Vizsgazárthelyi

A2 2012. május 24.

1. Keresse meg azt az **a** valós számot, melyre a következő egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és adja meg összes megoldást!

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 16 \\ 2x + 2y + 4z &= 12 \\ -2x + 6y + 4z &= \mathbf{a} \end{aligned}$$

2. Legyen $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f(0,0) = 0$. Létezik-e, és ha igen, folytonos-e f valamelyik parciális deriváltja az origóban?

3. Legyen T a $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$ félkörlap azon része, mely az $y = x$ és az $y = -x$ egyenesek közé esik.

$$\iint_T x\,dx\,dy = ?$$

4. Abszolút konvergens ill. feltételesen konvergens–e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+9}$ sor?

5. Legyen $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$ minden $x \neq 0$–ra és $f(0) = 1$. Létezik-e f negyedik deriváltja az origóban, és ha igen, mi ennek a deriváltnak az értéke itt?

6.

(a) Legyen **A** az L lineáris tér tetszőleges lineáris transzformációja, **0** a nulla- és **I** az identitás-transzormáció ($\mathbf{0}x = 0$, $\mathbf{I}x = x$ minden $x \in L$-re). Igaz-e:

(a1) ha van L-nek olyan $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ lineáris transzformációja, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

(a2) ha $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ vagy $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$.

(b) Igaz-e, hogy

(b1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dydx = 0$ **(b2)** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dydx = 0$.

(c) Létezik-e olyan hatványsor, melynek határfüggvénye minden valós x-re

(c1) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$ **(c2)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 1$.