Jelek és rendszerek 2. házi feladat

2.a Átviteli karakterisztika számítása

F.I.:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -0,84 & 0,8 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1,3 \\ -1,2 \end{bmatrix}; C^T = [-1,7 \quad 1,5]; D = 2,5$$

$$H(j\omega) = C^T(j\omega E - A)^{-1}B + D$$

$$j\omega E - A = \begin{bmatrix} j\omega + 3 & -4 \\ 0,84 & j\omega - 0,8 \end{bmatrix}$$

$$(j\omega E - A)^{-1} = \frac{adj(j\omega E - A)}{\det(j\omega E - A)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,96}\begin{bmatrix} j\omega - 0,8 & 4 \\ -0,84 & j\omega + 3 \end{bmatrix}$$

$$C^T(j\omega E - A)^{-1}B = [-1,7 \quad 1,5]\frac{1}{(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,96}\begin{bmatrix} j\omega - 0,8 & 4 \\ -0,84 & j\omega + 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,3 \\ -1,2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,96}[-1,7j\omega + 0,1 \quad 1,5j\omega - 2,3]\begin{bmatrix} 1,3 \\ -1,2 \end{bmatrix} = \frac{-2,21j\omega + 0,13 - 1,8j\omega + 2,76}{(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,96} =$$

$$\frac{-4,01j\omega + 2,89}{(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,96}$$

Így az átviteli karakterisztika:

$$H(j\omega) = \frac{-4,01j\omega + 2,89}{(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,96} + 2,5 = \boldsymbol{\frac{2,5\,(j\omega)^2 + 1,49j\omega + 5,29}{(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,96}}$$

D.I.:

$$A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -2,5 & -1,4 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,8 \end{bmatrix}; C^T = [1,2 \quad -0,9]; D = -2,2$$

$$H(e^{j\vartheta}) = C^T\left(e^{j\vartheta}E - A\right)^{-1}B + D$$

$$e^{j\vartheta}E - A = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} - 0,6 & -0,5 \\ 2,5 & e^{j\vartheta} + 1,4 \end{bmatrix} => \left(e^{j\vartheta}E - A\right)^{-1} = \frac{1}{(e^{j\vartheta})^2 + 0,8e^{j\vartheta} + 0,41}\begin{bmatrix} e^{j\vartheta} + 1,4 & 0,5 \\ -2,5 & e^{j\vartheta} - 0,6 \end{bmatrix}$$

$$C^T\left(e^{j\vartheta}E - A\right)^{-1}B = \frac{1}{(e^{j\vartheta})^2 + 0,8e^{j\vartheta} + 0,41}[1,2 \quad -0,9]\begin{bmatrix} e^{j\vartheta} + 1,4 & 0,5 \\ -2,5 & e^{j\vartheta} - 0,6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,8 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(e^{j\vartheta})^2 + 0,8e^{j\vartheta} + 0,41}[1,2e^{j\vartheta} + 3,93 \quad -0,9e^{j\vartheta} + 1,14]\begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,8 \end{bmatrix} = \frac{0,12e^{j\vartheta} + 3,663}{(e^{j\vartheta})^2 + 0,8e^{j\vartheta} + 0,41}$$

Így azt átviteli karakterisztika:

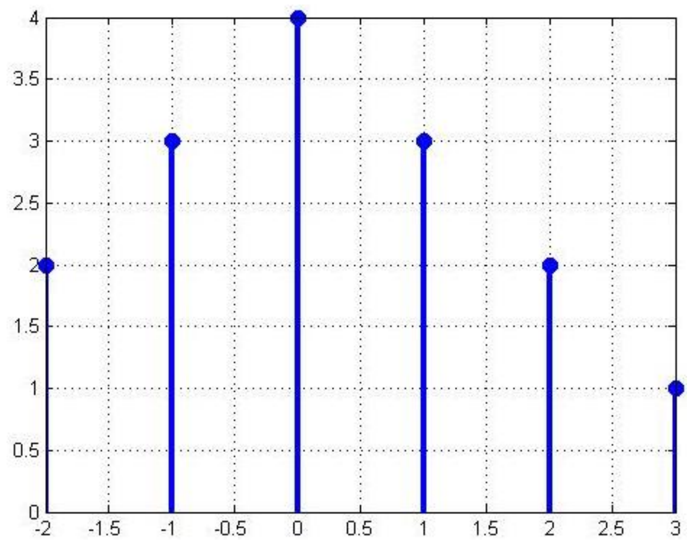
$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0,12e^{j\vartheta} + 3,663}{(e^{j\vartheta})^2 + 0,8e^{j\vartheta} + 0,41} - 2,2 = \boldsymbol{\frac{-2,2\left(e^{j\vartheta}\right)^2 - 1,64e^{j\vartheta} + 2,761}{(e^{j\vartheta})^2 + 0,8e^{j\vartheta} + 0,41}}$$

2.b Fourier-sorfejtés

D.I.:

$$u[k] = 4 - |k|;\ -2 \le k \le 3;\ u[k+6] = u[k]$$

Ábrázolva a jel a fenti perióduson:



$$\vartheta = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}; M = \frac{L}{2} - 1 = 2$$

A Fourier-sor mérnöki valós alakja a mi esetünkben:

$$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^{2} U_p \cos(p\vartheta k + \rho_p) + U_3 \cos(\pi k)$$

Együtthatók számítása:

$$U_0^C = \frac{1}{6}\sum_{k=-2}^{3} u[k]e^{-j0\vartheta k} = \frac{1}{6}(2+3+4+3+2+1) = 2{,}5 => U_0 = 2{,}5$$

$$U_1^C = \frac{1}{6}\sum_{k=-2}^{3} u[k]e^{-j1\vartheta k} = \frac{1}{6}\left(2e^{j\frac{2\pi}{3}} + 3e^{j\frac{\pi}{3}} + 4 + 3e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 1e^{-j\frac{3\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}(4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) +$$

$$6\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 - 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} => U_1 = \frac{4}{3}, \rho_1 = 0$$

$$U_2^C = \frac{1}{6}\sum_{k=-2}^{3} u[k]e^{-j2\vartheta k} = \frac{1}{6}\left(2e^{j\frac{4\pi}{3}} + 3e^{j\frac{2\pi}{3}} + 4 + 3e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{4\pi}{3}} + 1e^{-j\frac{6\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}(4\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) +$$

$$6\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4 + 1) = 0 => U_2 = 0$$

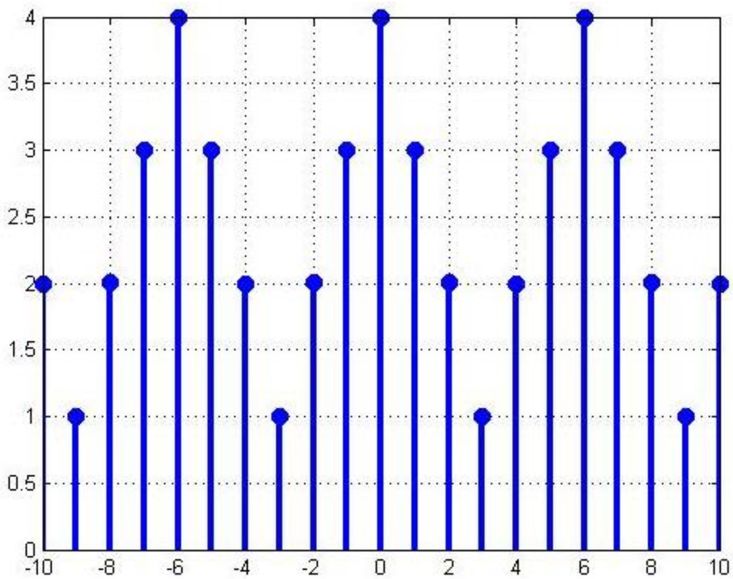
$$U_3^C = \frac{1}{6}\sum_{k=-2}^{3} u[k]e^{-j3\vartheta k} = \frac{1}{6}\left(2e^{j\frac{6\pi}{3}} + 3e^{j\frac{3\pi}{3}} + 4 + 3e^{-j\frac{3\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{6\pi}{3}} + 1e^{-j\frac{9\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}(4\cos(2\pi) +$$

$$6\cos(\pi) + 4 - 1) = \frac{1}{6} => U_3 = \frac{1}{6}$$

Tehát a jel Fourier-sora:

$$u[k] = 2{,}5 + \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \frac{\cos(\pi k)}{6}$$

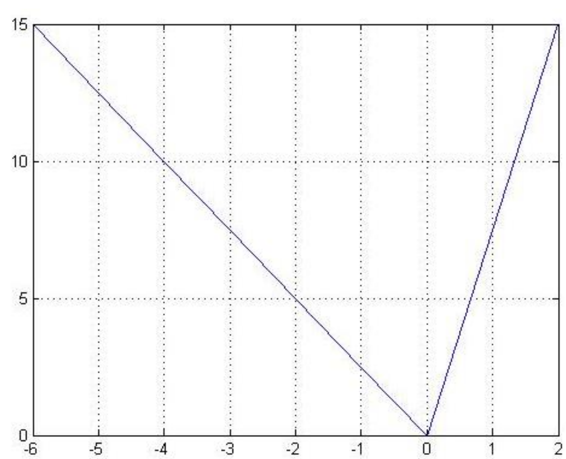
MatLabban ábrázolva látható, hogy azt kaptuk, amit vártunk:



F.I.:

$$u(t) = -2{,}5t + 10t\varepsilon(t) \quad -6 \le t \le 2 \quad u(t+8) = u(t)$$

Ábrázolva matlabban a fenti perióduson:



$$T = 8,\ \ \Omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Az együtthatók számítása:

$$U_0^C = \frac{1}{8}\int_{-6}^{2}\big(-2{,}5t + 10t\varepsilon(t)\big)e^{-j0\Omega t}dt = \frac{1}{8}\left(\int_{-6}^{0} -2{,}5t\,dt + \int_{0}^{2} 7{,}5t\,dt\right) = \frac{1}{8}\left(\left[-2{,}5\frac{t^2}{2}\right]_{-6}^{0} + \left[7{,}5\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}(45 + 15) = 7{,}5$$

$$U_1^C = \frac{1}{8}\int_{-6}^{2}\big(-2{,}5t + 10t\varepsilon(t)\big)e^{-j\frac{\pi}{4}t}dt = \frac{-2{,}5}{8}\int_{-6}^{0} te^{-j\frac{\pi}{4}t}dt + \frac{7{,}5}{8}\int_{0}^{2} te^{-j\frac{\pi}{4}t}dt$$

A fenti integranduszt parciálisan kell integrálnunk:

$$\int te^{-jkt}dt = t\frac{e^{-jkt}}{-jk} - \int \frac{e^{-jkt}}{-jk}dt = \frac{te^{-jkt}}{-jk} + \frac{1}{jk}\frac{e^{-jkt}}{-jk} = \frac{te^{-jkt}}{-jk} + \frac{e^{-jkt}}{k^2} = \left(\frac{j-kt}{jk^2}\right)e^{-jkt}$$

Így ezt felhasználva:

$$U_1^C = \frac{-2{,}5}{8}\left[\left(\frac{j-\frac{\pi}{4}t}{j\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\right)e^{-j\frac{\pi}{4}t}\right]_{-6}^{0} + \frac{7{,}5}{8}\left[\left(\frac{j-\frac{\pi}{4}t}{j\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\right)e^{-j\frac{\pi}{4}t}\right]_{0}^{2} = -2.0264\ -\ 2.0264j = 2{,}866e^{j\frac{5\pi}{4}}$$

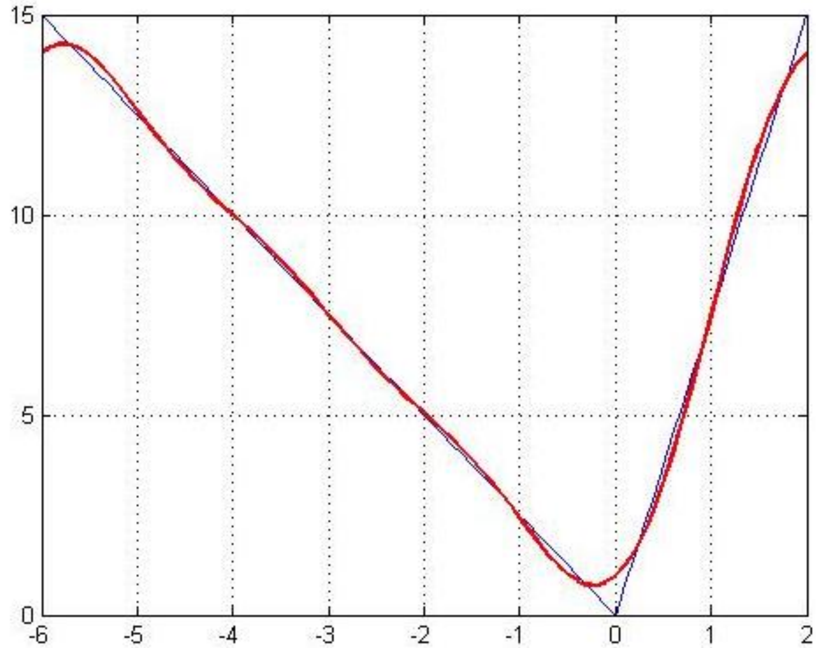
$$U_2^C = \frac{-2{,}5}{8}\left[\left(\frac{j-\frac{\pi}{2}t}{j\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right]_{-6}^{0} + \frac{7{,}5}{8}\left[\left(\frac{j-\frac{\pi}{2}t}{j\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right]_{0}^{2} = -1{,}0132$$

$$U_3^C = \frac{-2{,}5}{8}\left[\left(\frac{j-\frac{3\pi}{4}t}{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2}\right)e^{-j\frac{3\pi}{4}t}\right]_{-6}^{0} + \frac{7{,}5}{8}\left[\left(\frac{j-\frac{3\pi}{4}t}{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2}\right)e^{-j\frac{3\pi}{4}t}\right]_{0}^{2} = \ -0.2252\ +\ 0.2252i = 0{,}318e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

A mérnöki valós alak a mi esetünkben így alakul, hogyha három nem nulla felharmonikust kell használni:

$$u(t) = 7{,}5 + 5{,}732\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{4}\right) - 2{,}0264\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 0{,}636\cos(\frac{3\pi}{4}t + \frac{3\pi}{4})$$

Ábrázolva mindkét függvény a MatLabban:



Látható, hogy a sorfejtés a lehetőségekhez mérten megközelíti az eredeti jelet.

2.c Válaszjel számítása

D.I.:

Átviteli karakterisztika:

$$H\left(e^{j\vartheta}\right)=\frac{-2{,}2\left(e^{j\vartheta}\right)^2-1{,}64e^{j\vartheta}+2{,}761}{(e^{j\vartheta})^2+0{,}8e^{j\vartheta}+0{,}41}$$

Gerjesztés:

$$u[k]=2{,}5+\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)+\frac{\cos(\pi k)}{6}$$

Nekünk az átviteli karakterisztika kell $\vartheta=0,\frac{\pi}{3},\pi$ helyeken:

$$H\left(e^{j0}\right)=\frac{-2{,}2\left(e^{j0}\right)^2-1{,}64e^{j0}+2{,}761}{(e^{j0})^2+0{,}8e^{j0}+0{,}41}=-0{,}488$$

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{-2{,}2\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^2-1{,}64e^{j\frac{\pi}{3}}+2{,}761}{\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^2+0{,}8e^{j\frac{\pi}{3}}+0{,}41}=\ -1.6790\ -\ 2.2847j=2{,}835e^{j4{,}0786}$$

$$H\left(e^{j\pi}\right)=\frac{-2{,}2\left(e^{j\pi}\right)^2-1{,}64e^{j\pi}+2{,}761}{(e^{j\pi})^2+0{,}8e^{j\pi}+0{,}41}=\ 3{,}6082$$

Így a válaszjel:

$$Y\left(e^{j0}\right) = 2{,}5 \cdot (-0{,}488) = -1{,}22$$

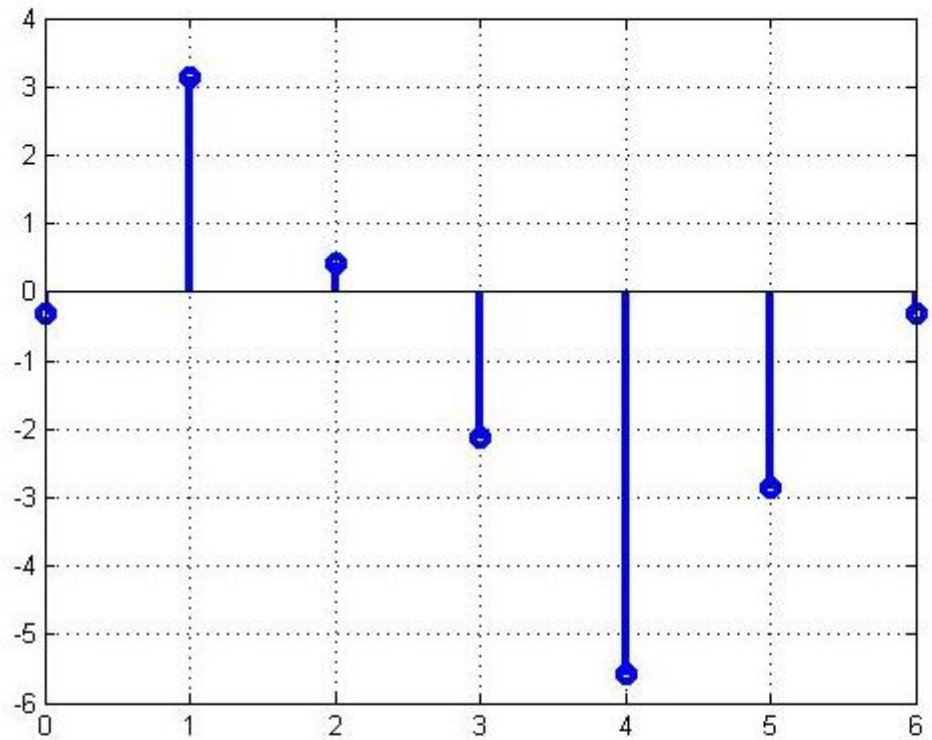
$$Y\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{4}{3} 2{,}835 e^{j4{,}0786} = 3{,}78 e^{j4{,}0786}$$

$$Y\left(e^{j\pi}\right) = \frac{1}{6} \cdot 3{,}6082 = 0{,}6013$$

Így:

$$y[k] = -1{,}22 + 3{,}78 \cos\left(\frac{\pi}{3} k + 4{,}0786\right) + 0{,}6013 \cos(\pi k)$$

Ábrázolva MatLabban:



F.I.:

Átviteli karakterisztika:

$$H(j\omega) = \frac{2{,}5\,(j\omega)^2 + 1{,}49 j\omega + 5{,}29}{(j\omega)^2 + 2{,}2 j\omega + 0{,}96}$$

Gerjesztés:

$$u(t) = 7{,}5 + 5{,}732 \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{5\pi}{4}\right) - 2{,}0264 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + 0{,}636 \cos\left(\frac{3\pi}{4} t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Nekünk az átviteli karakterisztika kell $\omega = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$

$$H(j0) = \frac{2{,}5\,(j0)^2 + 1{,}49 j0 + 5{,}29}{(j0)^2 + 2{,}2 j0 + 0{,}96} = 5{,}510$$

$$H\left(j\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2,5\ \left(j\frac{\pi}{4}\right)^2+1,49j\frac{\pi}{4}+5,29}{\left(j\frac{\pi}{4}\right)^2+2,2j\frac{\pi}{4}+0,96}=1.066\ -\ 1.9574j=2,2288e^{j5,211}$$

$$H\left(j\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2,5\ \left(j\frac{\pi}{2}\right)^2+1,49j\frac{\pi}{2}+5,29}{\left(j\frac{\pi}{2}\right)^2+2,2j\frac{\pi}{2}+0,96}=\ 0.6622-\ 0.0346j=0,6631e^{-0,0522j}$$

$$H\left(j\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2,5\ \left(j\frac{3\pi}{4}\right)^2+1,49j\frac{3\pi}{4}+5,29}{\left(j\frac{3\pi}{4}\right)^2+2,2j\frac{3\pi}{4}+0,96}=\ 1.2019\ +\ 0.5923j=1,3399e^{j0,4579}$$

Így a válaszjel:

$$Y(0)=7,5\cdot 5,510=41,3281$$

$$Y\left(j\frac{\pi}{4}\right)=5,732e^{j\frac{5\pi}{4}}\cdot 2,2288e^{j5,211}=12,7755e^{j2,8548}$$

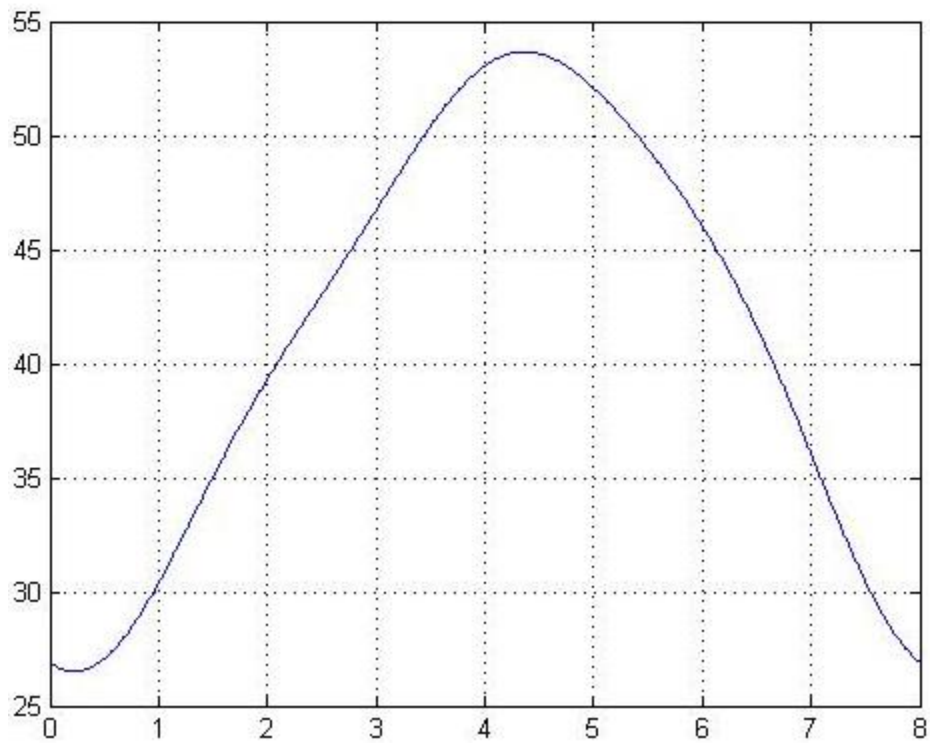
$$Y\left(j\frac{\pi}{2}\right)=-2,0264\cdot 0,6631e^{-0,0522j}=-1,3437e^{-0,0522j}$$

$$Y\left(j\frac{3\pi}{4}\right)=0,636e^{j\frac{3\pi}{4}}\cdot 1,3399e^{j0,4579}=0,8522e^{j2,8141}$$

Így:

$$y(t)=41,3281+12,7755\cos\left(\frac{\pi}{4}t+2,8548\right)-1,3437\cos\left(\frac{\pi}{2}t-0,0522\right)+0,8522\cos(\frac{3\pi}{4}t+2,8141)$$

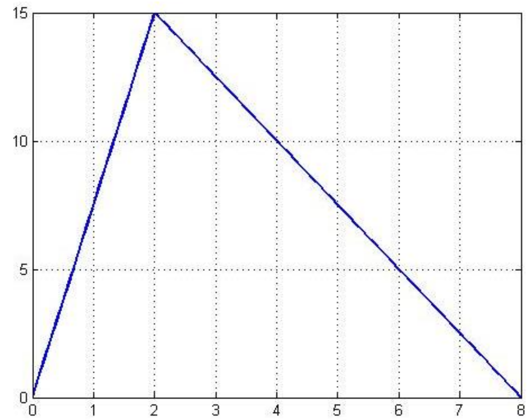
Ábrázolva MatLabban:



2.d Fourier-transzformált

F.I.:

A jel ábrázolva a feladatban megadottak alapján:



$$U(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{2}7{,}5te^{-j\omega t}dt+\int_{2}^{8}-2{,}5(t-8)e^{-j\omega t}dt=7{,}5\int_{0}^{2}te^{-j\omega t}dt-$$

$$-2{,}5\int_{2}^{8}te^{-j\omega t}dt+20\int_{2}^{8}e^{-j\omega t}dt=7{,}5\left[\left(\frac{j-\omega t}{j\omega^2}\right)e^{-j\omega t}\right]_0^2-2{,}5\left[\left(\frac{j-\omega t}{j\omega^2}\right)e^{-j\omega t}\right]_2^8+20\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_2^8=$$

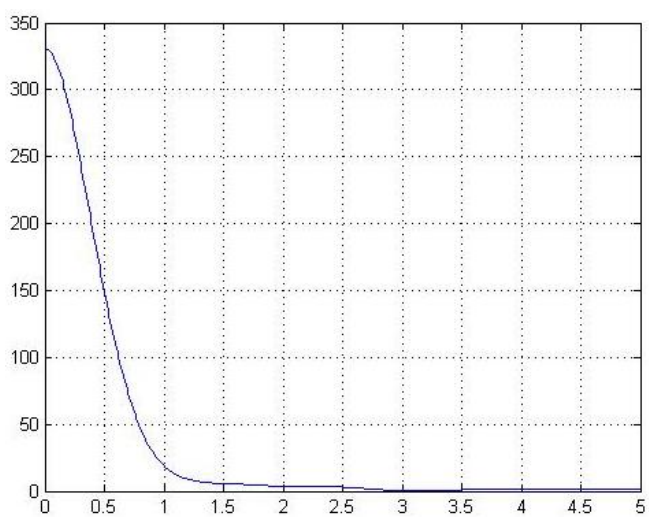
$$7{,}5\left(\left(\frac{j-2\omega}{j\omega^2}\right)e^{-j2\omega}-\frac{1}{\omega^2}\right)-2{,}5\left(\left(\frac{j-8\omega}{j\omega^2}\right)e^{-j8\omega}-\left(\frac{j-2\omega}{j\omega^2}\right)e^{-j2\omega}\right)-20\frac{e^{-j8\omega}}{j\omega}+20\frac{e^{-j2\omega}}{j\omega}=$$

$$\left(10\left(\frac{j-2\omega}{j\omega^2}\right)+\frac{20}{j\omega}\right)e^{-j2\omega}-\frac{7{,}5}{\omega^2}-\left(2{,}5\left(\frac{j-8\omega}{j\omega^2}\right)+\frac{20}{j\omega}\right)e^{-j8\omega}=$$

$$e^{-j2\omega}\left(\frac{10j}{j\omega^2}\right)-\frac{7{,}5}{\omega^2}-e^{-j8\omega}\left(\frac{2{,}5j}{j\omega^2}\right)=\frac{10e^{-j2\omega}-2{,}5e^{-j8\omega}-7{,}5}{\omega^2}$$

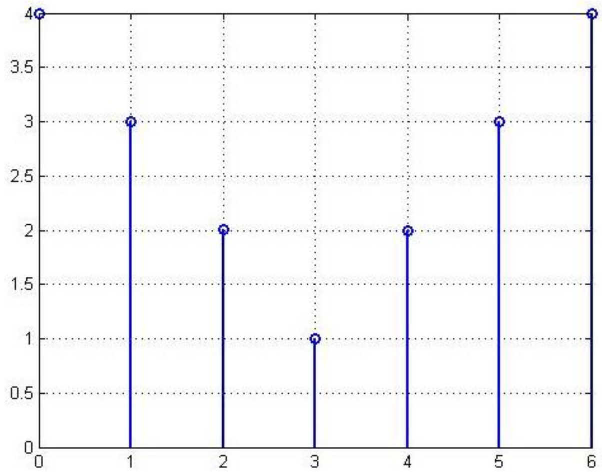
$$Y(j\omega)=U(j\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{10e^{-j2\omega}-2{,}5e^{-j8\omega}-7{,}5}{\omega^2}\cdot\frac{2{,}5\,(j\omega)^2+1{,}49j\omega+5{,}29}{(j\omega)^2+2{,}2j\omega+0{,}96}$$

Felhasználtuk a (b) feladatban kijött primitív függvényt. Ábrázolva a kért tartományon:



D.I.:

A jel ábrázolva a megadottak alapján:

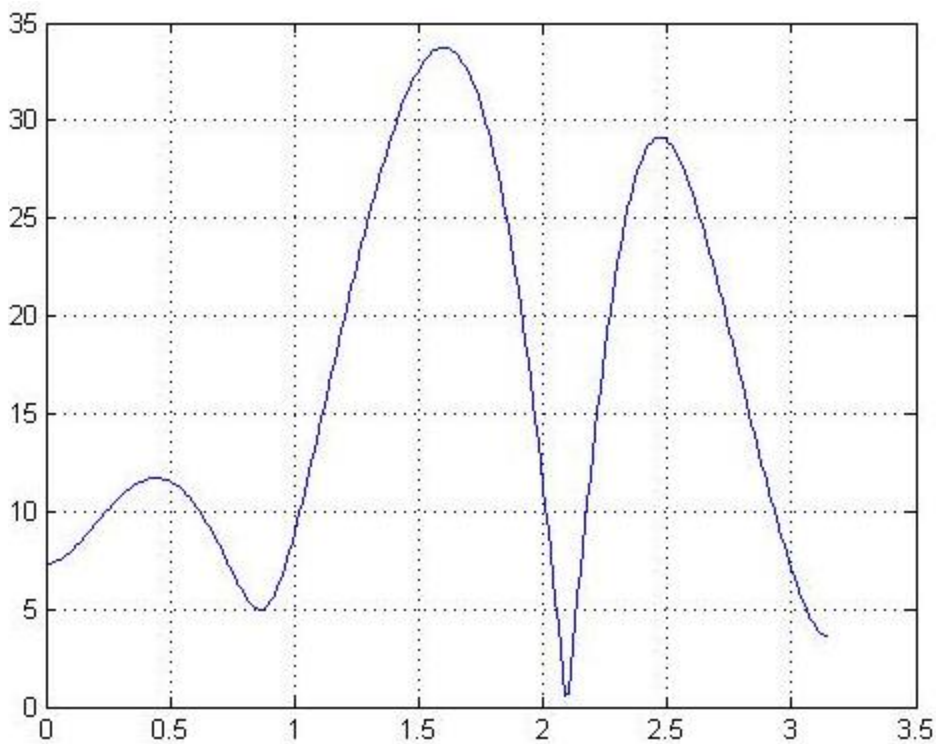


$$U\left(e^{j\vartheta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]e^{-j\vartheta k} = u[0] + u[1]e^{-j\vartheta} + u[2]e^{-j2\vartheta} + u[3]e^{-j3\vartheta} + u[4]e^{-j4\vartheta} + u[5]e^{-j5\vartheta} =$$

$$\mathbf{4 + 3e^{-j\vartheta} + 2e^{-j2\vartheta} + e^{-j3\vartheta} + 2e^{-j4\vartheta} + 3e^{-j5\vartheta}}$$

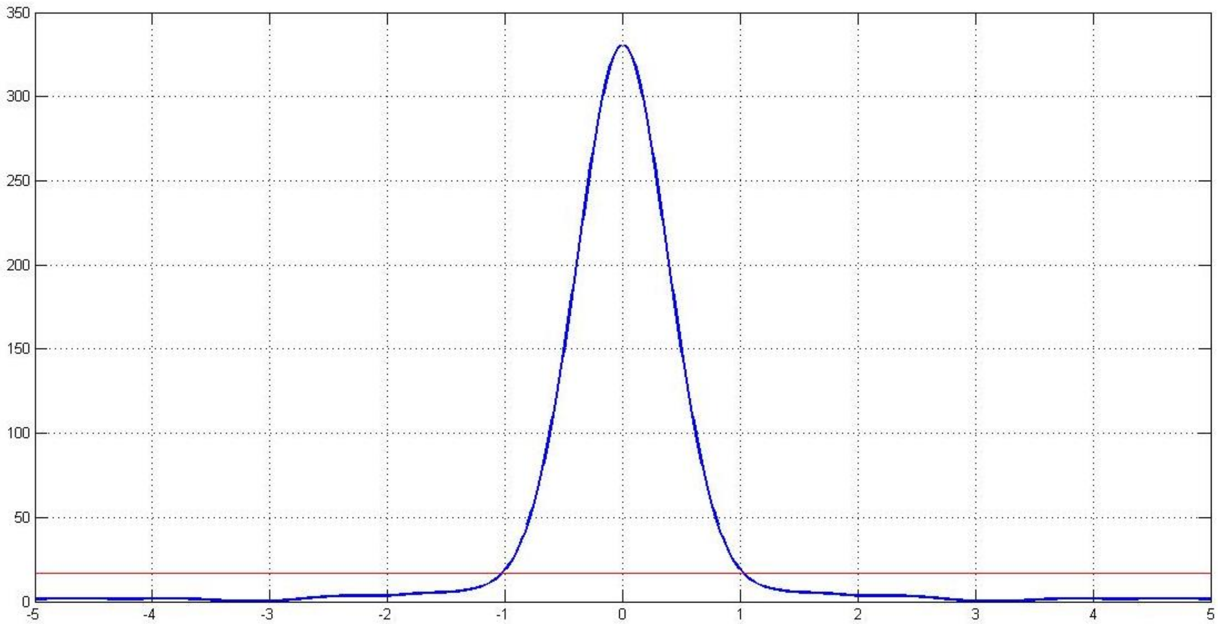
$$Y\left(e^{j\vartheta}\right) = (4 + 3e^{-j\vartheta} + 2e^{-j2\vartheta} + e^{-j3\vartheta} + 2e^{-j4\vartheta} + 3e^{-j5\vartheta}) \cdot \frac{-2{,}2\left(e^{j\vartheta}\right)^2 - 1{,}64e^{j\vartheta} + 2{,}761}{(e^{j\vartheta})^2 + 0{,}8e^{j\vartheta} + 0{,}41}$$

Ábrázolva a MatLabban a kért tartományon:

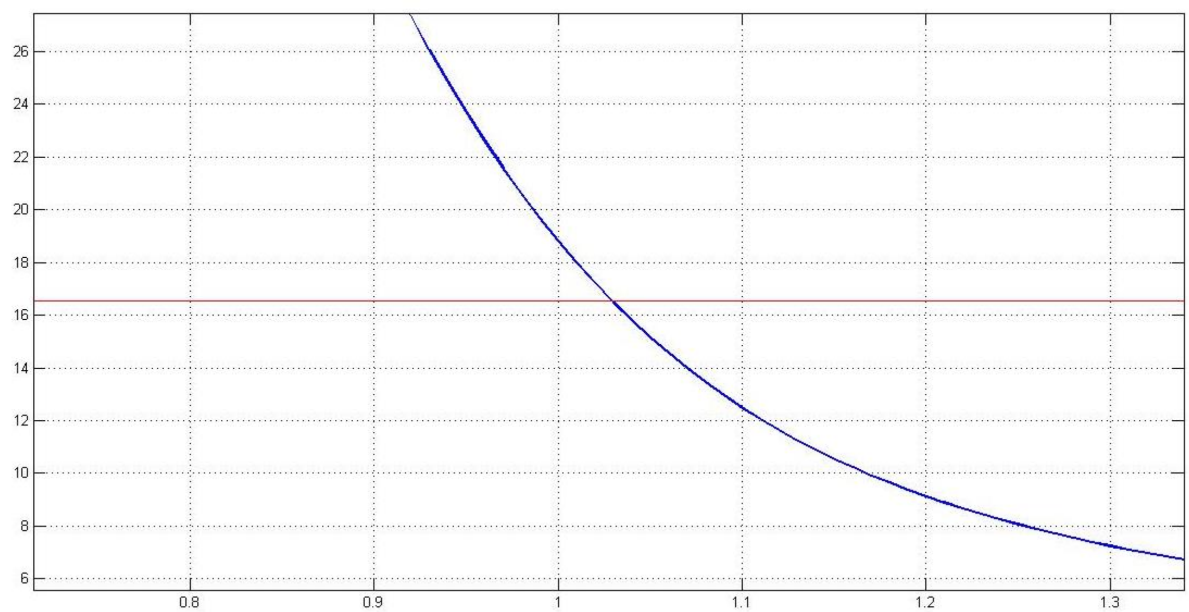


2.e Sávszélesség

A d feladatban megkapott amplitúdó-spektrum a [-5; 5] tartományon ábrázolva:



A maximum 330,5106, így ennek huszadrésze 16,52553. Ezt az értéket ábrázolja a piros egyenes. Az amplitúdó-spektrum páros, így elég az y tengely egyik felén leolvasni a megfelelő értéket. Ez 1 körül lesz. Felnagyítva az alábbi ábrát, leolvasható egy viszonylag pontos érték:



Tehát látható, hogy ez az érték ω=1,03 körül van. Így a sávszélesség ennek kétszerese, vagyis **2,06**.