.....	51
2/c - Átmeneti függvényt közelítő módszer.....	52
Holtidő meghatározása:.....	53
3 – Integráló módszer.....	53
4 – Számítógépes optimalizálási eljárás.....	56
Többparaméteres kapcsolt szabályozások (TKSz).....	57
Probléma felvetés.....	57
A keresztkapcsolatok kiküszöbölése.....	60
Megvalósíthatóság:.....	61
Többparaméteres kapcsolt rendszerek stabilitás vizsgálata, kompenzálása.....	64
Stabilitás:.....	64
Kompenzálás.....	66
Nemlineáris rendszerek.....	68
I.) Probléma felvetés:.....	68
II.) Nemlinearitások osztályozása.....	69
III.) Nemlineáris rendszerek vizsgálati módszerei.....	69

FOLYAMATIDENTIFIKÁCIÓ – SZIMULÁCIÓ  
Órai jegyzet

---

1.)Munkaponti linearizáció .....	69
2.) Fázis – síkmódszer .....	70
A leíró függvény módszer és alkalmazása .....	74
Alap feltevések:.....	74
Feltételezések: .....	74
A leíró függvény módszer alkalmazása .....	78
Stabilitás vizsgálat:.....	78
Nemlineáris rendszerek kompenzálása .....	82
Lineáris kompenzálás megvalósítása .....	82
Nemlineáris kompenzálás megvalósítása.....	84
Számítógépes Optimalizációs módszerek .....	85
Számítógépes optimalizálás előnyei.....	85
Számítógépes optimalizálás hátrányai .....	86
Kronológia.....	86
Statikus optimalizálás.....	86
Dinamikus optimalizálás .....	86
Optimalizációs módszerek .....	87
Folytonos gradiens módszer .....	87
Folytonos gradiens módszer gyakorlati megvalósítása:.....	88
Diszkrét gradiens módszer .....	88
Relaxációs módszer.....	89
BFM („The Brutal Force Method”) .....	89
Számítógépes optimalizációs módszerek gyakorlati alkalmazása .....	90
Paraméteroptimalizáció .....	90
Folyamat identifikáció.....	90
Tartalomjegyzék.....	93