Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2016. január 21.

1. Írja le a gyorsrendezés algoritmusát! Mit tudunk mondani a lépésszámáról? (Az algoritmus helyességét és a lépésszámot nem kell indokolni.)

2. Írja le részletesen, hogyan lehet az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet műveleteit fákkal (útösszenyomás nélkül) megvalósítani! Ez alapján magyarázza meg, mennyi lesz ilyenkor az egyes műveletek lépésszáma!

3. Írja le a Karp-redukció definícióját! Szemléltesse a fogalmat egy, a MAXFTL és MAXKLIKK problémák közötti visszavezetéssel, amin megmagyarázza, miért teljesülnek a definícióbeli feltételek!

---

4. Jelölje $L(n)$ egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken. Tudjuk, hogy $L(n) \leq L(n-2) + 5\log n + 2$, ha $n \geq 10$ és $L(n) \leq 20$, amikor $n < 10$. Igazolja, hogy $L(n) = O(\log(n!))$.

5. Legyen G egy n csúcsú egyszerű, irányítatlan gráf. Tudjuk, hogy G egy mélységi bejárásánál minden csúcsra teljesül, hogy a mélységi és a befejezési szám összege legfeljebb $n+1$. Határozza meg az összes lehetséges ilyen mélységi feszítőfát! Mennyi a legtöbb él, amit a G gráf tartalmazhat?

6. Az A algoritmus bemenete egy egyszerű, irányítatlan $G = (V, E)$ gráf szomszédossági mátrixa, és egy $k > 0$ egész szám lehet. Az A algoritmus eredménye 1, ha G-ben van k elemű lefogó élrendszer (azaz olyan $X \subseteq E$ élhalmaz, amely k élet tartalmaz és minden $x \in V$ csúcsra illeszkedik legalább egy X-beli él), egyébként az eredménye 0. Hogyan lehet egy szomszédossági mátrixával adott egyszerű, irányítatlan, n csúcsú H gráfban megtalálni egy minimális elemszámú lefogó élhalmaz éleit úgy, hogy ehhez az A algoritmust $O(n^2)$-szer hívjuk meg, és az A futásán kívül n-ben polinomiálisan sok lépést használunk?

7. P-beli vagy NP-teljes a következő feladat: Egy G irányítatlan gráf esetén az a kérdés, hogy G minden éle benne van-e a gráf valamelyik körében?

8. Adott egy $(n \times n)$-es táblázat, ahol az i-edik sor j-edik mezőjében az $A[i, j]$ szám áll. Az első sor első eleméből indulunk, egyszerre egyet léphetünk vízszintesen vagy függőlegesen valamelyik irányban, de mindig csak úgy, hogy az egymás után meglátogatott mezőkben álló számok növekvő sorozatot adjanak. Adjon algoritmust, amellyel $O(n^2)$ időben meghatározható a legtöbb lépésből álló útvonal hossza! (Feltehetjük, hogy az $A[i, j]$ értékek mind különbözők.)