ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2011. dec. 1.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

Mit értünk azon, hogy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$? $(A \in \mathbb{R})$

A definíció segítségével igazolja, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-6x}{3+2x} = -3 \; ! \qquad P(\varepsilon) = ?$$

D $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$:

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, P(\varepsilon) > 0$ $(\varepsilon, P \in \mathbb{R})$:
$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x < -P(\varepsilon)$ 2

$f(x) = \frac{2-6x}{3+2x}$, $A = -3$:

$|f(x) - A| = \left|\frac{2-6x}{3+2x} + 3\right| = \left|\frac{2-6x+3(3+2x)}{3+2x}\right| = \frac{11}{|3+2x|} < \varepsilon$

8 $\Rightarrow |3+2x| > \frac{11}{\varepsilon} \underset{x\to-\infty}{\Rightarrow} -(3+2x) > \frac{11}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\frac{1}{2}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 3\right)$

$\Rightarrow P(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 3\right)$

2. feladat (14 pont)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-2)\,\sin^2(2x)}$$

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ b) $\lim_{x\to 2} f(x) = ?$ c) $\lim_{x\to \pi} f(x) = ?$

a.) $\boxed{6}$ $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x-2}{x-2}}_{=1} \underbrace{\left(\frac{x\cdot 2}{\sin 2x}\right)^2}_{\to 1} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

b.) $\boxed{4}$ $\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{x-2}{x-2}}_{=1} \frac{x^2}{\sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 4}$

c.) $\boxed{4}$ $\lim_{x\to \pi} \cancel{\frac{x-2}{x-2}} \frac{x^2 \to \pi^2}{\sin^2 2x \to +0} = +\infty$

an1z2p111201/1.

3. feladat (18 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x-3}{2-x}, & \text{ha } x < 2 \\ \ln(x^2-3), & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Hol és milyen szakadása van az f függvénynek?
Differenciálható-e a függvény $x = 2$-ben?
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol létezik!

a.)

$\boxed{11}$

$x = 2$ kivételével f folytonos.

(6)

$f(2+0) = f(2) = \ln(4-3) = \ln 1 = 0$

$f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} \operatorname{arctg} \dfrac{\overset{\to -1}{x-3}}{\underset{\to +0}{2-x}} = -\dfrac{\pi}{2}$; $\to -\infty$

$x = 2$-ben véges ugrás van (elsőfajú szakadás)

$f'(2) \nexists$, mert f nem folytonos $x = 2$-ben. (2)

(3)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x-3}{2-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\dfrac{1-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1}}_{-1} =$

$= \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

b.)

$\boxed{7}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{x-3}{2-x}\right)^2} \cdot \dfrac{1 \cdot (2-x)-(x-3)(-1)}{(2-x)^2}, & \text{ha } x < 2 \quad (4) \\ \dfrac{2x}{x^2-3}, & \text{ha } x > 2 \quad (3) \end{cases}$$

an1z2p111201/2.

4. feladat (11 pont)

$$f(x) = |x-1| \ \sin(3x-3)$$

a) Határozza meg a számolási szabályok alapján $f'(x)$ értékét $x<1$ esetén!

b) Határozza meg a *derivált definíciója* alapján $f'(1)$ értékét!

a.) $\boxed{4}$

$x<1$: $\quad f(x) = (1-x)\sin(3x-3)$

$$f'(x) = -\sin(3x-3) + (1-x)\cdot\cos(3x-3)\cdot 3$$

b.) $\boxed{7}$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (2) \quad = \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|\sin(3x-3) - 0}{x-1} \quad (1) \quad =$$

$$= \lim_{x\to 1} \underbrace{|x-1|}_{\downarrow\, 0} \ \frac{\sin(3x-3)}{3(x-1)} \cdot 3 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\sin(3x-3)}{3(x-1)} \to 1 \quad \left(\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1\right)$$

5. feladat (16 pont)

$$f(x) = 4\ \arcsin(3x-1) - 2\pi$$

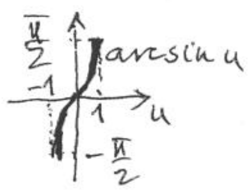
a) $D_f = ?\,,\quad R_f = ?\,,\quad f'(x) = ?\,,\quad D_{f'} = ?$

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!
$f^{-1}(x) = ?\,,\quad D_{f^{-1}} = ?\,,\quad R_{f^{-1}} = ?$

a.) $\boxed{9}$

É.T. : $\quad -1 \le 3x-1 \le 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le x \le \frac{2}{3}$: $\quad D_f = [0, \frac{2}{3}]$ (2)



É.K.: $\quad \arcsin(3x-1) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$4\cdot\arcsin(3x-1) \in [-2\pi, 2\pi] \Rightarrow R_f = [-4\pi, 0]$ (2)

$$f'(x) = 4\,\frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}\cdot 3 \quad (4) \qquad D_{f'} = (0, \tfrac{2}{3}) \quad (1)$$

b) $\boxed{7}$

f szigorúan monoton D_f-en, mert $f'(x)>0$ a $(0, \frac{2}{3})$ intervallumon és f folytonos $[0, \frac{2}{3}]$-on

$\Rightarrow \exists\, f^{-1}$ D_f-en. (2)

an1z2p111201/3.

$y = 4 \arcsin(3x-1) - \pi \Rightarrow \arcsin(3x-1) = \frac{y+\pi}{4}$

$\Rightarrow 3x-1 = \sin\frac{y+\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\left(1 + \sin\frac{y+\pi}{4}\right)$

$x \Leftrightarrow y: \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left(1 + \sin\frac{x+\pi}{4}\right)$ (3)

$D_{f^{-1}} = R_f = [-4\pi, 0]$; $R_{f^{-1}} = D_f = [0, \frac{2}{3}]$ (2)

6. feladat (15 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x^2)}{\sin^2(4x)} = ? \qquad b) \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x} + 2e^{-2x} - e^{-4x}}{2e^{3x} + 4e^{x} + 5e^{-4x}} = ?$$

a.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x^2}{\sin^2 4x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}}}^{1\leftarrow} \cdot 4x}{2 \cdot \underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\cos 4x}_{\to 1} \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

b.) $\boxed{8}$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x} + 2e^{-2x} - e^{-4x}}{2e^{3x} + 4e^{x} + 5e^{-4x}} = \lim_{x\to -\infty} \underbrace{\frac{e^{-4x}}{e^{-4x}}}_{=1} \frac{e^{7x} + 2e^{2x} - 1}{2e^{7x} + 4e^{5x} + 5} =$$

$$= \frac{0 + 0 - 1}{0 + 0 + 5} = -\frac{1}{5}$$

7. feladat (16 pont)

$$f(x) = e^{-2x^2+4}$$

a) $f'(x) = ?, \qquad f''(x) = ?$

b) Írja fel az $x_0 = \sqrt{2}$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

c) Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiója?

a.) $\boxed{5}$

$$f'(x) = e^{-2x^2+4}(-4x) \quad 2$$

$$f''(x) = e^{-2x^2+4}(-4x)(-4x) + e^{-2x^2+4}(-4) \quad 3$$

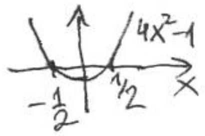
b.) $\boxed{4}$

$$y_e = f(\sqrt{2}) + f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 1 - 4\cdot\sqrt{2}\,(x-\sqrt{2})$$

2 2

c.) $\boxed{7}$

$$f''(x) = 4\underbrace{e^{-2x^2+4}}_{>0}(4x^2-1) = 0 \Rightarrow 4x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$



	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
f''	+	0	−	0	+
f	$\cup$	infl. pont	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{x\to-1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = ?$ b) $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = ?$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = ?$

a) $\boxed{4}$

$$\lim_{x\to-1} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{x+1}{x+1}}_{=1}(x-1) = \operatorname{arctg}(-2)$$

b.) $\boxed{3}$

$$\lim_{x\to0} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x+1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

c.) $\boxed{3}$

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \left(\underbrace{\frac{x+1}{x+1}}_{=1,\ \text{ha } x\neq-1}(x-1)\right)^{\to\infty} = \frac{\pi}{2}$$

an1z2p111201/5.

9. feladat (10 pont)

$$a)\quad \frac{d}{dx}\Big(\operatorname{ch}(3x+1)\Big)^{2/x^3} = ? \qquad\qquad b)\quad \frac{d}{dx}\Big(\frac{3+5x}{x^2+e^{3x}}\Big) = ?$$

a.) $\boxed{6}$

$$f(x) := \left(ch(3x+1)\right)^{\frac{2}{x^3}} = e^{\frac{2}{x^3}\ln ch(3x+1)} \quad (2) \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = e^{\frac{2}{x^3}\ln ch(3x+1)} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\cdot \ln ch(3x+1)\right)' =$$

$$= \left(ch(3x+1)\right)^{\frac{2}{x^3}}\left(2\cdot(-3)x^{-4}\ln ch(3x+1) + \frac{2}{x^3}\frac{sh(3x+1)\cdot 3}{ch(3x+1)}\right)$$

(4)

b.) $\boxed{4}$

$$g(x) := \frac{3+5x}{x^2+e^{3x}}$$

$$g'(x) = \frac{5\cdot(x^2+3x) - (3+5x)(2x+3\cdot e^{3x})}{(x^2+e^{3x})^2}$$

anl z2p 111201/6.