BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR
VILLAMOSMÉRNÖKI SZAK

Sujbert László - Naszádos László - Péceli Gábor

MÉRÉSTECHNIKA PÉLDATÁR
VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK

Szerkesztette:
Sujbert László

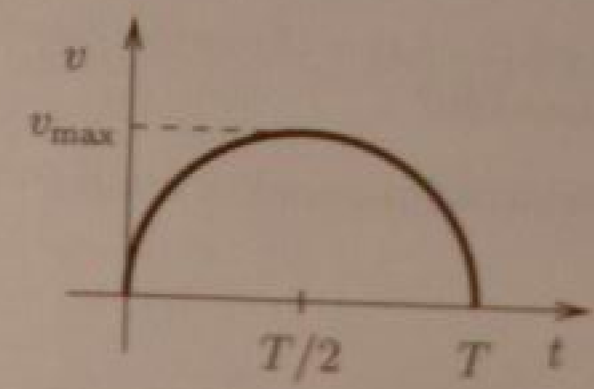
Műegyetemi Kiadó, 2006

Tartalomjegyzék

1. Alapismeretek

1.1. Bevezető feladatok

1.1.[1]



Egy modellautót egyenes pályán próbálnak ki. Álló helyzetből felgyorsítják $v_{\max}$ sebességre, majd álló helyzetbe fékezik. Mivel az autót méréstechnikusok tervezték, szimmetrikus a teljesítménye: ha a sebességet az idő függvényében ábrázoljuk, akkor egy félkör lesz a grafikon, ahogyan azt a fenti ábrán látjuk. Mekkora utat tett meg az autó, ha $v_{\max} = 40$ km/h, és a manőver $T = 30$ s ideig tartott?

1.2. Adjuk meg a felsorolt mennyiségek, függvények SI mértékegységeit, ha az eredeti jel mértékegysége volt (V) és az idő függvényében (mértékegysége: s) mértünk! (A felsorolt mennyiségek nem feltétlenül léteznek egyszerre egy konkrét jelre! SI: Système International; Nemzetközi Mértékegység-rendszer)

a) jelteljesítmény;

b) Fourier-transzformált;

c) korrelációfüggvény;

d) teljesítménysűrűség-spektrum;

e) energiasűrűség-spektrum;

f) effektív érték;

g) RMS-érték;

[1] A példát J. B. Csernyak, R. M. Rose, *„A minszki csirke és további 99 elgondolkodtató feladat az orosz matematikai és fizikai hagyományokból"* c. könyvből vettük.

h) variancia;

i) átlagos négyzetes érték;

j) várható érték;

k) szórás.

1.3. Egy rendszer bemenőjele feszültség, kimenőjele áram. Mi a rendszer súlyfüggvényének SI mértékegysége?

1.4. Megmérjük egy téglalap alakú asztallap érdességét az átlója mentén. Mi lesz az így nyert $y(x)$ függvény Fourier-transzformáltjának SI mértékegysége?

1.5. Írjuk fel az $x(t) = A\cos(2\pi ft + \varphi)$ jel komplex Fourier-sorát!

1.6. Írjuk fel az $x(t) = A_1\cos(2\pi f_0 t) + A_2\cos(5\pi f_0 t)$ jel komplex Fourier-sorát! Mekkora az $x(t)$ jel periódusideje?

1.7. Mi az átviteli karakterisztikája annak a hálózatnak, amelynek súlyfüggvénye:

a)

$$h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left\{\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right\};$$

b)

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}e^{-t/T}, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad ?$$

1.2. Gyakorló feladatok

1.8. $T(x)$ egy izzószál hőmérséklete a szál hossza mentén. Mi a $T(x)$ jel teljesítménysűrűség-spektrumának SI mértékegysége?

1.9. Mi az SI mértékegysége azon lineáris rendszer átviteli karakterisztikájának, amelynek bemenete áram–idő, kimenete pedig teljesítmény–idő?

1.10. Egyenfeszültségen mekkora az erősítése $(H(\omega = 0))$ annak a hálózatnak, amelynek súlyfüggvénye:

a)

$$h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left\{\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right\};$$

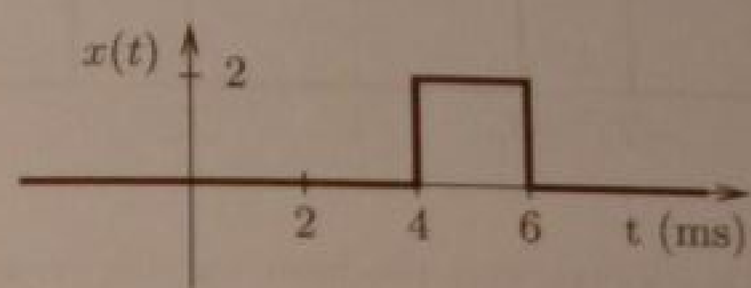
b)

$$h(t) = Ae^{-|t|/T}?$$

1.11. Egy jel spektrumából kivágjuk a $(-f_0, f_0)$ intervallumot (A $(-f_0, f_0)$ tartományra korlátozzuk). Milyen műveletnek felel ez meg az időtartományban?

1.12. Határozzuk meg az $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$ jel Fourier-transzformáltját!

1.13.



A fenti jelet Fourier-transzformáljuk, majd a transzformált jelet újra Fourier-transzformáljuk. Rajzoljuk fel az eredményként kapott jelet! Oldjuk meg tetszőleges $x(t)$ jelre is a feladatot!

1.14. Egy hálózat súlyfüggvénye $h(t) = \mathrm{sinc}(t/T)$. Adjuk meg a hálózat átvitelét az $f_1 = 1/T$ és az $f_2 = 1/4T$ frekvencián!

1.15. Adott az alábbi jel:

$$x(t) = \begin{cases} 2^{-t}, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Rajzoljuk fel az $y(t) = x(5-t)$ jelet!

1.16. Az $x(t)$ és $y(t)$ jelek periodikusak, periódusidejük rendre T_x, T_y. Minden esetben periodikus-e a $z(t) = x(t) + y(t)$ jel? Milyen komponenseket tartalmaz $z(t)$ spektruma?

1.17. Periodikus-e az alábbi jel?

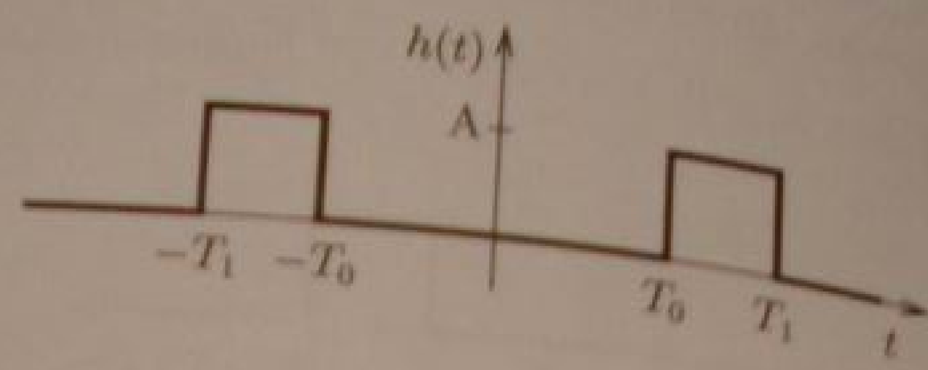
$$x(t) = A_1 A_2 \sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t), \quad f_2 = 1.6 f_1.$$

Ha igen, mekkora a periódusideje?

1.3. Összetett feladatok

1.18. Egy rendszer súlyfüggvénye $h(t) = \varepsilon(t)e^{-(t-T_0)/T}$, bemenőjele $x(t) = \sin(2\pi/T \cdot t)$. Adjuk meg a rendszer kimenőjelét!

1.19.



A fenti jel egy lineáris időinvariáns rendszer súlyfüggvénye. A rendszer bemenőjele $x(t) = \sin(2\pi/T \cdot t)$. Mekkora lesz a szinuszos kimeneti jel fáziskésése a bemeneti jelhez képest, ha $T_1 = 2T_0$ és $T = 3T_0$?

1.20. Egy rendszer súlyfüggvénye a következő:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le t < T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} .$$

Rajzoljuk fel a két ilyen rendszer sorbakapcsolásával nyert eredő rendszer súlyfüggvényét!

1.21. Mekkora annak a háromszögjelnek a teljesítménye, amelynek alapharmonikusa 1 V effektív értékű? Az eredményt 0.1% pontosan adjuk meg!

1.22. Egy diszkrét idejű rendszer bemenőjele $x(n)$, kimenőjele

$$y(n) = \max[x(n), x(n-1), x(n-2)].$$

Rajzoljuk fel a rendszer súlyfüggvényét! Lineáris-e a rendszer? Kauzális-e a rendszer?

1.23. Kauzálisak-e az alábbi átviteli karakterisztikával jellemezhető rendszerek?

a) $H(f) = e^{-|f|T}$;

b) $H(f) = \mathrm{sinc}(fT)$;

c) $H(f) = \mathrm{rect}(f/B)$.

1.24. Egy jelfeldolgozó rendszerben rekurzív digitális szűrőt alkalmaznak. A kimeneten megjelenő mintasorozat csak akkor alkalmas további feldolgozásra, ha a szűrő tranziense lezajlott. A szűrő pólus-zérus elrendezése az alábbi:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [0.95e^{\pm j0.3\pi}, 0.97e^{\pm j0.35\pi}, 0.99e^{\pm j0.3\pi}], \\ \mathbf{z} &= [0.98e^{\pm j0.33\pi}, 1.15e^{\pm j0.38\pi}, 0.98e^{\pm j0.33\pi}]. \end{aligned}$$

Adjunk becslést, hány mintát kell feldolgozni, hogy a tranziens 0.01% alá csökkenjen!

2. Hibaszámítás I.

2.1. Bevezető feladatok

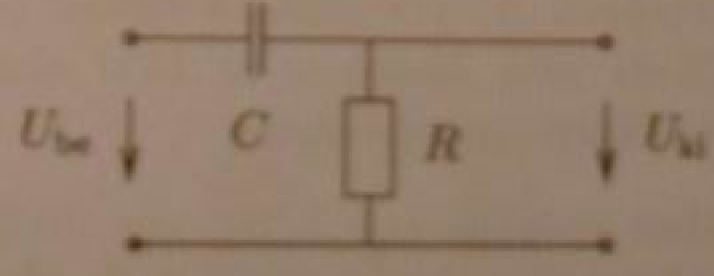
2.1. Hosszúságot mérünk két hosszúság különbségeként. Az egyik hosszúság $x_1 = 100\ \mathrm{cm} \pm 1\%$, másik pedig $x_2 = 80\ \mathrm{cm} \pm 1\%$. Legrosszabb esetben mekkora a hosszúságmérés hibája?

2.2. Sebességet mérünk út és idő mérésével. Az útra $x = 2000\ \mathrm{m} \pm 0.5\%$-ot, az időre $t = 2000\ \mathrm{s} \pm 0.1\%$-ot kaptunk. Legrosszabb esetben mekkora a sebességmérés hibája?

2.3. 100 db 1 kΩ névleges értékű és 1% tűrésű (relatív véletlen hibájú) ellenállást sorosan kapcsolunk. Mekkora az így nyert 100 kΩ névleges értékű ellenállás relatív hibája, a hibakomponensek **(a)** *worst case* és **(b)** valószínűségi alapon történő összegzésével?

2.4. Kétkarú mérleggel tömeget mérünk, a mérés pontosabbá tételére a Gauss-féle felcserélési módszert alkalmazzuk. Mekkora a mért tömeg, ha a két mérés eredménye 16.8 g, illetve 15.2 g ? Az eredményt 0.01 g pontosan adjuk meg! Mekkora a tömegmérés relatív hibája – a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével –, ha az egyes mérések abszolút hibája 0.01 g ?

2.5.



Egy RC-tagot a fenti ábrának megfelelően felüláteresztő szűrőnek használunk. A szűrő kimenetén megjelenő jel amplitúdója kisebb, mint a bemeneti jelé, és rendszeres hibát jelent. Mekkora a relatív rendszeres hiba, ha a mérendő szinuszos feszültség frekvenciája 500 Hz, az RC-tag töréspont frekvenciája pedig 20 Hz?

2.11. Adottak az alábbi mátrixok. Legrosszabb esetben mekkora az $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1}$ mátrix elemeinek relatív bizonytalansága, ha az $\mathbf{X}$ mátrix elemeinek relatív hibája 50 ppm, és a számítási eljárás numerikus hibája elhanyagolható? Adjuk meg az inverz mátrixot is!

a)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 50 & 51 \\ 52 & 53 \end{bmatrix};$$

b)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 44 & 45 \\ -67 & 68 \end{bmatrix}.$$

2.12. Egy fogyasztó által felvett energiát szeretnénk mérni. Három különböző műszerrel mérjük a feszültséget, az áramot és az időt. Legrosszabb esetben mekkora a mérés hibája, ha a mért értékek: $U = 230$ V $\pm\, 0.1\%$, $I = 10$ A $\pm\, 0.1\%$, $T = 10$ s $\pm\, 0.01\%$?

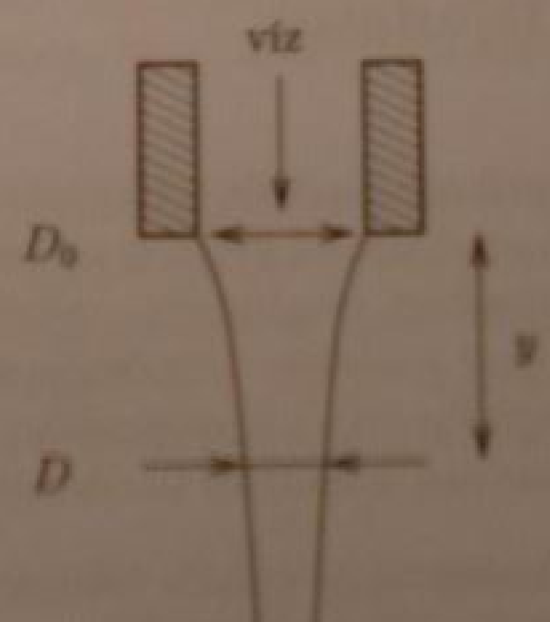
2.13. Egy ellenállás értékét akarjuk megmérni a rajta átfolyó áram és a rajta eső feszültség megmérésével. A mérés során két külön műszert használunk. Mekkora a mért ellenállás értéke és mérésének szórása, ha a feszültségmérés eredménye 1 V, szórása 0.01 V, az árammérés eredménye 1 mA, szórása 10 μA ?

2.14. Bukógátas áramlásmérésnél a folyadék egy „V" alakú nyíláson áramlik ki. A térfogatáram a következőképpen fejezhető ki:

$$Q = \frac{4}{15}\sqrt{2g}\,\frac{d}{l}\,h^{5/2},$$

ahol d a bukógát szélessége, l a teljes magassága, h pedig a folyadék magassága a gát aljától a felszínéig, g jelöli a nehézségi gyorsulást. Mekkora a mérés során elkövetett relatív hiba legvalószínűbb értéke, ha d és l mérésének relatív hibája 1%, h mérésének relatív hibája pedig 3%?

2.15.[1]



[1] A példát J. B. Csernyak, R. M. Rose, *„A minszki csirke és további 99 elgondolkodtató feladat az orosz matematikai és fizikai hagyományokból"* c. könyvének egy feladata alapján konstruáltuk.

Szeretnénk megmérni egy függőlegesen elhelyezett csapon lefelé kifolyó víz térfogatáramát, de nincs áramlásmérőnk. Megfigyeljük viszont, hogy a víz minden turbulencia nélkül áramlik ki a csapból, és a vízsugár a kifolyás helyétől lefelé egyre keskenyebb, ahogyan az az ábrán látható. Mivel tanultunk áramlástant, tudjuk, hogy a térfogatáram kiszámítható az alábbi képlettel:

$$Q = \frac{\pi}{4} D_0^2 D^2 \sqrt{\frac{2gy}{D_0^4 - D^4}},$$

ahol g jelöli a nehézségi gyorsulást. Mekkora a térfogatáram-mérés relatív hibájának legvalószínűbb értéke, ha $D_0 = 20$ mm, $y = 30$ mm, mindkettő mérésének hibája 1%, $D = 10$ mm, mérésének hibája pedig 5% ?

2.16. Folyadékok viszkozitását ipari körülmények között ún. rotációs viszkoziméterrel mérik. Az eszközben egy nagyobb és egy kisebb átmérőjű henger van, ezek palástjai között helyezkedik el a mérendő folyadék. Ha a külső hengert tengelye körül adott sebességgel forgatják, akkor a belső hengerre forgatónyomaték hat. Ezt a forgatónyomatékot mérve meghatározható a viszkozitás a következő összefüggéssel:

$$\eta = \frac{M}{4\pi L\omega}\left[\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_k^2}\right],$$

ahol η a viszkozitás, M a forgatónyomaték, L a hengerek magassága, ω a külső henger szögsebessége, r_b és r_k rendre a belső és a külső henger sugara.

a) Mekkora a viszkozitás, ha $L = r_b = 10$ cm, $\omega = 1.2$ 1/s és $r_k = 10.3$ cm mellett $M = 0.2$ Nm ?

b) Mekkora a viszkozitás mérésének relatív hibája, ha L, r_b és r_k értékét 0.5% hibával ismerjük, ω és M értékét pedig 1% hibával mérjük? A hibaösszegzéshez valószínűségi összegzést alkalmazzunk!

2.3. Összetett feladatok

2.17. Egy kerékpárra szerelhető digitális sebességmérőt tesztelünk. Egy jeladó kerékfordulatonként egy impulzust ad ki, és a műszer az impulzusok között eltelt időt méri. A fordulatonként megtett út, valamint a mért idő hányadosa adja a mért sebességet. Mivel a műszer tetszőleges kerékpárhoz felhasználható, használat előtt be kell programozni a fordulatonként megtett utat mm-ben. Feltételezhetjük, hogy a műszerben számlálós periódusidő-mérő van.

a) Becsüljük meg a sebességmérés relatív hibáját, ha a kerékátmérő 70 cm, és a „fedélzeti" óra csak napi 1 s-ot késik!

b) Hogyan változna a mérés hibájának becslője, ha nem a fordulatonként megtett utat, hanem a kerékátmérőt kellene beprogramozni?

2.18. Egy mechanikai rendszerben szeretnénk kis távolságokat mérni. Ehhez a mérendő alkatrészeken fémlemezeket helyezünk el. Az így nyert síkkondenzátort egy RC oszcillátor kondenzátoraként használjuk, és az oszcillátor jelének frekvenciájából számítható a kérdéses d távolság. Az összefüggések és az értékek: $C = \varepsilon A/d$, $f = 1/(2\pi RC)$; $\varepsilon = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $A = 50$ cm^2, $R = 10$ kΩ. Mérési hibát okoz a frekvenciamérés és az ellenállás értékének bizonytalansága (mindkettő relatív hibája 1%), a többi hibát elhanyagoljuk.

a) Adjuk meg a távolságmérés relatív hibáját, a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével!

b) A berendezés tesztelésekor kiderül, hogy nem hanyagolható el a kondenzátor hozzávezetéseinek kapacitása, amely a mérendő kondenzátorral párhuzamosan kapcsolódik. Mekkora a mérés hibája, ha a hozzávezetések kapacitása $C_p = 45$ pF, és a mérendő távolság névleges értéke $d = 1$ mm?

2.19. Egy vegyi üzemben különféle nem vezető folyadékokat készítenek, amelyeket kis tartályokban tárolnak. A tartályokban található folyadék h szintjét elektronikusan mérik. A tartályban két párhuzamos fémlemezt helyeznek el, az mint síkkondenzátor működik, amelynek kapacitása függ attól, hogy a levegőénél nagyobb permittivitású folyadék ($\varepsilon_r = 4.5$) szintje mekkora. A lemezek magassága $l = 1$ m, a közöttük lévő távolság $d = 2$ mm. Az így nyert síkkondenzátort egy RC oszcillátor kondenzátoraként használjuk, és az oszcillátor jelének frekvenciájából a műszer maga számítja ki a kérdéses h szintet. Az összefüggések és az értékek: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$, $f = 1/(2\pi RC)$; $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $A = 500$ cm^2, $R = 10$ kΩ. Mérési hibát okoz a frekvenciamérés és az ellenállás értékének bizonytalansága (mindkettő relatív hibája 0.5%), valamint ε_r hibája, amely 2%.

a) Adjuk meg a szintmérés relatív hibáját, a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével, ha a mérendő szint névleges értéke $h = l/2$!

b) A berendezés tesztelésekor kiderül, hogy nem hanyagolható el a kondenzátor hozzávezetéseinek kapacitása, amely a mérendő kondenzátorral párhuzamosan kapcsolódik. Mekkora a mérés relatív rendszeres hibája, ha a hozzávezetések kapacitása $C_p = 50$ pF, és a mérendő szint névleges értéke itt is $h = l/2$?

2.20. Sebességet mérünk ultrahanggal, levegőben. A kibocsátott ultrahang a mozgó tárgyról visszaverődik, és a visszavert hangot érzékeli a műszer. A visszavert hang frekvenciája a Doppler-effektus miatt módosul, és ebből lehet kiszámítani a mozgó tárgy sebességét. Ha a mozgás iránya megegyezik a kibocsátott hang terjedési irányával, az érzékelt frekvencia a következő:

$$f = f_0 \frac{c - v}{c + v},$$

ahol f_0 a kibocsátott hang frekvenciája, $c = 340$ m/s a hang terjedési sebessége a levegőben, v pedig a mérendő sebesség. Milyen pontosan (mekkora relatív hibával) kell megmérni a visszavert hang frekvenciáját, ha a hangsebességet 1%

pontossággal ismerjük, és 1 m/s körüli sebességet 2% pontossággal szeretnénk megmérni?

2.21. Egy csőben áramló folyadék sebességét mérjük, ultrahanggal. A cső két oldalán, az áramlásra merőleges keresztmetszettel α szöget bezárva két adó-vevő pár helyezkedik el. A két irányban nem azonos sebességgel terjed a hang, és a terjedési idők különbségéből kiszámítható a folyadék sebessége a következőképpen:

$$v = \frac{l}{2\sin\alpha}\left[\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right],$$

ahol l az adó-vevő párok távolsága, t_1 és t_2 a két terjedési idő. Esetünkben $l = 0.5$ m, a mérni kívánt sebesség névleges értéke $v = 5$ m/s, a hang terjedési sebessége a folyadékban $c = 1500$ m/s, $\alpha = 30°$.

a) Mekkora relatív hibájú időmérésre van szükség, hogy a sebességet 5% pontosan tudjuk megmérni?

b) A két időt számlálós (digitális) időmérővel mérjük, amelynek órajele $f_0 =$ 10 MHz, az órajel hibája zérus. A fenti pontosságot egyszeri méréssel nem lehet megoldani, több mérési eredményt kell átlagolni. Hány mérésre van szükség, hogy az 5% pontosságú sebességméréshez szükséges időmérési pontosságot teljesítsük?

2.22. Szeretnénk megállapítani, hogy egy adott hangforrás a síkban milyen irányban helyezkedik el. Ebből a célból a síkban két mikrofont helyezünk el, és mérjük a mikrofonokba érkező hanghullámok időkülönbségét. A két mikrofon egymástól d távolságban van, a kérdéses irány a mikrofonokat összekötő szakaszt felező egyenes és a szakasz felezőpontját a hangforrással összekötő egyenes által bezárt szög.

a) Fejezzük ki ezt a szöget úgy, hogy a kifejezésben csak az időkülönbség, a két mikrofon távolsága, illetve a hang terjedési sebessége szerepeljen! Szükség esetén alkalmazzunk ésszerű elhanyagolásokat!

b) Mekkora a szögmérés abszolút hibája, ha a két mikrofon távolsága $d = 2$ m, a mért időkülönbség zérus, és az időkülönbség mérésének abszolút hibája $\Delta t = 10\ \mu s$, hangsebesség 340 m/s ? A hangsebesség hibáját elhanyagoljuk.

2.23. Egy épület magasságát szeretnénk megmérni azon az alapon, hogy az épület tetején és a földszinten mért légnyomás különbségéből az ún. barometrikus magasságformula segítségével kiszámítható a kérdéses magasság. Az összefüggés a következő:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}},$$

ahol p a légnyomás, $p_0 = 10^5$ Pa a tengerszinten érvényes légnyomás, $\rho_0 =$ 1.29 kg/m^3 a tengerszinten érvényes légsűrűség, $g = 9.81$ m/s^2 a nehézségi gyorsulás, h pedig a tengerszint feletti magasság.

a) Milyen magas az épület, ha a földszinten mért légnyomás $p_1 = 99$ kPa, az épület tetején pedig $p_2 = 98$ kPa ?

b) A mérést kétféleképpen is elvégezzük. Az első módszer szerint ugyanazt a nyomásmérőt használjuk mindkét mérésre, a másik módszer szerint azonos típusú, de két műszert használunk, és egyidejűleg mérünk. Mekkora a magasságmérés relatív hibája, ha a nyomásmérők ofszethibája $h_{off} = 200$ Pa, a mért értékre vonatkozó véletlen hibája pedig $h_v = 0.1\%$?

3. Hibaszámítás II.

3.1. Bevezető feladatok

3.1. ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1, 1]$ intervallumban. Rajzoljuk fel sűrűségfüggvényét, számítsuk ki várható értékét és szórását!

3.2. Egy mérendő mennyiségről azt tudjuk, hogy olyan valószínűségi változóval modellezhető, amelynek valószínűség-sűrűségfüggvénye az $[1, 2]$ és a $[3, 4]$ intervallumban konstans értékű, másutt zérus. Határozzuk meg a mérendő mennyiség várható értékét és szórását! Adjuk meg annak az intervallumnak a szélességét, amelybe a mérési eredmények 90%-os valószínűséggel beleesnek! Hol helyezkedik el ez az intervallum?

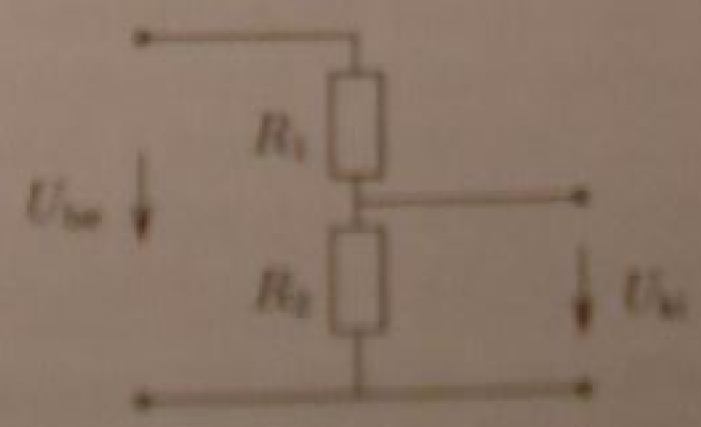
3.3. Egy normális eloszlású x mennyiségről azt tudjuk, hogy 1 és 2 közötti értéket vesz fel 99.7%-os konfidenciaszint mellett. Becsüljük meg x szórását!

3.4. Valamely konstans értékre vonatkozó, egymástól független mérési eredmények eloszlása egyenletes a $[0.7, 1.3]$ intervallumon. Adjuk meg a mérési eredmények várható értékét, szórásnégyzetét és négyzetes várható értékét!

3.5. Hosszúságot mérünk két hosszúság különbségeként. Az egyik hosszúság $x_1 = 100$ cm $\pm$ 1%, másik pedig $x_2 = 80$ cm $\pm$ 1%, a mérendő mennyiségek a megadott intervallumokon belül egyenletes eloszlással helyezkedhetnek el. Adjuk meg a hosszúság értékét és standard bizonytalanságát!

3.6. 100 db 1 kΩ névleges értékű és 1% tűrésű ellenállást sorosan kapcsolunk. A gyártó a tűrést $k = 2$ kiterjesztési tényezővel specifikálta. Adjuk meg az eredő ellenállás értékét a bizonytalanság szabványos kiértékelésével, szintén $k = 2$ kiterjesztési tényezővel!

3.7.



Két ellenállásból álló feszültségosztót tervezünk az ábrának megfelelően. Az ellenállásokat $R_1 = 49$ kΩ, illetve $R_2 = 1$ kΩ értékűre választjuk. Az ellenállások standard bizonytalansága 100 ppm. Adjuk meg az osztásarány értékét a bizonytalanság szabványos kiértékelésével, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel!

3.8. 900 ohmos ellenállást építünk egy 1 kΩ, egy 10 kΩ, egy 100 kΩ és egy 1 MΩ értékű ellenállás párhuzamos kapcsolásával. Az ellenállások tűrése rendre 0.01%, 0.1%, 1% és 10%. Az ellenállások eloszlása normális, a gyártó a tűrést $k_1 = 3$ kiterjesztési tényezővel specifikálta. Adjuk meg az eredő ellenállás értékét a bizonytalanság szabványos kiértékelésével, $k_2 = 2$ kiterjesztési tényezővel!

3.9. Aprajafalva be akar lépni a Bergengóc Unióba. Ehhez szabványosítani kell fő exportcikküket, az áfonyakonzervet. Ügyi szerkesztett egy áfonyaszámláló berendezést, így a konzervbe mindig pontosan 120 darab áfonya kerül. Egy áfonya tömege 4.5 g és 5.5 g között lehet, egyenletes eloszlással. Adjuk meg az Aprajafalván gyártott áfonyakonzerv nettó tömegére vonatkozó 98%-os konfidenciaintervallumot!

3.10. Standard normális eloszlású mintákat szeretnénk generálni. Rendelkezésünkre áll egy program, amely a $[0, 5]$ intervallumban egyenletes eloszlású mintákat generál. Normális eloszláshoz úgy jutunk, hogy ezzel a programmal 48 mintát generálunk, és ezeket összeadjuk. Milyen transzformációt kell végezni az összegzés eredményeként kapott mintákon, hogy eloszlásuk standard normális legyen?

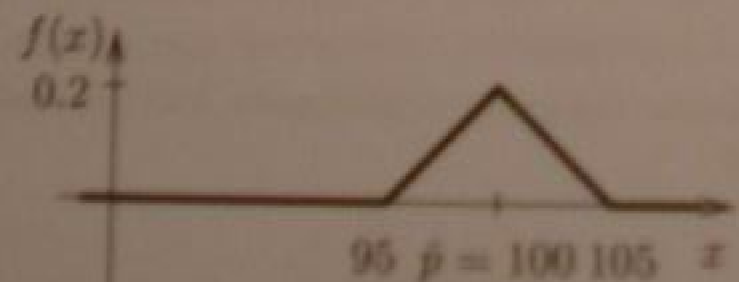
3.11. Egy adott állandóra vonatkozó normális eloszlású zajjal torzított független mérések eredményeként az alábbi mintákat kaptuk:

$$13.6720 \quad 9.4190 \quad 21.3489 \quad 9.7298 \quad 14.6773 \quad 18.5959.$$

Adjuk meg a várható értékre vonatkozó 90%-os konfidenciaintervallumot!

3.2. Gyakorló feladatok

3.12.



Egy p paraméter torzítatlan becslője $\hat{p}$. A becslő sűrűségfüggvénye a fenti ábrán látható. Adjuk meg a 99%-os konfidenciaintervallumot!

3.13. Megmérjük 3 asztal hosszát. Az eredmények rendre 100 ± 1 cm, 135 ± 1 cm és 65 ± 0.5 cm. A méréseink torzítatlanok, a Gauss-eloszlású mérési eredmények konfidenciaszintje 95.5%. Mekkora helyre fér be a 3 asztal 99.7%-os valószínűséggel?

3.14. Egy mérendő mennyiségről azt tudjuk, hogy olyan valószínűségi változóval modellezhető, amelynek valószínűség-sűrűségfüggvénye az $[1, 2]$ intervallumban 0.25, a $(2, 3)$ intervallumban 0.5, a $[3, 4]$ intervallumban pedig 0.25 értékű. Adjuk meg annak az intervallumnak a szélességét, amelybe a mérési eredmények 90%-os valószínűséggel beleesnek! Hol helyezkedik el ez az intervallum?

3.15. Egy mérendő mennyiségről azt tudjuk, hogy $\mu = 5$ várható értékű, $\sigma = 2$ szórású egyenletes eloszlású valószínűségi változóként modellezhető. Adjuk meg annak az intervallumnak a szélességét, amelybe a mérési eredmények 98%-os valószínűséggel beleesnek! Hol helyezkedik el ez az intervallum?

3.16. Sebességet mérünk út és idő mérésével. Az útra $x = 2000$ m $\pm$ 0.5%-ot, az időre $t = 2000$ s $\pm$ 0.1%-ot kaptunk. A mérési hibák eloszlása normális, konfidenciaszintje 90%. Adjuk meg a sebesség értékét a bizonytalanság szabványos kiértékelésével, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel!

3.17. 1111 ohmos ellenállást építünk egy 1000, egy 100, egy 10 és egy 1 ohmos ellenállás sorba kapcsolásával. Az ellenállások tűrése (relatív véletlen hibája) rendre 0.01%, 0.1%, 1% és 10%. A gyártó szerint a tűrésen belül az ellenállások eloszlása egyenletes. Adjuk meg az eredő ellenállás értékét a bizonytalanság szabványos kiértékelésével, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel!

3.18. Mekkora szórással tudunk meghatározni egy ellenálláson disszipálódott teljesítményt, ha az ellenállás értékét 1 kΩ-nak mértük, a mérés szórása 10 Ω; az ellenálláson eső feszültséget pedig 12 V-nak mértük, és itt a mérés szórása 12 mV volt?

3.19. Egy ellenállás értékét akarjuk megmérni a rajta átfolyó áram és a rajta eső feszültség megmérésével. A mérés során két külön műszert használunk. Mekkora a mért ellenállás értéke és standard bizonytalansága, ha a feszültségmérés eredménye 1 V, szórása 0.01 V, az árammérés eredménye 1 mA, szórása 10 μA?

3.20. 100 db 1 kΩ névleges értékű és 1% tűrésű (relatív véletlen hibájú) ellenállást sorosan kapcsolunk. Az ellenállások nagysága normális eloszlást követ, az 1% tűrés 99%-os konfidenciaszinttel teljesül. Mekkora az így nyert 100 kΩ névleges értékű ellenállás relatív hibája, 99%-os konfidenciaszinten?

3.21. Sorosan kapcsoljuk az $R_1 = 2.2$ kΩ, az $R_2 = 10$ kΩ és az $R_3 = 22$ kΩ értékű ellenállásokat. Az ellenállásokról tudjuk, hogy tűrésük (relatív véletlen hibájuk) 1%, 95% konfidenciaszinttel. A hibák eloszlása normális. Adjuk meg az eredő ellenállás tűrését, 90% konfidenciaszinttel!

3.22. Ma éjfélkor elindítunk egy órát, amelynek napi rendszeres hibája +0.5 s, véletlen hibája nulla várható értékű, 0.5 s szórású valószínűségi változó. Mi a valószínűsége, hogy 100 nap múlva az éjfelet (0 óra 00 perc) 1 percnél kisebb hibával jelezzük?

3.23. Az Eu-Mikulás zsákjának tömegét szabványosították. A zsák átlagos tömege 20 kg lehet, ettől legfeljebb 1%-kal szabad eltérni. A Mikulás-csomagokat a krampuszok állítják össze 10 dkg tömegűre, de figyelmetlenek a méréssel, ezért a csomagok valódi tömege 9 és 11 dkg között van, egyenletes eloszlással. A Mikulás puttonyába mindig 200 csomagot raknak. Mennyi a valószínűsége, hogy Mikulás zsákja túlsúlyos?

3.24. Standard normális eloszlású mintákat szeretnénk generálni. Rendelkezésünkre áll egy program, amely 50–50% valószínűséggel ad vissza a vagy $-a$ értéket, $a = 2$. Normális eloszláshoz úgy jutunk, hogy ezzel a programmal $N = 256$ mintát generálunk, és ezeket összeadjuk. Milyen transzformációt kell végezni az összegzés eredményeként kapott mintákon, hogy eloszlásuk standard normális legyen?

3.25. Szeretnénk bebizonyítani, hogy a csukamájolaj segíti a Frobenius-baktériumok szaporodását. Ebből a célból Petri-csészékben baktériumokat helyezünk el, és figyeljük szaporodásukat. 4 kontroll-tenyészetet nem kezelünk csukamájolajjal, egyet viszont igen. Mivel a baktériumok szaporodása sok környezeti feltételtől függő véletlen folyamat, a 4 kontroll-tenyészetben sem lesz azonos a szaporodás mértéke. Az 5. tenyészetet akkor fogadjuk el szaporábbnak, ha 5%-nál kisebb a valószínűsége, hogy statisztikailag a kontroll-csoporttal egyező mértékű a szaporodás. Segíti-e a csukamájolaj a Frobenius-baktériumok szaporodását, ha az 5. petricsészében a szaporodás 1803, a 4 kontroll-tenyészetben pedig:

$$1056 \quad 1257 \quad 1160 \quad 1269\ ?$$

3.26. Egy hallgatói mérés során ellenállást is kell mérni. A hallgatók egyszerre mérnek az előre odakészített ellenállásokon. A mérési eredményekből statisztikát készítünk, és megállapítjuk, hogy az átlag $R = 342\ \Omega$, a szórás pedig $\sigma_R = 3\ \Omega$. Adjuk meg a hallgatóknak adott ellenállások értékére vonatkozó 90% szintű konfidenciaintervallumot, ha

a) az ellenállások értékeinek eloszlása nem ismert,

b) az ellenállások értékei normális eloszlást követnek!

3.27. Egy kétforintos tömegét szeretnénk minél pontosabban megmérni. Feltételezzük, hogy az érmék annyira egyformák, hogy tömegük szórása elhanyagolható a mi mérési eljárásunk szórásához képest. Azt is feltételezzük, hogy mérési eredményeink rendszeres hibája zérus, véletlen hibája pedig normális eloszlást követ. A mérést úgy végezzük, hogy megkérünk $N = 20$ vegyész laboránst, hogy saját mérlegén végezzen méréseket. A laboránsok eredményeit átlagolva kapjuk meg a kétforintos tömegének becslőjét. Adjuk meg az alábbi két esetben a kétforintos tömegére vonatkozó 99% szintű konfidenciaintervallumot, ha

a) minden laboráns egyetlen kétforintost mér le, a mérési eredmények átlaga $m_1 = 3$ g, szórása $\sigma_m = 0.02$ g,

b) minden laboráns egyszerre $K = 40$ db kétforintost mér le, a mérési eredmények átlaga $m_2 = 120$ g, szórása ismét $\sigma_m = 0.02$ g!

3.3. Összetett feladatok

3.28. 10 m magas tornyot szeretnénk rakni 10 cm vastag téglákból. Milyen nagy lesz a torony magasságának bizonytalansága, ha a téglák vastagságának hibája 1%, és a hibák függetlennek tekinthetők? (A kötőanyag vastagságát elhanyagoljuk.) Adjuk meg az abszolút és a relatív hiba becslőjét is!

3.29. Hány mérés átlagából állapítható meg 1% hibával, 95%-os konfidenciaszint mellett annak az U egyenfeszültségnek az értéke, amelyet Gauss-eloszlású additív, sávkorlátozott fehér zaj terhel, ha a jel-zaj viszony 30 dB? A zajból vett minták függetlennek tekinthetők.

3.30. Egy svájci óragyárban mechanikus zsebórák pontosságát ellenőrzik. Egy óráról azt feltételezik, hogy állandó környezeti feltételek mellett a járása (napi rendszeres abszolút hibája) állandó, egyik napról a másikra azonban sok kis véletlen effektus eredményeként a hibájának van véletlen, normális eloszlású összetevője is. Az órát egy napon déli 12 órakor másodpercre pontosan beállítják, majd ezt követően naponta feljegyzik, hogy pontosan délben mit mutat az óra:

12.00.09 12.00.18 12.00.32 12.00.41 12.00.51 12.01.03 [h,min,sec].

Adjuk meg a napi járásra (abszolút rendszeres hibára) vonatkozó, 95% szintű konfidenciaintervallumot!

3.31. A méréstechnika tárgyra járó hallgatók testmagasságát megmértük, és a mérési eredményekből éppen statisztikát készítünk. Az első mérési eredmények a következők:

$$N_1 = 10;\ \bar{x} = 178 \text{ cm};\ s = 5.2 \text{ cm},$$

ahol N_1 a mérési eredmények száma, $\bar{x}$ a mérési eredmények átlaga, s pedig a korrigált tapasztalati szórás.

a) Adjuk meg a hallgatók testmagasságára vonatkozó 90% szintű konfidenciaintervallumot!

b) Adjuk meg a konfidenciaintervallumot, ha a fenti átlagot és szórást $N_2 =$ 326 hallgató mérési adatai alapján számítottuk ki!

3.32. Statisztikát készítünk a hallgatók testmagasságáról. A kijelölt felelősök hitelesített magasságmérővel megmérik a testmagasságokat, és kiszámítják a felelősségi körükbe tartozó mérési eredmények átlagát (m_i), valamint a korrigált tapasztalati szórást (s_i). Ismerjük még a csoportok létszámát (N_i). A mi feladatunk ezeket összegezni, és megadni az összes hallgatóra a testmagasság várható értékét és a korrigált tapasztalati szórást. Ha az első két csoportra meg tudjuk oldani a feladatot, akkor a többire is. Mekkora tehát a várható érték és a szórás új becslője, ha az alábbi eredmények érkeztek az első két csoporttól:

$$N_1 = 19 \quad m_1 = 177\ \text{cm} \quad s_1 = 3.8\ \text{cm},$$
$$N_2 = 15 \quad m_2 = 179\ \text{cm} \quad s_2 = 5.9\ \text{cm}.$$

3.33. Egy egyenáramú generátor kimenő ellenállását mérjük. A terheletlen generátor kapocsfeszültsége $U_1 = 10.726$ V, 20 V-os méréshatárban mérve. Ha a generátort $R_t = 170\ \Omega$ ellenállással terheljük, a kapocsfeszültség kismértékben lecsökken. A terhelt generátor kapocsfeszültségét ugyanazzal a műszerrel ugyanabban a méréshatárban többször is megmérjük, és a számításokhoz a mért feszültségek átlagát használjuk fel. Az U_2 kapocsfeszültségre az alábbi eredményeket kapjuk:

$$10.413\ \text{V} \quad 10.411\ \text{V} \quad 10.425\ \text{V} \quad 10.418\ \text{V}.$$

a) Adjuk meg a mérési eredmények A típusú standard bizonytalanságát!

b) Adjuk meg a mérési eredmények B típusú standard bizonytalanságát! A műszer specifikációjában az szerepel, hogy relatív hibája $h = \pm(0.01\%$ o.v. $+0.002\%$ o.r.) „o.v." és „o.r." rendre a mért értékre (of value) és a végértékre (of range) vonatkozó hibát jelentik.

c) Adjuk meg a kimenő ellenállás értékét, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel számított eredő bizonytalanságával együtt! Ügyeljünk arra, hogy a leírt számjegyek száma megfeleljen a megadott pontosságnak!

3.34. Áramot mérünk digitális voltmérő és normálellenállás segítségével. Az áramerősséget a mért feszültség és a normálellenállás hányadosa adja. A normálellenállás értéke a kalibrációs adatlap szerint $R = 100.123 \pm 0.046\ \Omega$, $T_0 = 20$ °C hőmérsékleten. A megadottnál nagyobb hiba az adatlap szerint nem léphet fel. A mérést $T_0 = 26$ °C-on végeztük, a manganinból készült ellenálláshuzal hőmérsékleti együtthatója $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ 1/°C. A feszültséget többször is megmértük, és az alábbi eredményeket kaptuk:

$$138.75\ \text{mV} \quad 138.78\ \text{mV} \quad 138.72\ \text{mV} \quad 138.69\ \text{mV} \quad 138.74\ \text{mV}.$$

a) Adjuk meg a feszültség becslőjét és A típusú standard bizonytalanságát!

b) Adjuk meg a feszültség B típusú standard bizonytalanságát, ha a méréshatár 200 mV volt, a voltmérő specifikációjában pedig az szerepel, hogy a feszültségmérés hibája $h = 0.02\%$ o.v. $+0.005\%$ o.r. „o.v." és „o.r." rendre a mért értékre (of value) és a végértékre (of range) vonatkozó hibát jelentik. A hibakomponenesek a kvantálási hibát is tartalmazzák.

c) Adjuk meg a feszültségmérés és a normálellenállás értékeinek legjobb becslőjét és mindkettő standard bizonytalanságát!

d) Adjuk meg a mért áram értékét, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel számított eredő bizonytalanságával együtt! Ügyeljünk arra, hogy a leírt számjegyek száma megfeleljen a megadott pontosságnak!

e) Körülbelül hány százalékos konfidenciaintervallumnak felel meg a megadott bizonytalansági sáv?

f) A műszer h hibája (a B típusú bizonytalanság forrása) is véletlen hiba. Miért véletlen ez a hiba, és milyen megfigyelésekkel lehetne ezt megmutatni?

3.35. Szeretnénk egy számlálós időmérőt kalibrálni. A kalibráláshoz az etalon egy másik számlálós időmérő lesz, és mindkét műszerrel megmérjük egy nagyon stabil frekvenciájú, nagyon pontosan hangolható és elhanyagolható zajú szinuszgenerátor frekvenciáját. A kalibrálás célja a tesztelendő műszer órajele pontos frekvenciájának meghatározása. Ehhez feltételezzük, hogy az etalon műszer órajelének rendszeres hibája zérus. A generátor frekvenciáját addig hangoljuk, amíg az etalon műszeren egy kerek értéket nem látunk, ekkor leolvassuk a tesztelendő műszer által mutatott értéket, és ebből következtetünk a tesztelendő műszer órajelére. A tesztelendő műszer órajelének frekvenciáját standard bizonytalanságával együtt kell megadnunk. A mérési összeállítás adatai a következők: a két időmérő névleges frekvenciája megegyezik, $f_0 = 10$ MHz. Az etalon órajelének maximális hibája $h_1 = \pm 0.001$ ppm, a tesztelendő műszeré $h_2 = \pm 0.1$ ppm. Ezeken a határokon belül a hiba egyenlő valószínűséggel tetszőleges lehet. A mérési idő mindkét műszer esetében $t_m = 1$ s. A generátort úgy állítottuk be, hogy az etalon $f_1 = 20.000000$ kHz frekvenciát jelez, ekkor a tesztelendő műszerről $f_2 = 20.000023$ kHz olvasható le. Milyen szabványos specifikáció adható a tesztelendő műszer órajelének frekvenciájára?

4. Feszültség és áram mérése

4.1. Bevezető feladatok

4.1. Mennyi az effektív értéke egy 1 V csúcsértékű szimmetrikus négyszögjelnek?

4.2. Egy Deprez-műszer végkitérése $I = 50\ \mu\text{A}$, ekkor a kapcsain $U = 100$ mV feszültség van. Mekkora előtét-ellenállást alkalmazzunk, hogy a méréshatárt $U_m = 10$ V-ra terjeszthessük ki?

4.3. 1 V csúcsértékű négyszögjelet csúcsértékmérő AC voltmérővel mérünk. Mit mutat a műszer?

4.4. Egy digitális feszültségmérő 2 V-os méréshatárban 0.050 V-ot mutat. Mekkora a kvantálásból származó relatív mérési hiba?

4.5. Egy szinuszgenerátor kimenő jelének torzítási tényezője 1%. Mekkora a felharmonikusok és a teljes jel teljesítményének aránya?

4.6. Egy Deprez-műszer osztálypontossága 0.5, méréshatára 3 V. Mekkora relatív hibával mér meg ez a műszer 1 V feszültséget?

4.7. Zajos szinuszos jelet mérünk. Mekkora a szinuszjel effektív értéke, ha a mért effektív érték $U_m = 6.1$ V, a jel-zaj viszony pedig SNR = 14.7 dB?

4.8. Egy 2 V amplitúdójú háromszögjelet mérünk. Mekkora értéket fog mutatni a műszer, ha

a) abszolút középértéket mérő AC voltmérővel,

b) csúcsértéket mérő AC voltmérővel

mérjük?

4.9. Mekkora egy 1 V amplitúdójú 3 kHz frekvenciájú háromszögjel csúcsértéke, abszolút középértéke, illetve effektív értéke?

4.10. Mekkora a várható értéke, effektív értéke és frekvenciája az alábbi jeleknek:

a) $x(t) = A^2 \sin^2(2\pi f_0 t)$;

b) $x(t) = \sin^2(3\pi f_0 t)$;

c) $x(t) = 12\sin(2\pi f_0 t) + 12\sin(6\pi f_0 t)$;

d) $x(t) = 12|\cos(2\pi f_0 t)|$;

e) $z(t) = \sqrt{2}e^{j2\pi f_0 t}$?

4.2. Gyakorló feladatok

4.11. Egy Deprez-műszer végkitérése $I = 50\ \mu\text{A}$, ekkor a kapcsain $U = 100$ mV feszültség van. Mekkora söntellenállást alkalmazzunk, hogy a méréshatárt $I_m =$ 5 mA-re terjeszthessük ki?

4.12. $U = 160$ V névleges értékű feszültséget szeretnénk megmérni, de csak maximum 100 V-os méréshatárú műszerünk van. A feladatot két egyforma Deprez-műszer sorba kapcsolásával oldhatjuk meg. Mekkora lesz a mérés hibája a legkedvezőtlenebb esetben, ha a műszerek osztálypontossága 1?

4.13. $I = 16$ A névleges értékű áramot szeretnénk megmérni, de csak maximum 10 A-es méréshatárú műszerünk van. A feladatot két egyforma Deprez-műszer párhuzamos kapcsolásával oldhatjuk meg. Mekkora lesz a mérés hibája a hibakomponensek szabványos összegzésével, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel, ha a műszerek osztálypontossága 1, és az egyes műszerek hibájának eloszlása egyenletesnek tekinthető?

4.14. Egy termoelemes voltmérő bemenetére 1 V csúcsértékű négyszögjelet kapcsolunk. Mekkora értéket fog mutatni a műszer?

4.15. Egy digitális feszültségmérő 2 V-os méréshatárban 0.0245 V-ot mutat. Mekkorának feltételezhetjük a mérés hibáját, ha nem áll rendelkezésünkre a műszer gépkönyve?

4.16. 2 V effektív értékű négyszögjelet csúcsértékmérő AC voltmérővel mérünk. Mit mutat a műszer?

4.17. Egy periodikus jel spektrumában az első és a harmadik harmonikus amplitúdója mérhető. A spektrumanalizátor képernyőjén ezek rendre +13 dB és -17 dB amplitúdójúak. Hány százalék a jel torzítási tényezője?

4.18. 1 V effektív értékű szinuszjelhez 1 V egyenfeszültséget adunk. Mekkora az így nyert jel effektív értéke?

4.19. Digitális multiméterrel mérjük egy ohmos ellenállás áramát és feszültségét. A mért értékek a következők: $U = 0.202$ V, $I = 0.167$ mA. A műszer specifikációját nem ismerjük, de tudjuk, hogy a műszer kijelzőjén pontosan a megadott számjegyek jelentek meg. Az ellenállást az $R = U/I$ képlettel számítjuk. A megadott adatok alapján mekkora az ellenállásmérés relatív hibája?

4.20. Egy periodikus feszültségjel spektrumának első 5 harmonikusát megmértük. Az egyes harmonikusokhoz tartozó effektív értékek az alábbiak, a 0 dB 1 V-ot jelent.

$$0 \quad -12 \quad -24 \quad -36 \quad -48 \quad [\mathrm{dB}].$$

a) Adjuk meg az egyes harmonikusok effektív értékét voltban!

b) Mekkora a periodikus jel effektív értéke?

c) Mekkora a periodikus jel torzítási tényezője?

4.21. Nem szimmetrikus négyszögjelet generálunk. A jel egy periódusa $T = 10$ ms időtartamú, ezen belül $T_1 = 4$ ms ideig 5 V, $T_2 = 6$ ms ideig 0 V értéket vesz fel.

a) Mekkora a jel egyszerű középértéke, effektív értéke, csúcstényezője, formatényezője?

b) A jelet mint feszültséget AC-csatolású csúcsértékmérő műszerrel mérjük. Mit mutat a műszer?

4.22. Zajos szinuszos jelet mérünk. Mekkora a szinuszjel amplitúdója, ha a mért jel effektív értéke $U = 6.7$ V, a jel-zaj viszony pedig SNR = 11 dB ?

4.23. Áramot mérünk differenciamódszerrel. A segéd-áramgenerátoron beállított érték $I_s = 234$ mA, a mért áramdifferencia pedig $dI = 158$ μA.

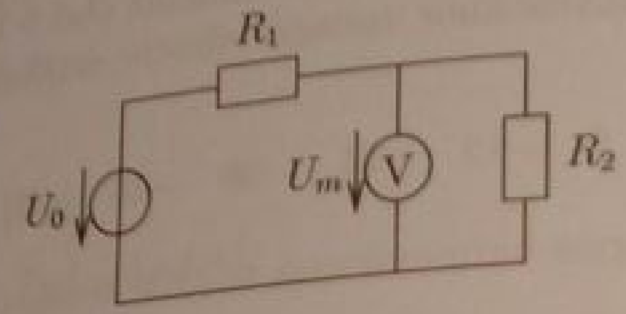
a) Rajzoljuk le a mérési elrendezést!

b) Mekkora lehet a mérendő áram értéke? Mekkora lehet a segédforrással kiegészített mérőeszköz bemenő ellenállása, ha az árammérő belső ellenállása $R_b = 0.2\,\Omega$?

4.24. Egy digitális voltmérő bemenetén az elektronikus alkatrészek miatt zaj is jelen van. Ez egy, a jeltől függetlennek tekinthető zajkomponens, amely az AC feszültségmérésben véletlen hibát okoz. Mekkora a műszer végértékre vonatkoztatott relatív hibája 2 V-os állásban, ha a fenti zaj effektív értéke $U_n = -65$ dB? (A dB-skála relatív, de megegyezés alapján 0 dB-nek tekintjük az $U_0 = 0.775$ V effektív értékű feszültséget. Ez a feszültség egy 600 Ω értékű ellenálláson 1 mW teljesítményt disszipál.)

4.25. Mekkora értéket fog mutatni az a három voltmérő, amelyre 1 V amplitúdójú négyszögjelet kapcsolunk, és rendre abszolútérték-, csúcsérték-, illetve effektívérték-egyenirányítót használnak?

4.26.



Határozzuk meg U_0 értékét a fenti kapcsolásban a legkedvezőtlenebb esetben előforduló hibájával együtt! A kapcsolásban $R_1 = R_2 = 1\ \mathrm{k\Omega} \pm 1\%$. U_m-et digitális voltmérővel mérjük, amelynek a mért értékre vonatkoztatott hibája 0.02%, a végkitérésre vonatkoztatott hibája 0.01%, a mért érték 1 V, a méréshatár 20 V.

4.3. Összetett feladatok

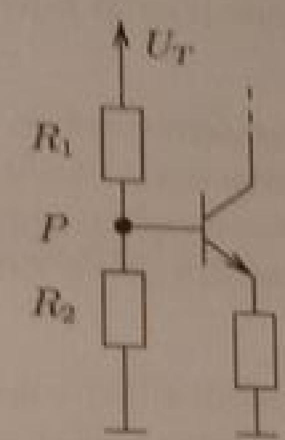
4.27. Egy ellenállás értékét akarjuk megmérni a rajta átfolyó áram és a rajta eső feszültség megmérésével. A mérés során két különböző, de azonos típusú műszert használunk. A mért feszültség 4 mV, az alkalmazott méréshatár 20 mV; a mért áram 200 μA, a méréshatár 1 mA. Mekkora az ellenállás értéke és a mérés bizonytalansága, ha a műszer gépkönyve a következő specifikációt tartalmazza mindkét méréshatárra: $\pm$(0.1% of rd + 0.05% of rn), ahol az első érték a leolvasott értékre, a második pedig a mérési tartományra vonatkozó hiba. Adjuk meg az abszolút és a relatív hibát is!

4.28. Egy forrás Thevenin-helyettesítőképét (U_g, R_g) szeretnénk megmérni. Ehhez megmérjük a forrás kimenő feszültségét (U_1) terheletlenül, illetve (U_2) $R_t = 100\ \Omega$ terheléssel. A mérési hiba csökkentésére kompenzációs mérést is végzünk, azaz egy segédforrást alkalmazunk, amely pontosan U_1 feszültséget generál. Ezek után a mérendő forrásra kapcsoljuk az R_t ellenállást, és feszültségmérőnkkel a segédforrás és a mérendő forrás kimenő feszültségének különbségét (dU) mérjük.

a) Mekkora U_g és R_g értéke, valamint mérésük relatív véletlen hibája a két mérési elrendezésben, ha $U_1 = 10.00$ V, $U_2 = 9.99$ V, $dU = 10.30$ mV és a műszer belső ellenállása végtelen? A feszültségmérés relatív véletlen hibája minden esetben 0.01%.

b) Hány tizedesjegyre kell pontos legyen U_1 és U_2, ha azt akarjuk, hogy az első módszerrel a belső ellenállást 1% hibával mérjük?

4.29.



A fenti ábrán egy tranzisztoros kapcsolás részletét láthatjuk. Szeretnénk megmérni, mekkora a P ponton a feszültség. A méréshez egy Deprez-műszerrel felépített voltmérő áll rendelkezésre, amelynek osztálypontossága 0.5, a kiválasztható méréshatárok: 0.1 V, 1 V, 10 V, 100 V. Az alapműszer végkitérése éppen 0.1 V, ellenállása 1 kΩ. A tranzisztor bázisáramát elhanyagolhatjuk. A mérendő feszültségről tudjuk, hogy 0.6 . . . 0.7 V, továbbá a kapcsolásról ismert, hogy $R_1 = 56$ kΩ, $R_2 = 3.2$ kΩ és $U_T = 12$ V. Melyik méréshatárban használjuk a műszert, hogy a legkisebb hibát kövessük el?

4.30. Egy elektronikus áramkör egyenáramú bemeneti ellenállását kell megmérnünk. Sajnos 100 mV-nál nagyobb feszültséget nem alkalmazhatunk, mert az áramkör tönkremegy. A mérést először egyszerűen úgy hajtjuk végre, hogy feszültséggenerátort kapcsolunk a bemenetre, és mérjük a feszültséget és az áramot. A feszültség és az áram méréséhez ugyanolyan típusú multimétert használunk.

a) Adjuk meg a bemeneti ellenállás értékét és mérésének relatív hibáját, ha a mért feszültség $U_1 = 87.65$ mV 200 mV méréshatár mellett és a mért áram $I_1 = 01.72$ μA 200 μA méréshatár mellett. A műszer adatlapja szerint a mérés hibája mindkét üzemmódban 0.05% a mért értékre és 0.002% a végértékre vonatkoztatva.

Ez a mérés túl pontatlan, ezért a mérést úgy ismételjük meg, hogy a generátor és a bemenet közé beiktatunk egy változtatható értékű soros ellenállást, amelynek értékét addig változtatjuk, amíg a bemeneten mért feszültség $U_2 = U_1/2$ lesz. Ekkor a bemeneti ellenállás megegyezik a soros ellenállással.

b) Adjuk meg ismét a bemeneti ellenállás mérésének relatív hibáját, ha a feszültségmérésre az előbbi multimétert használjuk, a soros ellenállás tűrése pedig 0.1% !

4.31. Egy nem szimmetrikus négyszögjelet mérünk, amelynek periódusideje $T = 500$ μs. A jel egy periódusa két konstans feszültségű szakaszból áll: $\tau = 100$ μs ideig 3 V értékű, a periódus többi részében 0 V.

a) Adjuk meg a jel Fourier-sorának első 10 tagját!

b) Mekkora értéket mér és mit jelez ki a jel valódi effektív értékét mérő műszer?

c) Mit mutat az a valódi effektív értékét mérő szelektív voltmérő, amely $f_c = 5$ kHz vágási frekvenciájú, ideális aluláteresztő szűrőt tartalmaz? (Azt mondhatjuk, hogy az ezen frekvencia alatti jeleket hiba nélkül méri, az ennél nagyobb frekvenciájú jelek viszont nem befolyásolják az eredményt.)

4.32. Háromszögjelet mérünk valódi effektív értéket mérő voltmérővel. A műszer sávszélessége 10 kHz. Mekkora értéket mutat a voltmérő, ha a rákapcsolt 3 kHz frekvenciájú háromszögjel alapharmonikusa 1 V amplitúdójú?

5. Mérőkapcsolások

5.1. Bevezető feladatok

5.1. Két egyforma ellenállásból és egy differenciálkialakítású síkkondenzátor-párból mechanikai elmozdulás mérésére alkalmas hídkapcsolást építünk, amelyet 10 V effektív értékű szinuszjellel gerjesztünk. A differenciálkondenzátor lemezeinek távolsága $d = 5$ mm, közös lemezének elmozdulása $\Delta x = 2.5$ μm. Mekkora a híd kimenőfeszültsége?

5.2. Két, 20 °C-on 100 ohmos ellenállás-hőmérő jelét 100 ohmos ellenállásokból álló, 5 V egyenfeszültséggel gerjesztett mérőhíd segítségével dolgozzuk fel. Rajzoljuk fel a mérőhíd kapcsolási rajzát! Mekkora a híd kimenőfeszültsége, ha hőmérsékletváltozás hatására mindkét hőmérő ellenállása $\Delta R = 1$ Ω-mal megnő? Hogyan változik a feszültség, ha mindkét hőmérő a hídhoz 2×1 Ω ellenállású vezetékkel csatlakozik? Mekkora ilyenkor a mérés rendszeres hibája?

5.3. Egy 1:10 arányban osztó kompenzált feszültségosztó alsó tagjának ellenállása 100 kΩ, a vele párhuzamos kapacitás értéke 100 pF. Mekkora az osztó felső tagjainak értéke és mekkora az osztó bemeneti impedanciája?

5.4. Egy oszcilloszkóp bemeneti fokozata maximum 100 V csúcsértékű jellel terhelhető. Bemeneti impedanciáját párhuzamos RC-taggal (1 MΩ, 40 pF) modellezzük. Az oszcilloszkóp mérőerősítője frekvenciafüggetlennek tekinthető. Tervezzünk olyan kiegészítő áramkört, amely lehetővé teszi 1000 V csúcsértékű háromszögjel torzításmentes megjelenítését!

5.5. Egy, az egyik végén földelt jelforrás kimeneti impedanciája $R_s = 1 + j0$ MΩ. A jelforrás kimenetére 3 pF értékű szórt kapacitáson keresztül hat az 50 Hz-es, 230 V-os hálózat is. Mekkora additív zajfeszültség jelenik meg a jelforrás kimenetén, ha az azt terhelő mérőműszer bemeneti impedanciája ugyancsak $R_{be} = 1 + j0$ MΩ?

5.6. Egy kiegyenlített analóg szorzó mindkét bemenetére ugyanazt a 10 V csúcsértékű szinuszos jelet vezetjük. A szorzó átviteli tényezője $k = 0.1$ 1/V ($u_{ki}(t) = k\, u_{be,1}(t)\, u_{be,2}(t)$). Mekkora a szorzó kimenetén megjelenő jel egyszerű középértéke, abszolút középértéke és effektív értéke?

5.7. Egy feszültségváltónak egy primer és két független szekunder tekercse van. A primer kapcsok között a 110-es szám olvasható. A szekunder tekercseknek több kivezetésük is van: az egybefüggő tekercselés bizonyos pontjai ki vannak vezetve csatlakozókra. A tekercsek kapcsai között az alábbi számokat olvashatjuk:

0	63.5	100	110	120	127	150	190	200	210	220	230	260	300
300	330	355	380	400	460	500	550						

A jelölés azt jelenti, hogy ha a primer tekercsre 110 V feszültséget kapcsolunk, az első szekunder tekercs '0' és '63.5' kapcsai között a feszültség 63.5 V és így tovább. Ugyanilyen primer feszültség mellett a második szekunder tekercs '300' és '330' kapcsai között a feszültség 30 V stb. Ha a két '300' jelzésű kapcsot összekötjük, 110 V primer feszültség mellett a '0' és '330' kapcsok között a feszültség 330 V stb. Hogyan kössük össze a kapcsokat, hogy 110 V primer feszültség mellett a szekunder feszültség

a) 3 V;

b) 5 V;

c) 15 V

legyen?

5.2. Gyakorló feladatok

5.8. Egy ellenállás-hőmérő jelét mérjük hídkapcsolásban.

a) Hogyan építsük fel a hidat, ha a mérendő tartomány 0 . . . 40 °C, és a lineáris karakterisztikájú ellenállás-hőmérő ellenállása 20 °C-on 100 Ω?

b) Milyen feszültségű forrás táplálja a hidat, ha a hőmérőn 20 °C-on 5 mA áram folyik keresztül?

c) Mekkora a híd kimenőfeszültsége 40 °C-on, ha az ellenállás-hőmérő hőfoktényezője $\alpha = 200$ ppm/°C?

d) Mekkora a híd kimenőfeszültségét erősítő áramkör feszültségerősítése, ha a mérendő hőmérséklet-tartományt ±10 V-nak akarjuk megfeleltetni?

5.9. Egy nagyon jó hővezetőképességű test hőmérsékletének mérésére két azonos felépítésű ellenállás-hőmérőt használunk, amelyeket egymáshoz közel helyezünk el. Az ellenállás-változást hídkapcsolás segítségével feszültséggé alakítjuk át.

a) Hogyan építsük fel a hidat, ha a mérendő tartomány 0 . . . 50 °C, és a lineáris karakterisztikájú ellenállás-hőmérők ellenállása 25 °C-on 100 Ω?

b) Milyen áramú forrás táplálja a hidat, ha a hőmérőkön 25 °C-on külön-külön 1 V feszültség esik?

c) Mekkora a híd kimenőfeszültsége 40 °C-on, ha az ellenállás-hőmérő hőfok-tényezője 200 ppm/°C?

d) Mekkora a híd kimenőfeszültségét erősítő áramkör feszültségerősítése, ha a mérendő hőmérséklet-tartományt ±10 V-nak akarjuk megfeleltetni?

5.10. Egy nyúlásmérő bélyeg jelét mérjük hídkapcsolásban, a tápfeszültség $U_T =$ 10 V. A bélyeg ellenállása ±0.1%-os relatív geometriai méretváltozásra ±0.2%-os relatív megváltozást mutat.

a) Hogyan építsük fel a hidat, ha a mérendő legnagyobb relatív geometriai méretváltozás ±2%, és a lineáris karakterisztikájú bélyeg ellenállása terheletlenül 200 Ω ?

b) Rajzoljuk fel a híd kimenőfeszültségét a relatív geometriai méretváltozás függvényében! Ehhez a függvényt legalább 5 pontban értékeljük ki!

c) Mekkora a hídkapcsolás linearitási hibája (a karakterisztika legnagyobb eltérése a lineáristól)?

5.11. Egy tartószerkezetre ható erőt nyúlásmérő ellenállásokkal mérnek, de takarékossági okokból csak két, azonos típusú és névleges értékű ellenállást szerelnek fel. Az ellenállásokat úgy helyezik el, hogy az egyik megnyúlik (ellenállása nő), a másik összenyomódik (ellenállása csökken). Az ellenállásokat hídkapcsolásban működtetik, úgy, hogy a hídkapcsolás másik két eleme közönséges ellenállás. A hidat feszültséggenerátorral gerjesztik.

a) Rajzoljuk le, hogyan kell elhelyezni a kapcsolásban a nyúlásmérő ellenállásokat, hogy a híd kimenő feszültsége az ellenállásváltozás lineáris függvénye legyen!

b) Terheletlen rendszer esetén a híd kimenőfeszültsége zérus. Mekkora a híd kimenőfeszültsége, ha a gerjesztő feszültség U_T = 10 V, az ellenállások névleges értéke R = 400 Ω, a nyúlásmérő ellenállások relatív megváltozása pedig 0.2%?

c) Mekkora a mérés relatív hibája, a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével, ha a nyúlásmérő ellenállások tűrése 0.2%, a közönséges ellenállásoké pedig 0.5%?

5.12. Hőmérsékletet hőellenállásokkal mérünk. A hőellenállások értéke hőmérséklet-növekedés hatására megnő, ellenkező esetben lecsökken. Az ellenállásokat hídkapcsolásban működtetik, úgy, hogy a hídkapcsolás másik két eleme közönséges ellenállás. A hidat áramgenerátorral gerjesztik.

a) Rajzoljuk le, hogyan kell elhelyezni a kapcsolásban a hőellenállásokat, hogy maximális érzékenységet érjünk el!

b) Referencia-hőmérsékleten a híd kimenőfeszültsége zérus. Mekkora a híd kimenőfeszültsége, ha a gerjesztő áram $I_T = 20$ mA, az ellenállások névleges értéke $R = 400\ \Omega$, a hőellenállások relatív megváltozása pedig 0.2%?

c) Mekkora a mérés relatív hibája, a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével, ha a hőellenállások tűrése 0.1%, a közönséges ellenállásoké pedig 0.5%?

5.13. $U_T = 5$ V feszültségű ideális feszültséggenerátorral táplált rezisztív mérőhídban $k = 5.3$ átviteli tényezőjű ($\Delta R/R = k\Delta l/l$), terhelés nélkül $R = 400\ \Omega$ ellenállásnak tekinthető nyúlásmérő bélyeg ellenállás-változását mérjük. A híd többi ellenállása egyforma és ugyanilyen értékű. Mechanikai terhelés hatására a híd kimenetén mért feszültség abszolút értéke $U_{ki} = 8$ mV.

a) Rajzoljuk le a hídkapcsolást!

b) Mekkora lehet a méretváltozás relatív értéke (két érték)?

5.14. Egy kiegyenlített analóg szorzó bemeneteire egy-egy azonos frekvenciájú, 10 V csúcsértékű, de fázisában 90°-kal eltérő szinuszos jelet vezetünk. A szorzó átviteli tényezője $k = 0.1$ 1/V ($u_{ki}(t) = k\,u_{be,1}(t)\,u_{be,2}(t)$). Mekkora a szorzó kimenetén megjelenő jel egyszerű középértéke, abszolút középértéke és effektív értéke?

5.15. Egy kiegyenlített analóg szorzó egyik bemenetére 10 V csúcsértékű, 50 Hz frekvenciájú, a másik bemenetére pedig 1 V csúcsértékű, 100 Hz frekvenciájú szinuszos jelet vezetünk. A szorzó átviteli tényezője $k = 0.1$ 1/V ($u_{ki}(t) = k\,u_{be,1}(t)\,u_{be,2}(t)$). Mekkora a szorzó kimenetén megjelenő jel egyszerű középértéke és effektív értéke?

5.16. $A = -5$ erősítésű invertáló erősítőt építünk. Ehhez a szabványos értéksorból $R_1 = 1$ kΩ és $R_2 = 5.1$ kΩ értékű ellenállásokat választunk.

a) Adjuk meg a kapcsolási rajzot, és az erősítés relatív rendszeres hibáját!

A rendszeres hiba csökkentésére R_2-vel párhuzamosan kapcsoljuk az $R_3 = 270$ kΩ értékű ellenállást.

b) Adjuk meg ismét az erősítés relatív rendszeres hibáját!

R_1 és R_2 helyébe 0.1% tűrésű (relatív véletlen hibájú) elemeket alkalmazunk, de R_3 helyébe csak 5%-os tűrésű ellenállást találunk.

c) Adjuk meg az erősítés relatív hibáját, az összes hibakomponens *worst case* alapú összegzésével!

5.17. $A = 10$ erősítésű neminvertáló erősítőt tervezünk. Ehhez a szabványos értéksorból $R_1 = 1$ kΩ és $R_2 = 9.1$ kΩ értékű ellenállásokat választunk.

a) Adjuk meg a kapcsolási rajzot, és az erősítés relatív rendszeres hibáját!

A rendszeres hiba csökkentésére R_2 helyett az $R_3 = 6.8$ kΩ és az $R_4 = 2.2$ kΩ értékű ellenállások soros kapcsolását alkalmazzuk.

b) Adjuk meg ismét az erősítés relatív rendszeres hibáját!

Mindhárom ellenállás helyébe 0.1% tűrésű (relatív véletlen hibájú) elemeket alkalmazunk.

c) Adjuk meg az erősítés relatív hibáját, az összes hibakomponens *worst case* alapú összegzésével!

5.18. Integrátort tervezünk, amelynek erősítése $f_1 = 10$ kHz frekvencián egységnyi kell legyen. Ehhez a szabványos értéksorból $R_1 = 1.5$ kΩ értékű ellenállást, valamint $C = 10$ nF értékű kondenzátort választunk.

a) Adjuk meg a kapcsolási rajzot, az átviteli függvényt és az időállandó relatív rendszeres hibáját!

A rendszeres hiba csökkentésére R_1-gyel sorba kapcsoljuk az $R_2 = 91\ \Omega$ értékű ellenállást.

b) Adjuk meg ismét az időállandó relatív rendszeres hibáját!

Az ellenállások és a kondenzátor helyébe 1% tűrésű (relatív véletlen hibájú) elemeket alkalmazunk.

c) Adjuk meg az időállandó relatív hibáját, az összes hibakomponens *worst case* alapú összegzésével!

5.19. Egyenfeszültség mérésére alkalmas kompenzátort építünk. Ez úgy működik, hogy a bemenetére kapcsolt feszültségből levon egy általa előállított kompenzáló feszültséget, és figyeli a két feszültség különbségét egy komparátorral. A komparátor kimenete alapján a műszer addig módosítja a kompenzáló feszültséget, amíg a különbség nem lesz minimális. Létezik olyan stratégia, amellyel ez a folyamat konvergens. Specifikálni kell a műszer belső ellenállását. Milyen specifikáció adható a bemenő ellenállásra, ha tudjuk, hogy a műszer a mérendő feszültséget 2.5 digit felbontással jelzi ki (és ilyen pontossággal is állítja elő), valamint a komparátor bemenő ellenállása 10 MΩ, a méréshatár pedig $U_{max} = 20$ V?

5.20. Differenciaerősítőt tervezünk, amelynek erősítése $A_a = 100$ kell legyen. Ehhez rendelkezésünkre áll egy műveleti erősítő, valamint a szabványos értéksorból választott ellenállások $R_1 = 1.5$ kΩ, $R_2 = 2.8$ kΩ, $R_3 = 150$ kΩ, $R_4 = 280$ kΩ értékkel.

a) Adjuk meg a kapcsolási rajzot, az ellenállások egyértelmű jelölésével együtt!

b) Adjuk meg a kapcsolás közösjelelnyomását dB-ben, a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével, ha az ellenállások tűrése 0.2%!

5.21. Építsünk 3 ellenállásból álló kompenzált osztót, amelynek osztásarányai rendre 0.2 és 0.04! A legalsó tag ellenállása $R_3 = 1$ kΩ, és vele párhuzamosan 30 pF kapacitás kapcsolódik.

5.22. Ideálisnak tekinthető műveleti erősítővel integrátort építünk. Az alkalmazott ellenállás értéke $R = 18$ kΩ, a kondenzátor értéke $C = 10$ nF, veszteségi tényezője 50 Hz-en mérve $D = 0.02$.

a) Adjuk meg a megvalósított integrátor átviteli függvényét! Mekkora a törésponti frekvencia? Mekkora az integrátor DC erősítése?

b) Az integrátor időállandóját úgy ellenőrizzük, hogy az integrátor bemenetére szinuszjelet adunk, és annak frekvenciáját addig állítjuk, amíg a bemenet és a kimenet amplitúdója meg nem egyezik. Adjuk meg az időállandó mérésének relatív hibáját, ha tudjuk, hogy a két szint egyenlőségét 0.1 dB relatív bizonytalansággal tudjuk megállapítani!

5.3. Összetett feladatok

5.23. Egy analóg szorzóáramkör egyik bemenetére az $u_{be,1}(t) = 10\sin(200\pi t + \pi/3)$ V, a másik bemenetére az $u_{be,2}(t) = 20\sin(600\pi t - \pi/3)$ V időfüggvényű jelet vezetjük. Az időt másodpercben mérjük. A szorzó nem kiegyenlített, átviteli tényezője $k = 0.1$ 1/V ($u_{ki}(t) = k\,u_{be,1}(t)\,u_{be,2}(t)$).

a) Milyen frekvenciájú komponensek jelennek meg a szorzó kimenetén?

b) Specifikáljuk azokat a szűrőket, amelyekkel az egyes komponenseket el tudjuk választani egymástól!

c) A különbségi frekvenciával jellemezhető jelet oszcilloszkópra vezetjük. Milyen vízszintes eltérítési sebességet kell beállítanunk ahhoz, hogy a jelből a 10 cm széles képernyőn 2 teljes periódus jelenjen meg?

d) A függőleges eltérítés érzékenysége 5 V/cm. Csúcstól csúcsig hány cm „magas" a megjelenő hullámforma?

e) Utóbb az összegfrekvenciával jellemezhető jelet is az oszcilloszkópra vezetjük. Hány periódust látunk a jelből a 10 cm széles ernyőn, ha a vízszintes eltérítési sebesség 1.25 ms/cm?

f) A megjelenő hullámforma csúcsértéke 4 cm. Mekkora a függőleges eltérítés érzékenysége?

5.24. Egy 1 V csúcsértékű 50 Hz frekvenciájú szimmetrikus háromszögjelet mérünk Deprez-műszerrel. A méréshez aktív egyutas egyenirányítót használunk, ennek kimenetét közvetlenül kötjük a Deprez-műszerre. A kapcsolásban használt ellenállások mindegyike $R = 1$ kΩ, tűrésük (relatív véletlen hibájuk) 1%, a diódafeszültség $U_d = 0.6$ V, a műszer végkitérése 1 V és osztálypontossága 0.5, a műveleti erősítő ideálisnak tekinthető.

a) Adjuk meg a kapcsolási rajzot, és rajzoljuk fel a Deprez-műszer által mért jelalakot!

b) Milyen értéket mutat a műszer?

c) Adjuk meg a mérés relatív hibáját, a hibakomponensek valószínű összegzésével, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel! Feltételezhetjük az ellenállások és a Deprez-műszer hibájának egyenletes eloszlását.

5.25. Egy vasúti sín deformációját mérjük ún. nyúlásmérő ellenállásokkal, hídkapcsolásban. A nyúlásmérő ellenállások értéke nyúlás hatására megnő, ellenkező esetben lecsökken. Az ellenállásokat úgy helyezzük el, hogy R_1, R_2 összenyomódik, R_3, R_4 viszont megnyúlik. A hidat feszültséggenerátorral tápláljuk, amelynek feszültsége $U_T = 10$ V. A generátor negatív kimenetét földeljük.

a) Rajzoljuk le, hogyan kell elhelyezni a hídkapcsolásban a nyúlásmérő ellenállásokat, hogy maximális érzékenységet érjünk el!

b) Mekkora a híd kimenőfeszültsége, ha az ellenállások névleges értéke 670 Ω, a nyúlás vagy összenyomás hatására történő relatív megváltozásuk pedig ±0.1%?

c) A híd kimenőfeszültségét műszererősítővel erősítjük, a differenciális erősítés $A_s = 100$, a közösjelelnyomás $E_c = 70$ dB. Mekkora relatív hibát okoz a közösjel a műszererősítő kimeneti feszültségében?

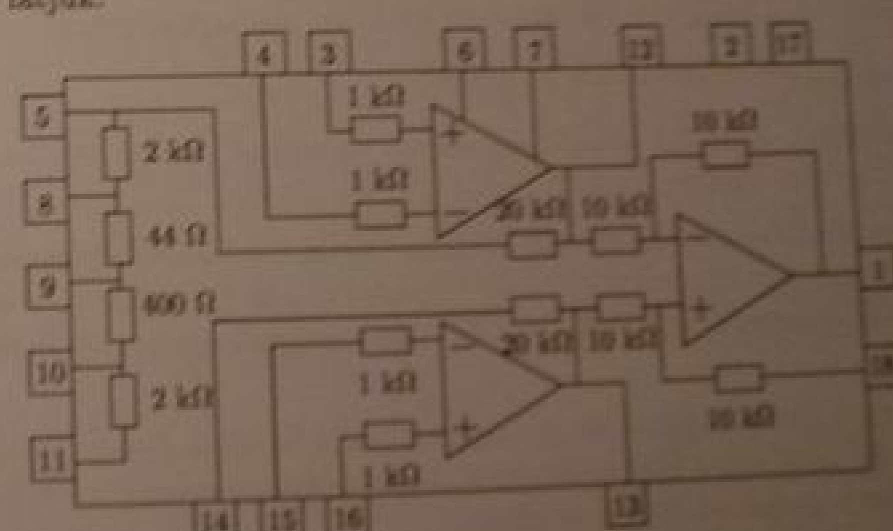
5.26. 3 műveleti erősítős műszererősítőt építünk. Rendelkezésünkre áll a 3 műveleti erősítőn kívül 4 db 25 kΩ-os, 2 db 5 kΩ-os és 1 db 5.55 kΩ-os ellenállás.

a) Rajzoljuk le a kapcsolást, és helyezzük el benne az ellenállásokat úgy, hogy a szimmetrikus erősítés 50 legyen!

b) Mekkora a szimmetrikus erősítés relatív rendszeres hibája?

c) Legalább mekkora a kapcsolás közösjelelnyomása, ha az ellenállások tűrése (relatív véletlen hibája) 0.02%?

5.27. Az alábbi ábrán a Burr-Brown cég INA-120 típusú műszererősítőjének blokkvázlatát látjuk.

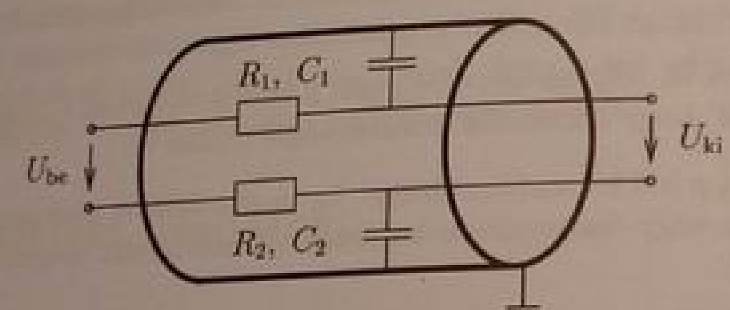


A tápfeszültséget az áramkör 2-es és 17-es lábára kell kapcsolni. A példa megoldásakor a 6-os és 7-es, valamint a 12-es és 13-as kivezetésekkel nem kell foglalkozni.

a) Adjuk meg a többi kivezetés összekötését, úgy, hogy az erősítés **(1)** 10, **(2)** 100, **(3)** 1000 legyen!

b) Tegyük fel, hogy a 10 kΩ-os ellenállások tűrése 0.2%. Legalább hány dB adott erősítés mellett a kapcsolás közösjelelnyomása, feltéve, hogy a műveleti erősítők közösjelelnyomása végtelen?

5.28.



A fenti ábrán egy árnyékolt kábel modelljét látjuk. A mérendő feszültséget a bemenetre kapcsoljuk, és a kimeneten megjelenő feszültséget dolgozzuk fel. A kábel névleges adatai: $R_1 = R_2 = 0.2\ \Omega$, $C_1 = C_2 = 5$ nF. Ezek azonban nem teljesülnek pontosan, a névleges értéktől való eltérés max. $h = 1\%$. Ideális esetben az U_{be} feszültségre szuperponálódó közös feszültség hatására $U_{ki} = 0$, de a paraméterek nemideális volta miatt ez nem teljesül. Adjuk meg a kábel közösjelelnyomását 1 kHz frekvencián, a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével!

5.29. Egy mikrofon jelét előerősítővel erősítjük, majd egy hosszú kábel segítségével egy másik erősítőre vezetjük. Az előerősítő közelében azonban egyéb elektromos berendezések is működnek, és a kapacitív csatolás eredményeképpen 20 V effektív értékű 50 Hz-es, illetve 16 V effektív értékű 400 Hz-es közös jel mérhető. A második erősítő bemenetei a föld felé 100 pF szórt kapacitással csatlakoznak, a vezetékek ellenállása 5 Ω, az előerősítő kimeneti ellenállása 600 Ω.

a) Rajzoljuk le az elrendezés modelljét!

b) Mekkora a második erősítő bemenetén megjelenő, közös jelből származó komponens effektív értéke?

5.30. Egy 50 Hz-es szinuszjelet fázisérzékeny egyenirányítóval egyenirányítunk. A referenciajel amplitúdója $U_r = 1$ V, a mérendő jelé $U_x = 0.5$ V, a fázistolás $\varphi = 35°$. Az egyenirányító szűrője egy RC-tag, amelynek törésponti frekvenciája $f_c = 5$ Hz.

a) Mennyi a szűrő beállási ideje, amennyiben a beállást akkor tekintjük teljesnek, ha a szűrő kimenetén megjelenő egyenkomponens a kezdeti zérus értékről a végérték 99.5%-át elérte?

b) A szűrő kimenetét szukcesszív approximációs AD-átalakítóval mérjük. Az AD-átalakító a jel pillanatértékét méri. A legrosszabb esetet feltételezve, mekkora az egyenirányított jel mérésének relatív hibája?

c) A szukcesszív approximációs AD-átalakító helyett dual-slope AD-átalakítót alkalmazunk, amelynek integrálási ideje $T = 100$ ms. Számítsuk ki ismét a jel mérésének relatív hibáját!

5.31. Soros diódás csúcsegyenirányítót tervezünk, amelynek $f = 50$ kHz frekvenciájú jeleket kell egyenirányítania. A kondenzátor kapacitása $C = 22$ nF, az ellenállás értéke $R = 18$ kΩ, a dióda nyitófeszültsége $U_d = 0.7$ V.

a) Mekkora a csúcsegyenirányítás relatív hibája, ha a mért feszültség $U_m = 12.3$ V? (A kimenő feszültség egyenkomponense mekkora hibával egyezik meg a bemenő feszültség csúcsértékével?)

A kapcsolást átalakítjuk, hogy $f = 5$ kHz frekvenciájú jeleket is mérni tudjunk.

b) Mekkorára válasszuk a kapacitást, hogy változatlan ellenállásérték mellett a hiba ugyanakkora maradjon?

5.32. Műszert szerkesztünk mágneses indukció mérésére. Érzékelőként kis mérőtekercset alkalmazunk, amelynek menetszáma $N = 100$, felülete $A = 1\ \mathrm{cm}^2$. A mérőtekercs feszültségét szelektív voltmérővel mérjük, és a mért effektív feszültségből számítjuk ki a kérdéses indukciót. A szelektív voltmérő egy differencia-erősítőt is tartalmaz, amelynek erősítése $A_e = 100$, a benne lévő ideális aluláteresztő szűrő törésponti frekvenciája $f_c = 1$ kHz.

a) Mekkora a mért effektív feszültség, ha a mérendő indukció csúcsértéke $B = 10$ mT (millitesla) és frekvenciája $f = 50$ Hz?

b) A mért feszültség a valóságban jelentős zajt tartalmaz, ezt az erősítő bemenetén $f_B = 100$ kHz sávszélességű, $U_n = 20$ mV effektív értékű fehérzajjal modellezhetjük. Mit mutat ebben az esetben a szelektív voltmérő?

6. Idő- és frekvenciamérés

6.1. Bevezető feladatok

6.1. Határozzuk meg egy digitális frekvenciamérő segítségével mérhető legnagyobb frekvencia értékét, ha a mérési idő 10 ms, a számláló kapacitása pedig 10^5 !

6.2. Az 50 Hz névleges frekvenciájú hálózati feszültség frekvenciáját szeretnénk megmérni. Ebből a célból számlálós periódusidő-mérővel mérjük egy hálózati transzformátor szekunder tekercsének feszültségét. A műszer órajele 1 MHz, hibája elhanyagolható.

a) Meg lehet-e mérni a hálózati frekvenciát 0.01 Hz pontossággal egyetlen periódus mérésével, ha feltételezzük, hogy a mérendő jel zajmentes?

b) Mekkora a mérés relatív hibája, ha a jel csúcsértéke $U_{x,p} = 1$ V, és azt $U_{z,p} = 30$ mV csúcsértékű szélessávú zaj terheli?

Ez utóbbi esetben átlagperiódusidő-méréssel teljesíthető a 0.01 Hz-es pontosság.

c) Mekkora lesz ekkor a mérési idő?

6.3. Fázistolást mérünk Lissajous-ábra segítségével. Az oszcilloszkóp képernyőjén ellipszist látunk, amelynek függőleges befoglaló mérete $a = 3$ cm, a függőleges tengelymetszet pedig $b = 2.9$ cm, a leolvasási bizonytalanság $h = 2\%$.

a) Mekkora a fázistolás, ha az ellipszis nagytengelye (1) az 1. és a 3.; (2) a 2. és a 4. síknegyedben van?

b) Adjuk meg a fázismérés abszolút hibáját!

6.2. Gyakorló feladatok

6.4. Egy szinuszgenerátor zajmentesnek tekinthető jelének frekvenciáját mérjük számlálós periódusidő-mérővel. A névleges frekvencia $f_x = 100$ kHz, a mérőműszer órajelének frekvenciája $f_0 = 10$ MHz.

a) Mekkora relatív hibával mérhető meg a periódusidő egyetlen periódus mérésével?

b) A mérési hibát átlagperiódusidő-méréssel csökkenthetjük. Hány periódust kell mérnünk, hogy a relatív mérési hiba 10^{-4}-re csökkenjen?

c) Ha ennél is kisebb hibával szeretnénk mérni, a jel már nem tekinthető zajmentesnek, ilyenkor a mérési eredményeket átlagolni kell. Hány eredményt kell átlagolni ahhoz, hogy a hiba 10^{-5}-re csökkenjen?

d) Hány mérési eredményt kellene átlagolnunk 10^{-4}-es hibához, ha az egyetlen periódus méréséből származó eredményeket átlagolnánk? Milyen lenne az átlagolt és az átlagolatlan mérési eredmények eloszlása, és miért?

6.5. Egy számlálós periódusidő-mérő órajele $f_0 = 10^6$ Hz, relatív véletlen hibája 10^{-6}. A műszeren 0.1 sec, 1 sec és 10 sec mérési idő állítható be. Ez azt jelenti, hogy mérendő jelből mindig annyi (egész számú) periódust mér meg, amennyi a kijelölt időbe belefér. (Ez az időtartam a tényleges mérési idő.) A műszerrel az $f_x = 50$ Hz névleges frekvenciájú hálózati feszültség frekvenciáját szeretnénk megmérni. Ebből a célból egy hálózati transzformátor szekunder tekercsének feszültségét vezetjük a műszer bemenetére.

a) Meg lehet-e mérni a hálózati frekvenciát 0.01 Hz pontossággal $t_m = 0.1$ sec mérési idő kiválasztásával, ha feltételezzük, hogy a mérendő jel zajmentes?

b) Mekkora mérési időt válasszunk, ha tudjuk, hogy a jel csúcsértéke $U_{x,p} = 1$ V, és azt $U_{z,p} = 30$ mV csúcsértékű szélessávú zaj terheli?

6.6. A levegőben terjedő hang sebességét szeretnénk megmérni. A mérést egy süketszobában végezzük el a következőképpen: egy hangszórót és egy mikrofont helyezünk el egymástól 2 m távolságban. A hangszóróra egy 1 kHz frekvenciájú szinuszjelet kapcsolunk, és ezt a jelet, valamint a mikrofon jelét számítógép hangkártyájára vezetjük. A két hangminta közötti időkülönbség megegyezik a hang terjedési idejével (az elektronika esetleges késleltetését elhanyagoljuk). Mekkora a sebességmérés relatív hibája, a hibakomponensek szabványos kiértékelésével $k = 2$ kiterjesztési tényezővel, ha a távolságot 0.5% hibával ismerjük, a mintavételi frekvencia pedig 48 kHz volt? A mérési hibák eloszlása egyenletes.

6.7. Mennyi ideig tart a mérés, ha egy kb. $f_x = 1$ kHz frekvenciájú jel periódusidejét vagy frekvenciáját szeretnénk megmérni 0.01% pontosan, és a frekvenciamérő órajelfrekvenciája $f_0 = 100$ MHz $\pm$ 10 ppm, és a komparálásból eredő bizonytalanságtól eltekinthetünk?

6.8. 1320 Hz névleges frekvenciájú periodikus jel frekvenciáját mérjük, számlálós periódusidő-mérővel. A beállított mérési idő 1 sec, ez azt jelenti, hogy mérendő jelből mindig annyi (egész számú) periódust mér meg, amennyi a kijelölt mérési időbe belefér. (Ez az időtartam a tényleges mérési idő.) Mekkora a mérés relatív hibája, ha a műszer órajele 10 MHz frekvenciájú, és ennek hibáját elhanyagoljuk?

6.9. 1250 Hz névleges frekvenciájú periodikus jel frekvenciáját mérjük, számlálós periódusidő-mérővel. A mérési idő változtatható. A műszer a mérési idő alatt a mérendő jelből mindig annyi (egész számú) periódust mér meg, amennyi a kijelölt mérési időbe belefér. (Ez az időtartam a tényleges mérési idő.) Mekkora mérési időt válasszunk, ha a műszer órajele 10 MHz frekvenciájú, és célunk, hogy a mérés relatív hibája 10 ppm legyen? Az órajel hibáját elhanyagoljuk.

6.3. Összetett feladatok

6.10. Egy 3000/min névleges fordulatszámú aszinkron motort működtetünk. A tényleges (névlegeshez közeli) fordulatszámot úgy mérjük, hogy egy, a motor tengelyén elhelyezett váltakozóáramú generátor kimenő feszültségének frekvenciáját mérjük. (A frekvencia számértéke megegyezik a fordulatszám számértékével.) Mivel nincs frekvenciamérőnk, a generátor jelét hangkártyával felvesszük, és a jelet DFT-vel analizáljuk, és az alapharmonikus frekvenciája adja az aktuális fordulatszámot.

a) Hány pontos DFT-t alkalmazzunk, ha a mintavételi frekvencia 8 kHz, és a fordulatszámot legalább 1% pontossággal szeretnénk megmérni?

b) Mekkora a mérési idő, ha feltételezzük, hogy a mintagyűjtés ideje a meghatározó?

c) Milyen pontosan tudnánk megmérni a fordulatszámot számlálós periódusidő-mérővel ugyanannyi idő alatt, ha feltesszük, hogy a műszer órajelének hibája, valamint a kvantálási hiba elhanyagolható, de az $U_{x,p} = 1$ V csúcsértékű jelet $U_{z,p} = 70$ mV csúcsértékű zaj terheli?

6.11. Egy programozható számlálós frekvencia/periódusidő/átlagperiódusidő-mérő órajele $f_0 = 10^7$ Hz, relatív véletlen hibája 10^{-6}. Egy $f_x = 500$ kHz névleges frekvenciájú zajmentes szinuszjel frekvenciáját szeretnénk pontosan megmérni.

a) Milyen funkciót válasszunk a műszeren, hogy adott mérési idő alatt maximális mérési pontosságot érjünk el?

b) Mekkora a választott funkció mellett a mérés relatív véletlen hibája (a hibakomponensek worst case összegzésével), ha a mérésre 200 μs áll rendelkezésre?

c) Mekkora lenne a hiba, ha a mérésre 20 ms lenne fordítható? Milyen modellezési problémát vet fel ez az eredmény?

6.12. Egy kétbemenetű (A és B) számláló jelek frekvenciájának, periódusidejének mérésére alkalmas. Mindkét bemenetet használva időintervallumot is mérhetünk. A műszer mindenképpen periódusidőt mér, és a belső aritmetikai egység számítja ki a mért periódusidőből a frekvenciát. Ezekhez a funkciókhoz a jelet az A bemenetre kell kapcsolni. A műszer órajele $f_0 = 50$ MHz, véletlen hibája

$h = 3 \cdot 10^{-5}$. A műszerrel egy $f_x = 1.2$ kHz névleges frekvenciájú tiszta szinuszos jelet mérünk. Ez a mérendő jel egy lineáris rendszer bemenetére is kapcsolódik. A rendszer kimenetén megjelenő jel $\varphi = 8°$ fázistolást szenved, amelyet szeretnénk pontosan megmérni. Ennek érdekében a kimeneti jelet műszerünk B bemenetére kapcsoljuk, és időintervallumot mérünk. A frekvencia és a mért időintervallum segítségével számítással határozzuk meg a fázistolás értékét. A mérési idő mindkét esetben fix érték, $t_m = 0.1$ s.

a) Mekkora a frekvenciamérés relatív hibája?

b) Mekkora a fázismérés abszolút hibája, ha az időintervallum mérését az A bemenetre kapcsolt jel felfutó éle indítja, és a B bemenetre kapcsolt jel felfutó éle állítja meg? A teljes mérési idő alatt a műszer a keresett intervallumot többször is megméri (hiszen a triggerfeltétel minden periódusban egyszer teljesül), és ezeket az eredményeket az aritmetikai egység átlagolja.

c) Növekszik-e a fázismérés pontossága, ha az időintervallum mérését az A bemenetre kapcsolt jel lefutó éle indítja?

6.13. Egy RC-tag időállandóját szeretnénk megmérni. Ehhez rendelkezésünkre áll egy függvénygenerátor (amely szinusz-, háromszög-és négyszögjelet képes kiadni), egy oszcilloszkóp, valamint egy pontos effektívérték-mérő voltmérő. A mérést a megadott eszközökkel nem csak egyféleképpen lehet elvégezni, ezért nem kell feltétlenül minden műszert felhasználni.

a) Adjunk meg egy lehetséges mérési összeállítást!

b) Adjuk meg a mérés menetét! Amennyiben a mérési eljárásnak része valamilyen számítás, adjuk meg ennek a képletét!

7. Impedancia- és teljesítménymérés

7.1. Bevezető feladatok

7.1. Egy ohmos fogyasztón disszipálódó egyenáramú teljesítményt áram és feszültség mérésével mérünk olyan kapcsolásban, amelyben a voltmérő 10 kΩ-os belső ellenállása okoz rendszeres hibát. Az ampermérőről 100 mA-t, a voltmérőről 10 V-ot olvasunk le. Mekkora a teljesítménymérés rendszeres hibája? Mekkora a fogyasztón disszipálódó teljesítmény? Mekkora a fogyasztó ellenállása?

7.2. Egy $R = 1$ kΩ ellenálláson folyó áram időfüggvénye a következő: $I(t) = [10 + 10\cos(314t + \pi/6)]$ mA. Mekkora az R ellenálláson disszipálódó (hasznos) teljesítmény?

7.3. Egy $R = 2$ kΩ ellenállásból és vele sorosan kapcsolódó $L = 100$ μH induktivitásból álló impedancián folyó áram időfüggvénye a következő: $I(t) = 10\cos(314t + \pi/6)$ mA. Mekkora az impedancián disszipálódó (hasznos) teljesítmény?

7.4. Ellenállást mérünk feszültség-összehasonlítással. Adjuk meg az ellenállásmérés hibáját az ismert ellenállás és a voltmérő hibájának függvényében, ha:

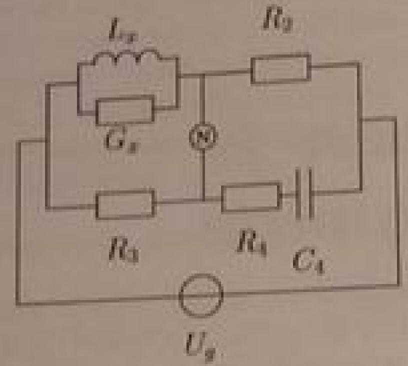
a) egyetlen voltmérőt használunk, és a voltmérőnek csak erősítéshibája van;

b) egyetlen voltmérőt használunk, és a voltmérőnek csak nullponthibája van!

7.5. Egy Deprez-műszer segítségével soros ohmmérőt építünk. Mekkorára válasszuk az R_s soros ellenállást, ha a mérendő ellenállás névleges értéke $R = 1$ kΩ, és maximális mérési pontosságot szeretnénk elérni? Mekkora a mérés hibája ebben az esetben, ha a műszer osztálypontossága 0.5?

7.6. Egy $C = 100$ nF kapacitású kondenzátor veszteségi tényezője $f_1 = 2$ kHz-en $D_1 = 5 \cdot 10^{-4}$, $f_2 = 3$ MHz-en pedig $D_2 = 4 \cdot 10^{-2}$. Adjuk meg a kondenzátor egy lehetséges modelljét!

7.7.



Az ábrán látható ún. Hay-híd induktivitás párhuzamos helyettesítőképét (L_x, G_x) méri. Az állítható elemek R_4 és C_4, $R_2 = R_3 = 1$ kΩ.

Adjuk meg a kiegyenlítés feltételét, valamint L_x és G_x értékét, ha $\omega =$

a) *Adjuk meg a kiegyenlítés feltételét, valamint L_x és G_x értékét, ha $\omega = 1000$ 1/s mellett $R_4 = 100\ \Omega$ és $C_4 = 100$ nF!*

b) *$\omega = 2000$ 1/s esetén a kiegyenlítés $R_4 = 25\ \Omega$ és $C_4 = 100$ nF mellett valósul meg. Létezik-e a mért induktivitásra jobb modell, mint a Hay-híd által feltételezett? Ha igen, adjuk meg ezt a modellt!*

c) Mekkora a híd kapcsolási érzékenysége, ha $Z_2/Z_x = 1 + j$?

7.8. Egy impedancia soros RL helyettesítőképét mértük. Mekkora az impedancia jósági tényezője (Q), veszteségi tényezője (tgδ), illetve disszipációs faktora (D)? A kapott eredményből határozzuk meg a párhuzamos RL, a soros RC és a párhuzamos RC helyettesítőkép elemeit!

7.9. Egy impedancia soros RC helyettesítőképének kapacitását $C = -10\ \mu$F-nak, veszteségi tényezőjét pedig $D = -6.28 \cdot 10^{-4}$-nek mértük 1 MHz-en. Melyek az impedancia soros RL helyettesítőképének elemei?

7.10. Rajzoljuk le, hogyan kell csatlakoztatni egy 4 vezetékes mérésre alkalmas ellenállásmérőhöz a mérendő ellenállást! Mekkora feszültség esik az egyes mérővezetékeken, ha a mérendő ellenállás $R_x = 1\ \Omega$, az egyes mérővezetékek ellenállása a csatlakozásokkal együtt $R_s = 100$ mΩ, a voltmérő belső ellenállása $R_v = 100$ kΩ, a mérőáram pedig $I = 100$ mA?

7.2. Gyakorló feladatok

7.11. Egy ohmos fogyasztón disszipálódó egyenáramú teljesítményt áram és feszültség mérésével mérünk olyan kapcsolásban, amelyben az ampermérő 0.5 Ω-os

belső ellenállása okoz rendszeres hibát. Az ampermérőről 1 A-t, a voltmérőről 10 V-ot olvasunk le. Mekkora a teljesítménymérés rendszeres hibája? Mekkora a fogyasztón disszipálódó teljesítmény? Mekkora a fogyasztó ellenállása?

7.12. Ellenállást mérünk áram-összehasonlítással. Adjuk meg az ellenállásmérés hibáját az ismert ellenállás és az ampermérő hibájának függvényében, ha:

a) egyetlen ampermérőt használunk, és az ampermérőnek csak erősítéshibája van;

b) egyetlen ampermérőt használunk, és az ampermérőnek csak nullponthibája van!

7.13. Egy Deprez-műszer segítségével párhuzamos ohmmérőt építünk. Mekkorára válasszuk az R_s soros ellenállást, ha a mérendő ellenállás névleges értéke $R = 1$ kΩ, és maximális mérési pontosságot szeretnénk elérni? Mekkora a mérés hibája ebben az esetben, ha a műszer osztálypontossága 0.5?

7.14. Egy $R = 10\ \Omega$ névleges értékű ellenállást 4 vezetékes módszerrel mérünk. A mérőfrekvencia 100 Hz, a mérővezetékek ellenállása 0.1 − 0.1 Ω. Mekkora az ellenállásmérés hibája legkedvezőtlenebb esetben, ha a feszültség és az áram mérésének hibája egyaránt 0.5%? A műszerben található volt-és ampermérő ideális, azaz $R_v = \infty$ és $R_a = 0$.

7.15. Egy $R = 10\ \Omega$ névleges értékű ellenállást 3 vezetékes módszerrel mérünk. A mérőfrekvencia 100 Hz, a mérővezetékek ellenállása 0.1 − 0.1 Ω. Mekkora az ellenállásmérés hibája legkedvezőtlenebb esetben, ha a feszültség és az áram mérésének hibája egyaránt 0.5%? A műszerben található volt-és ampermérő ideális, azaz $R_v = \infty$ és $R_a = 0$.

7.16. Egy $R = 10\ \Omega$ névleges értékű ellenállást 5 vezetékes módszerrel mérünk. A mérőfrekvencia 10 kHz, a mérővezetékek ellenállása 0.1 − 0.1 Ω. Mekkora az ellenállásmérés hibája legkedvezőtlenebb esetben, ha a feszültség és az áram mérésének hibája egyaránt 0.5%? A műszerben található volt-és ampermérő ideális, azaz $R_v = \infty$ és $R_a = 0$.

7.17. Egy vasmagos tekercset kívánunk modellezni. Ebből a célból impedanciamérővel megmérjük a soros helyettesítőképét 50 Hz frekvencián. A helyettesítőkép elemei: $R_h = 0.5395\ \Omega$ és $L_h = 20$ mH. Megmérjük ezen kívül a tekercset soros ohmmérővel is, azt kapjuk, hogy $R_s = 0.5\ \Omega$. A mérési eredményeket hibamentesnek feltételezve adjuk meg a tekercs egy, az induktivitást, valamint a vas- és rézveszteséget is reprezentáló modelljét!

7.18. 3 vezetékes impedanciamérővel mérjük egy hálózatba beépített R_x ellenállás értékét. Az ellenállás mindkét végét egy-egy $R_f = 1$ kΩ nagyságú ellenállás köti le a földvezetékre. Ideális esetben mekkora hibát okoz a két zavaró ellenállás, ha a műszerbe épített árammérő ellenállása $R_a = 1\ \Omega$?

7.19. Egy négykapcsú ellenállásmérésre is alkalmas ellenállásmérő hibája 0.1%. Mekkora ellenállásértékeket érdemes 4 vezetékkel mérni, ha minden egyes vezeték a kontaktusaival együtt 0.5 Ω ellenállású?

7.20. Egy impedanciamérő műszer 1 kHz frekvencián méri az ismeretlen impedancia soros RC helyettesítőképében R_s és C_s értékét. Mekkora az impedancia párhuzamos RC helyettesítőképében C_p és a D veszteségi tényező értéke, ha a mért értékek: $R_s = 1\ \Omega$, $C_s = 100$ nF?

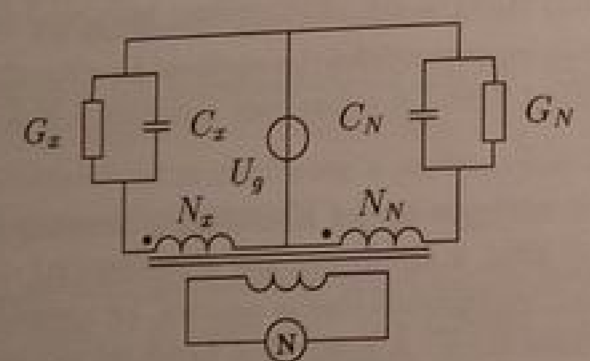
7.21. 3 voltmérős módszerrel teljesítményt mérünk. A generátorfeszültség $U_G =$ 10 V, a normálellenállás értéke $R_N = 100\ \Omega$, a normálellenálláson és a vizsgált impedancián eső feszültség $U_N = U_Z = 5.8$ V.

a) Mekkora az impedancián disszipálódó hasznos teljesítmény? Mekkora $\cos\varphi$ értéke?

b) Mekkora a mérés relatív hibája $k = 2$ kiterjesztési tényezővel, ha a normálellenállás hibáját elhanyagoljuk, a voltmérők osztálypontossága 0.5, és mindegyik 10 V-os méréshatárban mér? A hibák eloszlása egyenletesnek tekinthető.

c) Induktív vagy kapacitív a terhelés?

7.22.



Az ábrán látható áramkomparátoros híd kapacitás párhuzamos helyettesítőképét (C_x, G_x) méri. Az állítható elemek N_N és G_N, $N_x = 1000$ és $C_N = 100$ nF.

a) Adjuk meg a kiegyenlítés feltételét, valamint C_x és G_x értékét, ha $\omega =$ 1000 1/s mellett $N_N = 100$ és $G_N = 1$ mS!

b) Hogyan tehető alkalmassá ez a híd induktivitás mérésére? Rajzoljuk le a módosított blokkvázlatot és adjuk meg ismét a kiegyenlítés feltételét!

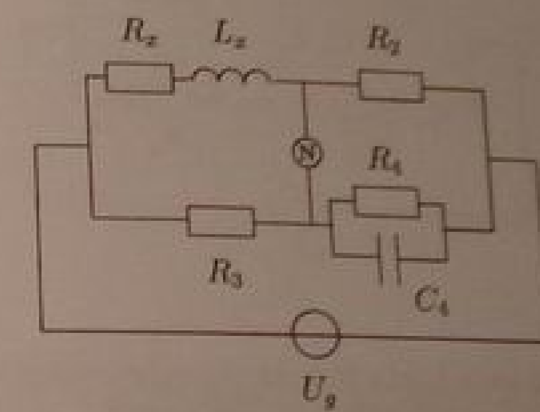
7.23. Egy impedanciát 3 voltmérős módszerrel mérünk. A gerjesztés $U_g =$ 10.000 V, a normálellenállás értéke $R_N = 100\ \Omega$, a normálellenálláson és a vizsgált impedancián eső feszültség rendre $U_N = 07.053$ V, illetve $U_x = 06.877$ V.

a) Mekkora az impedancia abszolút értéke és fázisa?

b) Nem ismerjük a voltmérők bizonytalanságát, de a kijelzés digitális. 20 V-os méréshatárban pontosan a megadott számjegyeket jelzik ki a műszerek. A normálellenállás bizonytalansága 0.01%. A rendelkezésre álló információ alapján adjuk meg az impedancia abszolút értéke mérésének relatív hibáját, a legkedvezőtlenebb esetet feltételezve!

c) Az impedancia abszolút értékének vagy fázisának mérése pontosabb?

7.24.



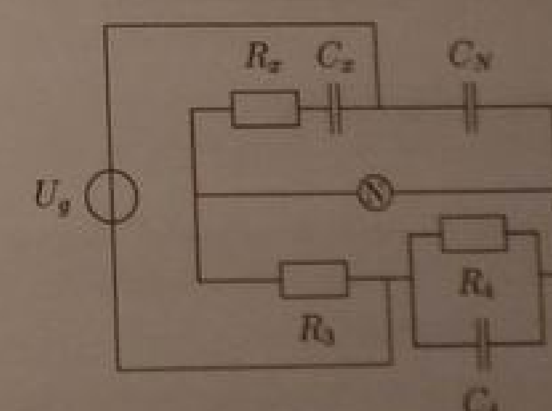
Az ábrán látható ún. Maxwell–Wien-híd induktivitás soros helyettesítőképét (L_x, R_x) méri. Az állítható elemek R_4 és C_4, $R_2 = R_3 = 100\ \Omega$.

a) Adjuk meg a kiegyenlítés feltételét, valamint L_x és R_x értékét, ha $f =$ 159.1 Hz mellett $R_4 = 10$ kΩ és $C_4 = 500$ nF!

b) Adjuk meg az induktivitás jósági tényezőjét!

c) Mekkora R_x mérésének hibája, ha ezen a frekvencián C_4 veszteségi tényezője $D_4 = 0.002$?

7.25.



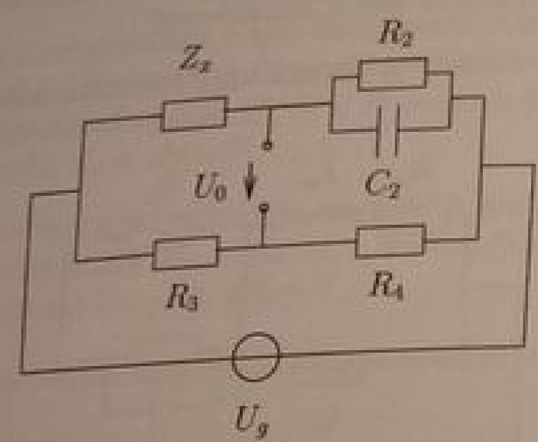
Az ábrán látható ún. Schering-híd kondenzátorok soros helyettesítőképét (C_x, R_x) méri. Az állítható elemek R_3 és C_4, $R_4 = 10$ kΩ, $C_N = 10$ nF.

a) Adjuk meg a kiegyenlítés feltételét, valamint C_x és R_x értékét, ha $\omega =$ 1000 1/s mellett $R_3 = 909\ \Omega$ és $C_4 = 1.11$ nF!

b) Adjuk meg a kondenzátor veszteségi tényezőjét ($\mathrm{tg}\delta$)!

c) Hogyan alkalmazható ez a híd szigetelésvizsgálatra?

7.26.



Impedanciát mérünk a fenti ábrán látható Wheatstone-híddal. A hídkapcsolásban $R_3 = R_4 = 1$ kΩ, a kiegyenlítő impedancia Z_2, amely egy ellenállás és egy kondenzátor párhuzamosan kapcsolva. A hidat $f = 159.1$ Hz frekvenciájú, $U_g = 5$ V csúcsértékű szinuszos felszültséggel tápláljuk. A kiegyenlítő impedancia elemei diszkrét lépésekben állíthatók, ezért a kiegyenlítés nem tökéletes. Ebben a helyzetben $R_2 = 48$ kΩ, $C_2 = 15$ nF. A nullindikátor feszültségének csúcsértéke $U_0 = 27$ mV, fázisa a generátorfeszültséghez képest $\varphi = 115°$.

a) Mekkora Z_x értéke, a nullindikátor feszültségét is figyelembe véve?

b) Mekkora lenne a mérés hibája, ha úgy tekintenők, hogy a híd kiegyenlített?

c) Hogyan kell megmérni a nullindikátor feszültségét, hogy annak alapján az a) pontnak megfelelően korrigálni lehessen Z_x mért értékét?

7.3. Összetett feladatok

7.27. Impedanciát mérünk Maxwell–Wien-híddal. Hogyan változik L_x és R_x értéke, ha az $\alpha = +200$ ppm/°C hőmérsékletfüggésű R_2, R_3 és R_4 ellenállások hőmérséklete $\Delta T = 50$ °C-kal megnő?

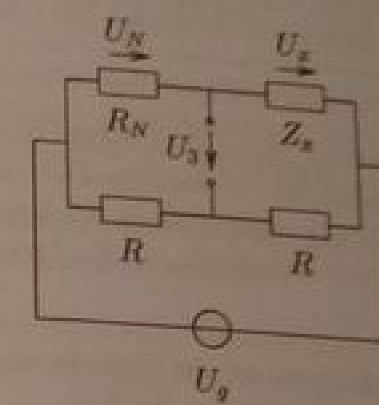
7.28. Egy tekercs impedanciáját a feszültség-összehasonlítás módszerével mérjük. A normálellenállás értéke $R_N = 100\ \Omega$, a rajta eső feszültség értéke $U_N = 10$ V, a tekercsen eső feszültség $U_X = 4.1$ V. A mérést $f = 159.1$ Hz-en végezzük, a két feszültség közötti fázistolás $\Delta\varphi = 77.32°$.

a) Mekkora a mért impedancia abszolút értéke?

b) Adjuk meg a tekercs soros LR helyettesítőképét!

c) Mekkora L mérésének relatív hibája a legkedvezőtlenebb esetben, ha a feszültségmérés hibája mindkét esetben 0.2%, a normálellenállás bizonytalansága pedig 0.1%? A frekvencia és a fázistolás mérésének hibáját elhanyagoljuk.

7.29.



Az ábrán látható ún. Grützmacher-híd impedanciamérésre alkalmas. A mérés úgy történik, hogy az R_N ellenállást addig állítjuk, amíg a rajta eső U_N feszültség abszolút értéke nem egyezik meg a Z_x impedancián eső U_x feszültség abszolút értékével. A jelen összeállításban $R = 4.7$ kΩ, és egy veszteséges kondenzátort mérünk, $f = 318.3$ Hz frekvencián.

a) Mekkora a mért impedancia abszolút értéke és fázisa, ha $R_N = 49.94$ kΩ, $U_x = U_N = 6.9$ V, $U_3 = 4.756$ V?

b) Adjuk meg a veszteséges kondenzátor párhuzamos CR_p helyettesítőképét!

c) C vagy R_p mérése pontosabb?

7.30. Feladatunk egy fémdobozba szerelt kondenzátor kapacitásának megmérése. A kondenzátor névleges értéke 2 nF.

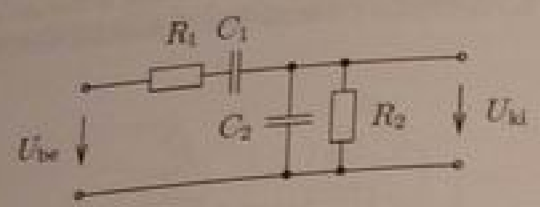
a) Mekkora relatív hibát okoz egyszerű kétvezetékes mérés esetén a kondenzátor kivezetései és a doboz közötti, 100–100 pF értékűre becsülhető szórt kapacitás?

b) Milyen mérési elrendezéssel küszöbölhető ki ez a hiba?

c) Hogyan lehetne megmérni a szórt kapacitások valódi értékét?

7.31. Egy 75 Ω hullámimpedanciájú koaxiális kábel induktivitását szeretnénk megmérni, de csak egy kapacitásmérőnk van (amellyel negatív kapacitások nem mérhetők). Hogyan mérhető meg a kábel induktivitása, ha tudjuk, hogy hossza 200 m?

7.32.



A fenti ábrán az ún. fél Wien-híd kapcsolási rajzát látjuk. A hidat két, egymással elvileg megegyező ellenállás, illetve kondenzátor alkotja, itt az ellenállások névleges értéke $R = 22$ kΩ, a kondenzátorok névleges értéke $C = 6.8$ nF. A híd rezonanciafrekvenciája az a frekvencia, ahol a bemenet és a kimenet közötti fázistolás zérus.

a) Rajzoljuk fel a híd Bode-diagramjait (fázis és amplitúdó), valamint adjuk meg a rezonanciafrekvencia névleges értékét!

b) Adjuk meg, milyen tartományban mozoghat a rezonanciafrekvencia, ha tudjuk, hogy az ellenállások tűrése $h_R = 0.5\%$, a kondenzátorok tűrése $h_C = 2\%$, valamint a kondenzátorok veszteségi tényezője a rezonanciafrekvencia környezetében $D = 0.001$!

7.33. Feszültség-összehasonlítás módszerét alkalmazó impedanciamérőt teszteljük. A méréshez felhasználunk egy pontos impedanciát, amely a Bergengóc Mérésügyi Hivatal szerint pontosan (0 hibával) $L = 500$ mH és $R = 1$ Ω soros képpel jellemezhető. A normálellenállás értéke $R_N = 100$ Ω, relatív hibája $h = 10^{-4}$. A feszültségeket $b = 10$ bites AD-átalakítóval mérjük, a feszültségarányt a regisztrátumokból számított effektív értékek alapján képezzük. (E számítás hibáját elhanyagoljuk.) A fázisméréshez a mintavételezett jelalakok nullátmenetei közötti időt mérjük. Az AD-átalakítók átalakítási tartománya ±3 V, a gerjesztő feszültség csúcsértéke 1 V, frekvenciája $f = 60$ Hz. A mintavételi frekvencia $f_s = 10$ kHz.

a) Mekkora a mérendő impedancia abszolút értéke és fázisa?

b) Mekkora az impedancia abszolút értéke mérésének relatív hibája a legkedvezőtlenebb esetben? Alkalmazzuk a kvantálás zajmodelljét!

c) Mekkora legrosszabb esetben a fázismérés abszolút hibája? Ennél a számításnál a kvantálás hatását, valamint a gerjesztés frekvenciájának hibáját elhanyagolhatjuk.

7.34. Egy veszteséges kondenzátort feszültség-összehasonlítás elvén működő impedanciamérővel mérünk. A normálellenállás értéke $R_N = 100$ Ω, relatív hibája $h_R = 10^{-4}$. A feszültségeket AD-átalakítóval mérjük, a feszültségarányt a regisztrátumokból számított effektív értékek alapján képezzük. (E számítás hibáját elhanyagoljuk.) A fázisméréshez fázisérzékeny egyenirányítót valósítunk meg

(összeszorozzuk a két feszültséget, majd átlagolunk). A fázisérzékeny egyenirányító átviteli tényezője $c = 1$ 1/V. Az átlagolást a következő algoritmussal végezzük:

$$y(k+1) = y(k) + 0.002\,[x(k) - y(k)],$$

ahol $x(k)$ az átlagoló bemenete, $y(k)$ pedig a kimenete a k. időpillanatban. A mérést $f = 400$ Hz frekvencián végezzük, a mintavételi frekvencia $f_s = 10$ kHz.

a) Adjuk meg a kondenzátor párhuzamos helyettesítőképének R és C elemeit, ha a normálellenálláson mért feszültség $U_N = 0.32$ V, a kondenzátoron mért feszültség $U_x = 0.63$ V, U_x fázistolása U_N-hez képest pedig $\varphi = -82°$!

b) Adjuk meg a kapacitás mérésének relatív hibáját, ha a feszültségmérés hibája mindkét esetben $h_U = 0.05\%$!

c) Mekkora legrosszabb esetben a fázismérés abszolút hibája? (A méréshez az átlagoló kimeneti jelének állandósult állapotbeli pillanatértékét használjuk fel.)

7.35. Vizsgáljuk meg, hogy a Schering-hidat (**7.25.** feladat) a szabad paraméterek közül melyikkel célszerű kiegyenlíteni! Kiegyenlíthető-e a híd az R_3 és C_4 elemek segítségével?

8. AD- és DA-átalakítók

8.1. Bevezető feladatok

8.1. Egy $b = 10$ bites létrahálózatos DA-átalakító referenciafeszültsége $U_r = 10$ V, a létra $R = 10$ kΩ-os ellenállásokból áll. Mekkora a kapcsolókon átfolyó áram minimális és maximális értéke?

8.2. Egy $b = 12$ bites AD-átalakító referenciafeszültsége $U_r = 1$ V, ennek bizonytalansága $h_r = \pm 0.05\%$. Az AD-átalakítóval $U_x = 0.15$ V egyenfeszültséget mérünk. Mekkora a feszültségmérés abszolút és relatív hibája legkedvezőtlenebb esetben?

8.3. Mekkora a várható értéke, szórása és effektív értéke egy $[-A, A]$ kivezérelhetőségű, N bites ideális AD-átalakító kvantálási zajának?

8.4. Mekkora egy ±5 V-os méréshatárú 10 bites ideális AD-átalakító kvantálási zajának effektív értéke?

8.5. Jeleket alakítunk át egy ±5 V-os méréshatárú 10 bites ideális AD-átalakítóval. Mekkora lesz a kvantált jel jel-zaj viszonya, ha az átalakítandó jel:

a) 5 V amplitúdójú szinuszos jel;

b) 2 V amplitúdójú szinuszos jel;

c) 1 V *szórású* Gauss-zaj;

d) 20 mV *szórású* Gauss-zaj?

8.6. Svájcban a nagyvasúti vontatásra 16 2/3 Hz frekvenciájú váltakozó áramot alkalmaznak. Egy villanymozdony egyik fontos műszere dual-slope AD-átalakítót tartalmaz. Mekkorára célszerű választani az integrálási időt, ha az a célunk, hogy a vontatási áram ne okozzon mérési hibát? Meg kell-e változtatni az integrálási időt, ha a műszert hazai villanymozdonyokon is alkalmazni akarjuk, és mi a vontatásra 50 Hz-es áramot használunk?

8.7. Egy dual-slope AD-átalakítóval működő feszültségmérőn 20 ms, 50 ms és 75 ms integrálási idők között lehet választani. Milyen integrálási időket válasszunk 50, illetve 60 Hz-es hálózat esetén?

8.8. Egy dual-slope AD-átalakító a [0, 1] V intervallumban alakít át feszültséget. A referenciafeszültség abszolút értéke 1 V.

a) Milyen pontosnak kell lennie (mekkora relatív hibája lehet) a referenciafeszültségnek, ha azt akarjuk, hogy az átalakító 20 bites legyen? Az időmérés hibáját elhanyagolhatjuk.

b) Mekkora integrálási időt válasszunk, hogy az átalakító az 50 és 60 Hz-es zavarjeleket is elnyomja?

c) Mekkora hiba engedhető meg az időmérés során, ha az integrálási idő hibáját elhanyagolhatjuk?

8.2. Gyakorló feladatok

8.9. Egy soros-párhuzamos (two-step subranging) AD-átalakítóban alkalmazott mintavevő beállási ideje 5 ns, a párhuzamos átalakítók beállási ideje 10 ns, a DA-átalakító átalakítási ideje 60 ns, a digitális összegzéshez pedig 15 ns-ra van szükség. Mekkora a teljes AD-átalakító átalakítási ideje?

8.10. Egy ideális AD-átalakító kvantálási zajának varianciáját szeretnénk negyedére csökkenteni. Mennyivel kell megnövelni a bitek számát?

8.11. Szinuszjelet alakítunk át 16 bites AD-átalakítóval, a kvantálási hibát zajjal modellezzük. Hány dB a jel-zaj viszony, ha a szinuszjel a teljes átalakítási tartomány (full scale) negyedét tölti ki?

8.12. Egy valódi AD-átalakítóval egy zajmentes szinuszos jelet teljes kivezérlés mellett 60 dB jel-zaj viszonyúnak mérünk. Hány bites ideális AD-átalakító okoz ennek a jel-zaj viszonynak megfelelő kvantálási zajt?

8.13. Hány bites ideális AD-átalakítót kell választani ahhoz, ha egy 4 V amplitúdójú szinuszjelet kvantálva a kvantálási zaj szórása nem lehet több, mint 3 mV? Az AD-átalakító mérési tartománya ±5 V.

8.14. 0.1 V csúcsértékű szinuszjelet mintavételezünk $f_s = 11.025$ kHz mintavételi frekvenciával. Az AD-átalakító a ±2 V tartományban alakítja át, $b = 12$ biten.

a) Mekkora jel-zaj viszony jellemzi a mintavételezett jelet, ha az eredeti jel zajmentes volt?

b) Mekkora lesz a jel-zaj viszony, ha az eredeti jel-zaj viszony 50 dB volt?

8.15. Egy dual-slope AD-átalakítóban milyen integrálási időt kell beállítani ahhoz, hogy egyaránt használható legyen 50, 60 és 400 Hz-es hálózatnál is?

8.16. Egy elektronikus műszer dual-slope AD-átalakítót tartalmaz. A hálózati zavarok kiszűrése céljából az integrálási idő 20 ms. Egy alkalmazásban azonban

a mérendő jelre 60, 400, illetve 810 Hz-es szinuszos zavarjel szuperponálódik. Feltéve, hogy a zavarjelek amplitúdója megegyezik, állítsuk sorrendbe a zavarjeleket az általuk okozott worst case mérési hiba alapján!

8.3. Összetett feladatok

8.17. Soros ohmmérőt szerkesztünk úgy, hogy a soros ellenállás feszültségét mérjük $b = 12$ bites AD-átalakítóval. A mérés elején rövidzár terhelés mellett úgy állítjuk be a generátorfeszültséget, hogy az AD-átalakító éppen maximális feszültséget mutasson (full scale). A mérés úgy történik, hogy az AD-átalakító által szolgáltatott értéket egy aritmetikai egység feldolgozza, majd a végeredményt kijelzi. Az aritmetika és a kijelzés hibája elhanyagolható. Műszerünkben a soros ellenállás értéke $R_s = 2$ kΩ, bizonytalansága elhanyagolható.

a) Mekkora a műszerrel még mérhető legnagyobb (nem végtelen) ellenállás?

b) Mekkora a műszerrel még mérhető legkisebb (nem nulla) ellenállás?

c) Adjuk meg a mérés relatív hibáját, ha a mérésben csak az AD-átalakítás okoz hibát, és a mérendő ellenállás névleges értéke $R_x = 567\ \Omega$!

8.18. Egy digitális DC voltmérőben $b = 16$ bites dual-slope AD-átalakító üzemel. Az átalakító a feszültséget a ±2 V tartományban alakítja át. Az átalakító erősítéshibája $h_g = 0.02\%$, az integrális nemlinearitás INL = 1.2, az ofszetfeszültség $U_0 = 0.1$ mV.

a) A bitszám alapján adjuk meg, hány decimális számjegyet (digitet) lehet a műszer kijelzőjén megjeleníteni!

b) A további adatok alapján adjuk meg a műszer mért értékre és végértékre vonatkoztatott relatív hibáját!

8.19. Feszültséget mérünk AD-átalakítóval és DSP-vel (digitális jelfeldolgozó processzorral). Az AD-átalakító átalakítási tartománya ±3 V, bitszáma $b = 8$. A DSP-n futó program az átalakított jel effektív értékét méri. Az effektív értéket számító algoritmus hibáját elhanyagoljuk.

a) Adjuk meg az effektívérték-mérés relatív hibáját, ha a mérendő feszültség $U_x = 50$ mV effektív értékű szinuszos jel!

b) A hiba csökkentése érdekében a mérendő feszültséget analóg erősítővel erősítjük. Sikerül-e javítani a mérés pontosságát, ha az erősítő névleges erősítése 10, az erősítés relatív hibája pedig $h = 0.2\%$?

8.20. Egy párhuzamos AD-átalakító (flash-konverter) bitszáma $b = 8$, referenciafeszültsége $U_r = 1$ V, ennek hibája elhanyagolható. Az AD-átalakítóban található ellenállások tűrése $h = 0.2\%$. Az AD-átalakítóval szinuszos feszültséget mérünk, amelynek időfüggvénye $U_x(t) = 0.4[1+\cos(2\pi f t)]$ V. A mérés célja a jel AC komponense effektív értékének megmérése. Ehhez rendelkezésünkre áll egy jelfeldolgozó program, amely leválasztja a jel egyenkomponensét és elhanyagolhatóan kicsiny hibával kiszámítja a minták alapján az effektív értéket.

a) Mekkora az effektívérték-mérés relatív hibája, az ellenállásokat pontosnak feltételezve?

b) Mekkora az AD-átalakító differenciális nemlinearitása?

8.21. Kettős meredekségű (dual-slope) AD-átalakítót vizsgálunk. Az átalakító referenciafeszültsége $U_r = 2$ V, bizonytalansága $h_r = \pm 80$ ppm. Az átalakítóban az időmérés a beépített kvarcoszcillátor által szolgáltatott $f_0 = 20$ MHz frekvenciájú négyszögjellel történik. Az órajel frekvenciájának hibája elhanyagolható. Az AD-átalakító az első ütemben $T = 20$ ms ideig integrálja a mérendő feszültséget. Az integrálási idő az órajel periódusidejének egész számú többszöröse. A második fázisban az AD-átalakító a referenciafeszültséget integrálja, a „visszaintegrálás" idejét úgy méri, hogy megszámolja, az órajel hány egész periódusa zajlott le ezalatt. A mért értéket a két idő (két egész szám) hányadosából egy elhanyagolható hibájú aritmetikai egység számítja ki.

a) Hány bit az AD-átalakító felbontása?

b) Mekkora az AD-átalakító pontossága?

8.22. 10 mV szórású, Gauss-eloszlású fehér zajjal terhelt egyenfeszültséget mérünk egy ±5 V-os méréshatárú 10 bites ideális AD-átalakítóval. Hány mérési eredményt kell átlagolnunk ahhoz, hogy az eredményünk 95%-os konfidenciaszint mellett benne legyen egy 4 mV szélességű intervallumban?

8.23. Egy 5 kHz sávszélességű jelet a mintavételi tétel betartása mellett szeretnénk mintavételezni és kvantálni 0.05% pontosan. A felmerülő igények és az AD-átalakítók tipikus paramétereinek összevetése alapján javasoljunk AD-átalakítót a feladatra!

9. Jelfeldolgozás I.

9.1. Bevezető feladatok

9.1. Egy analóg oszcilloszkóp katódsugárcsövének érzékenysége mind X, mind Y irányban 20 V/cm. A képernyő vízszintes irányban 10 cm széles. A képernyőn éppen 5 teljes periódust látunk egy szinuszos jelből, ha a vízszintes eltérítést 10 μs/cm értékűre állítjuk. Mekkora a szinuszos jel frekvenciája? A vízszintes eltérítő feszültség egy állandó árammal töltött 10 nF-os kondenzátor feszültségének 100-szorosa. Mekkora ez a töltőáram?

9.2. Egy kétcsatornás analóg oszcilloszkópban a chopperfrekvencia 100 kHz. Mindkét csatorna jele a képernyőn külön-külön 1000 vonaldarabból tevődik össze. Az egyiken 3 teljes periódust látunk egy háromszögjelből, a másikon pedig egy négyszögjel 5.5 periódusa jelenik meg. Milyen frekvenciájúak ezek a jelek?

9.3. Rajzoljuk fel egy olyan heterodin generátor blokkvázlatát, amely kimenőjelének frekvenciája 20 Hz és 20 kHz között folyamatosan hangolható! Hogyan kell specifikálni a heterodin generátor oszcillátorait és aluláteresztő szűrőjét, ha a keverője nem kiegyenlített?

9.4. 19.9 MHz-es frekvenciájú jelet kell előállítanunk kvarcpontossággal, de csak 1 MHz-es kvarckristályunk van. Rajzoljuk le a generátor blokkvázlatát!

9.5. Rajzoljuk fel egy olyan kvarcpontosságú direkt frekvenciaszintetizátor blokkvázlatát, amely 3 decimális jeggyel hangolható. Határozzuk meg, hogy a berendezés egyes pontjain milyen frekvenciájú jelek mérhetők, ha a beállított frekvencia 5.55 MHz!

9.6. Egy digitális oszcilloszkóp képernyőjén 1 kHz frekvenciájúnak mérünk egy szinuszjelet. Az oszcilloszkóp 50 μs/div állásban mér, a képernyőn vízszintesen 10 osztás van, felbontása 500 pont. Mekkora lehetett az eredeti szinuszjel frekvenciája?

9.7. Egy $f = 9$ kHz-es szinuszjelet mintavételezünk $f_s = 10$ kHz-cel. Rajzoljuk fel a $[-20, 30]$ kHz tartományban a mintavételezett jel spektrumát!

9.8. 4 kHz mintavételi frekvenciával mintavételezünk. Rajzoljuk fel a mintavett jel spektrumát a $[-10, 10]$ kHz frekvenciaintervallumban, ha a mintavételezett jel:

a) 1 kHz-es szinuszjel;

b) 3 kHz-es szinuszjel!

9.9. Egy f_s frekvenciával mintavételezett valós tranziens jel Fourier-transzformáltja az $f = f_0$ helyen $X(f_0)$. Mekkora a transzformált értéke az $f = f_s - f_0$ helyen?

9.10. Egy f_s frekvenciával mintavételezett valós sztochasztikus jel spektrumértéke az $f = f_0$ helyen $S(f_0)$. Mekkora a spektrumértéke az $f = f_s - f_0$ helyen?

9.11. Mi a DFT-je és az inverz DFT-je egy 8 db egyesből álló sorozatnak?

9.12. Egy diszkrét $x(n\Delta t)$ jel DFT-je $X(k)$. Milyen frekvencia-intervallumban becsli $X(k)$, $k = 0 \dots N-1$ $x(t)$ spektrumát?

9.13. Egy $x(n)$, $n = 0 \dots N-1$ valós értékekből álló sorozatot DFT-vel transzformálunk. Adjuk meg a transzformált sorozat $X(k)$ elemét az $X(N-k)$ elem segítségével!

9.14. Egy jelfeldolgozó rendszerben a mintavételi frekvencia $f_s = 51200$ Hz, és $N = 1024$ pontos DFT-t (diszkrét Fourier-transzformációt) végzünk. Adjuk meg, mi a transzformált abszolút értéke egy $f = 50$ Hz-es szinuszjelnek!

9.2. Gyakorló feladatok

9.15. Mekkora lehet annak a négyszögjelnek a frekvenciája, amelynek periódusidejét egy 1 MHz-cel mintavételező oszcilloszkóppal 10 ms-nak mértük?

9.16. Rajzoljuk fel egy $f_s = 100$ kHz-cel mintavételezett, $f = 25$ kHz frekvenciájú négyszögjel spektrumát!

9.17. Egy tiszta szinuszos jelet mintavételeztünk. A mintavételezett jelben a következő frekvenciákon találunk komponenseket: $\dots, -8, -2, 2, 8, 12, 18, \dots$ kHz.

a) Mekkora volt a mintavételi frekvencia?

b) Mekkora lehetett a szinuszos jel frekvenciája?

9.18. Egy 900 Hz frekvenciájú háromszögjelet ideális aluláteresztő szűrővel szűrünk, majd mintavételezünk. Ábrázoljuk a mintavételezett jel spektrumának abszolút értékét a $[0, 2f_s]$ tartományban, ha

a) a szűrő sávszélessége $B = 5$ kHz, $f_s = 16$ kHz,

b) a szűrő sávszélessége $B = 10$ kHz, $f_s = 8$ kHz!

9.19. Oldjuk meg az előző feladatot négyszögjelre is! A jel frekvenciája és az egyéb adatok változatlanok.

9.20. Milyen frekvenciával kell mintavételezni az alábbi jeleket, hogy hibamentesen visszaállíthatók legyenek?

a) $x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$;

b) $x(t) = A_1 A_2 \sin(2\pi f_1 t) \cdot \cos(2\pi f_2 t)$, $f_1 = 2f_2$;

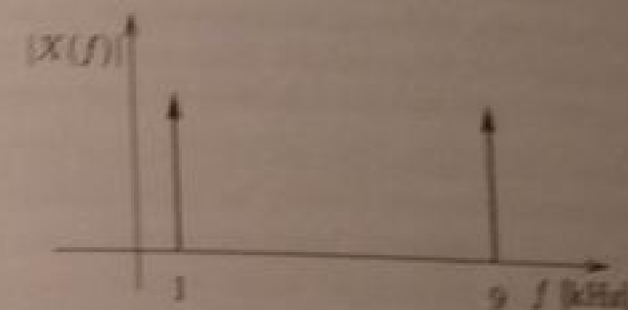
c) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T - \alpha)$;

d) $x(t) = A\,\mathrm{sinc}(t/T)$.

9.21. Az $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ jel egy $y = x^2$ karakterisztikájú nemlineáris statikus rendszer bemenőjele. Milyen frekvenciával vehetünk mintát az $y(t)$ kimeneti jelből, ha a mintavételi tételt be akarjuk tartani?

9.22. Történelmi filmekben gyakran látni, hogy a hintó kereke ,,visszafelé forog". Egy ilyen hintó kerekének átmérője $d = 1.2$ m, a küllők száma $K = 15$. A felvevőgép másodpercenként 16 képkockát készít. Mekkora sebességgel haladhat a hintó, hogy a kereket előre forogni lássuk?

9.23.



A fenti ábrán egy mintavételezett szinuszjel spektruma látható a [0, 10] kHz tartományban. Mekkora lehet a szinuszjel frekvenciája?

9.24. $X(f)$ az $x(t)$ jel Fourier-transzformáltja. $X(f)$-et mintavételezzük $\Delta f = 1/T$ gyakorisággal, így kapjuk $X_s(f)$-et. Mi lesz $X_s(f)$ inverz Fourier-transzformáltja?

9.25. $X(f)$ az $x(t)$ jel Fourier-transzformáltja. Mi a feltétele annak, hogy $X(f)$ előállítható legyen $X(n\Delta f)$ mintavételi értékeiből?

9.26. 8 db egyesből álló sorozatot DFT-vel transzformálunk, majd az így nyert sorozatot ismét DFT-nek vetjük alá. Mi lesz az így kapott sorozat?

9.27. Mi az $[1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1]$ sorozat DFT-je?

9.28. Egy szinuszjel 2 periódusából 8 mintát veszünk, majd kiszámítjuk a minták DFT-jét. Rajzoljuk fel jellegre helyesen a 8 spektrumérték abszolút értékét!

9.29. Az $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ jelet mintavételezzük $f_s = 1$ kHz frekvenciával 16 pontban, majd az így kapott számsorozatot DFT-nek vetjük alá. Rajzoljuk fel jellegre helyesen a transzformált sorozat abszolút értékét, ha $f_0 = 100$ Hz!

9.30. Az $x(t) = \mu + \cos 2\pi f_0 t$ jelből $f_s = 4f_0$ frekvenciával $N = 16$ mintát veszünk majd az így kapott számsorozatot DFT-nek vetjük alá. Adjuk meg a DFT eredményének

a) 1. pontját ($X(0)$);

b) 13. pontját ($X(12)$)!

9.31. Diszkrét Fourier-transzformáció eredményeként az 1024 elemű $X(k)$, $k = 0 \ldots 1023$ vektort kapjuk. A vektorról azt tudjuk, hogy

$$X(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 25 \text{ és } 999 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

A regisztrátumot $f_s = 44.1$ kHz mintavételi frekvenciával rögzítettük. Adjuk meg a mintavételezett jel egy lehetséges időfüggvényét!

9.32. A hálózati feszültséget 8 kHz-cel mintavételezzük, és a jelet diszkrét Fourier-transzformációval (DFT) dolgozzuk fel. Hány pontos DFT-t kell végeznünk, ha a hálózati frekvenciát legfeljebb 0.1% hibával akarjuk megmérni?

9.33. Egy 1024 elemű mintaregisztrátumon 1024 pontos DFT-t hajtunk végre. Adjuk meg a transzformált abszolút értékét, ha a regisztrátum minden mintája zérus, kivéve a 234. mintát, amelynek értéke egységnyi!

9.3. Összetett feladatok

9.34. 50 kHz sávszélességű, normális eloszlású fehérzajt vezetünk oszcilloszkópra. A hullámformát már egy perce nézzük, és azt tapasztaljuk, hogy a jel egy 6 V-os sávon belül van. A normális eloszlás tulajdonságait figyelembe véve, adjunk becslést a zaj effektív értékére!

9.35. Egy áramkört zajmentes szinuszjellel gerjesztünk. A kimenet alacsony szintű zajos szinuszjel, amit digitális oszcilloszkópon figyelhetünk meg. A zaj sávszélessége 1 MHz, eloszlása normális; a jel frekvenciája 50 Hz. A szinuszjel csúcsértékét a zaj miatt nem tudjuk leolvasni pontosan, de azt látjuk, hogy az a $8 \ldots 14$ mV tartományban van.

a) Mekkora az amplitúdó várható értéke?

b) A varianciát átlagolással csökkenthetjük. Rajzoljuk le a mérési összeállítást, amellyel ez megtehető!

c) Hány regisztrátumot kell átlagolni ahhoz, hogy a bizonytalansági intervallum hossza 1 mV-ra csökkenjen?

d) Adjuk meg az átlagolt mérési eredményre vonatkozó 95%-os konfidencia-intervallumot!

9.36. Különféle rendszerek méréséhez gyakran használnak ún. multiszinuszos jeleket. Ekkor több, különböző frekvenciájú és ismert teljesítményű szinuszjelet adnak össze. Mekkora annak a multiszinusznak az effektív értéke és csúcstényezője, amelyet $N = 6$, f_0, $2f_0$, $3f_0, \ldots, Nf_0$ frekvenciájú, $U = 3$ V effektív értékű és azonos kezdőfázisú koszinuszjelből állítottuk össze?

9.37. Mekkora minimális mintavételi frekvenciával lehet mintavételezni az $x(t) = \mathrm{rect}(t/T)$ jelet, ha a spektrumban az 1% alatti összetevőket elhanyagoljuk?

9.38. Mekkora lehet a mintavételi frekvencia egy olyan átlapolásgátló szűrő esetén, amelynek törésponti frekvenciája 1 kHz, a meredeksége 60 dB/dekád és 60 dB-es dinamikát szeretnénk elérni?

9.39. Egy aszinkron motor fordulatszáma ideális esetben $n = 3000$ 1/min. Az aszinkron motorral egy ventilátort működtetünk, működés közben a várható fordulatszám az ideálisnak kb. 90%-a. Szeretnénk a fordulatszámot pontosan mérni, ezért mérjük a motor keltette mechanikus rezgést, és ezt mint jelet regisztráljuk $f_s = 8$ kHz mintavételi frekvenciával. A regisztrátumot DFT-vel analizáljuk. Azt tapasztaljuk, hogy a spektrumban mindig az $m = 7$. felharmonikus domináns, ezért a másodpercenkénti fordulatszámot úgy becsüljük, hogy a legnagyobb komponens fordulatszámát osztjuk m-mel. Hány pontos DFT-t végezzünk, ha a fordulatszámot 1% hibával szeretnénk mérni?

9.40. Szeretnénk megmérni egy hegedű E_5 húrjának frekvenciáját. Ebből a célból a húrt úgy vonjuk, hogy a mérés idején a húr hangja nem változik. A hangot mikrofonnal mérjük, és a jelet számítógép hangkártyájával mintavételezzük, $f_s = 44.1$ kHz mintavételi frekvenciával. A mintavételezett adatokon DFT-t hajtunk végre, és az alapharmonikus frekvenciája adja a kérdéses frekvenciát. Mekkorára válasszuk a DFT N pontszámát, hogy a mérés során elkövetett hiba legfeljebb 1% legyen? Ügyeljünk arra, hogy N 2 egész hatványa legyen!

9.41. Egy .wav file hegedű digitalizált hangfelvételét tartalmazza. A regisztrátum néhány, önmagában gyakorlatilag stacionárius szakaszból áll. A mintavételi frekvencia $f_s = 44.1$ kHz. A hegedűhang 7. harmonikusa (frekvenciája az alapharmonikus frekvenciájának 7-szerese) még jól mérhető. Hány pontos FFT-t kell végeznünk a regisztrátum kiválasztott darabjára, hogy az $f_a = 220$ Hz frekvenciájú A hangot meg tudjuk különböztetni a mellette lévő félhangtól? A transzformáció során ablakfüggvényt nem alkalmazunk. Ügyeljünk arra, hogy az FFT pontszáma 2 egész hatványa legyen!

9.42. DFT-analizátor bemenetére szinuszgenerátor jelét kapcsoljuk. Ha a generátor jelének frekvenciája 1000 Hz, a képernyőn csak egy vonalat látunk. Ha a jel frekvenciáját lassan növeljük, egyre jelentősebb spektrumszivárgást tapasztalunk, majd a frekvenciát tovább növelve a szivárgás csökken, és 1025 Hz frekvencia esetén a szivárgás megszűnik, a képernyőn ismét csak egy vonalat látunk. Hány pontos DFT-t végez az analizátor, ha a mintavételi frekvencia 50 kHz?

9.43. Rendetlen és kapkodó vagyok. Egy mintasorozatot kell Hanning-ablakkal súlyozva diszkrét Fourier-transzformálnom. A transzformációt már elvégeztem, de elfelejtettem előtte az ablakfüggvénnyel szorozni. Hogyan hozhatom helyre a hibát?

9.44. Terveztem egy nagyon jó ablakfüggvényt a DFT hibáinak javítására. Hogyan kell normálni az ablakfüggvény együtthatóit, ha azt akarjuk, hogy periodikus jelek mérésekor az ablakfüggvény alkalmazása nélkül is hibátlanul mérhető komponensek amplitúdója ne változzon?

9.45. Egy DFT analizátor felbontása Δf. A felbontást kétszeresére növeljük (Δf-et felére csökkentjük), változatlan sávszélesség mellett. Hogyan változik meg a mérési idő, ha a mérés során

a) az adatgyűjtés ideje meghatározó;

b) a számítás ideje meghatározó;

c) a számításra az FFT (Fast Fourier Transform, gyors Fourier-transzformáció) algoritmust alkalmazzuk?

10. Jelfeldolgozás II.

10.1. Bevezető feladatok

10.1. Lehetnek-e az alábbi függvények autokorrelációs függvények?

a) $R(\tau) = A^2 \sin(2\pi f\tau) + \mu^2$;

b) $R(\tau) = A\,\mathrm{rect}(\tau/T)$;

c) $R(\tau) = -A\cos(2\pi f\tau)$.

10.2. Lehet-e auto-, illetve keresztkorreláció eredménye az

$$R(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{4}}$$

függvény?

10.3. $x(t) = A\cos(2\pi ft + \varphi)$, ahol φ $[0, 2\pi]$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $x(t)$ várható értékét, autokorrelációs függvényét és varianciáját!

10.4. Mi az autokorrelációs függvénye egy σ^2 varianciájú B sávszélességű fehérzajnak?

10.5. Mekkora a teljesítménye annak a jelnek, amelynek autokorrelációs függvénye $R(\tau) = A^2\cos(2\pi f\tau)$?

10.6. Stacioner-e az $x(t) = A\sin(2\pi ft + \varphi)$ folyamat, ha A nulla várható értékű, 1 V szórású Gauss-eloszlású valószínűségi változó?

10.7. Ergodikus-e az $x(\xi, t) = \xi$ sztochasrtikus folyamat, ahol ξ Gauss-eloszlású valószínűségi változó?

10.8. Ergodikus-e az $x(t) = A\sin(2\pi ft)$ jel, ha A:

a) egységnyi szórású, Gauss-eloszlású valószínűségi változó;

b) +3 és −5 értéket 50–50% valószínűséggel felvevő valószínűségi változó;

c) $[0, 5]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó?

10.2. Gyakorló feladatok

10.9. Mekkora a szórása, várható értéke, sávszélessége annak a jelnek, amelynek autokorrelációs függvénye $R(\tau) = A\,\mathrm{sinc}(\tau/T)$, ahol $A = 100\ \mathrm{V}^2$, $T = 1$ ms ?

10.10. Egy jel autokorrelációs függvénye $R(\tau) = [9 + 4\cos(2\pi f\tau)]\ \mathrm{V}^2$, ahol $f = 1$ kHz. Mekkora az eredeti jel amplitúdója, periódusideje, kezdőfázisa és varianciája?

10.11. Mi a várható értéke, teljesítménye és teljesítménysűrűség-spektruma annak jelnek, amelynek autokorrelációs függvénye:

$$R(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{T}}?$$

10.12. Adjuk meg annak a zajnak a varianciáját, amelynek autokorrelációs függvénye:

a)

$$R(\tau) = \frac{|\tau| + 3}{|\tau| + 1};$$

b)

$$R(\tau) = \frac{0.5|\tau| + 2}{|\tau| + 1}!$$

10.13. Adjuk meg annak a zajnak a varianciáját, amelynek teljesítménysűrűség-spektruma:

$$S(\omega) = e^{-|\omega|T}!$$

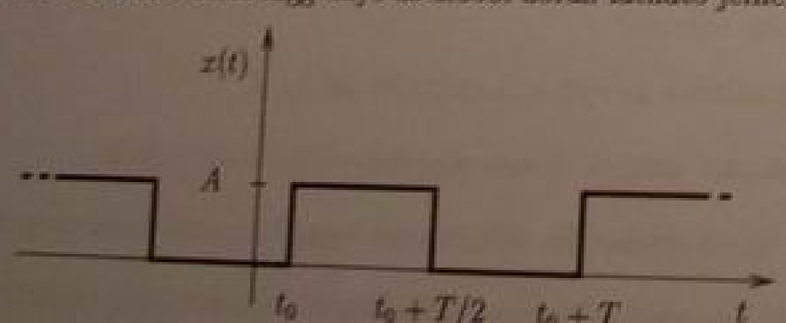
10.14. Mekkora annak a zajnak az effektív értéke, amelynek autokorrelációs függvénye:

$$R(\tau) = Ce^{-\frac{|\tau|}{T}} + M,$$

ahol $C = 1\ \mathrm{A}^2$, $M = 3\ \mathrm{A}^2$?

10.15. Mi az autokorrelációs függvénye annak a jelnek, amelynek teljesítménysűrűség-spektruma $S(f) = S_0\,\mathrm{rect}(f/2B)$?

10.16. Mi az autokorrelációs függvénye az alábbi ábrán látható jelnek?



Az ábrán látható t_0 egyenletes eloszlású a $[0, T]$ intervallum felett (ebből következően a folyamat ergodikus).

10.17. Mekkora annak a zajnak az effektív értéke, amelynek teljesítménysűrűség-spektruma:

$$S(f) = S_0 e^{-2\pi|f|RC},$$

ahol $S_0 = 6.28\cdot 10^{-6}\ \mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}$, $R = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 1$ nF ?

10.18. Ergodikus-e az $x(t) = A\sin(2\pi ft) + \mu$ jel, ha A egységnyi szórású, Gauss-eloszlású valószínűségi változó?

10.19. Ergodikus-e az $x(t) = A\sin(2\pi ft + \varphi)$ jel, ha φ a $[0, \pi]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó?

10.20. Egy szinuszos jelet mérünk, amelynek amplitúdója 1 V, frekvenciája 100 Hz. A jelet sávkorlátozott fehérzaj zavarja, amelynek teljesítménysűrűség-spektruma $S(f) = 10^{-12}\cdot\mathrm{rect}(f/2B)\ \mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}$, sávkorlátja $B = 500$ kHz. Mekkora a jel-zaj viszony?

10.3. Összetett feladatok

10.21. Egy σ szórású zajjal szeretnénk modulálni egy szinuszos jel amplitúdóját. Mekkora legyen a szinuszjel amplitúdója, hogy a modulált jel szórása is σ maradjon?

10.22. A Hilbert-transzformátor olyan lineáris szűrő, amelynek átviteli karakterisztikája az alábbi:

$$H(f) = -j\,\mathrm{sign}(f).$$

Mutassuk meg, hogy tetszőleges stacionárius bemeneti zaj esetén a bemenet és a kimenet keresztkorrelációja nulla a $\tau = 0$ helyen!

10.23. Adott egy digitális multiméter, amelyben változtatható integrálási idejű dual-slope AD-átalakító van. Az analóg elektronika ekvivalens zajsávszélessége 10 kHz, a műszer méréshatára 1 V. A műszerrel mérünk egy zajos DC jelet. A zaj 1 MHz-ig fehérnek tekinthető, nagysága $10\ \mu\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, eloszlása nulla várható értékű Gauss. Mekkora integrálási időt válasszunk ahhoz, hogy a multiméter 95%-os valószínűséggel 5 tizedesjegyre pontos eredményt mutasson?

10.24. Gauss-eloszlású sávkorlátozott fehérzajt hozunk létre a következő módon: egyenletes eloszlású zajt generálunk a $[-1, 1]$ tartományban, majd ezt egy, a megkívánt sávszélességű FIR szűrőn áteresztjük. Mekkora lesz a szűrő kimenetén a zaj szórása és csúcstényezője (az elérhető maximális értéknek és az effektív értéknek a hányadosa), ha a szűrő impulzusválasza $h(n)$?

10.25. Terveztünk egy nagyon jó $w(n)$ ablakfüggvényt a DFT hibáinak javítására. Hogyan kell normálni az ablakfüggvény együtthatóit, ha azt akarjuk, hogy sztochasztikus (ergodikus) jelek mérésekor a kijelzett spektrum „szintje" ne változzon? Vessük össze a megoldást a **9.44.** feladat megoldásával!

II. rész

Megoldások

1. Alapismeretek

1.1. Bevezető feladatok

1.1. A megtett út a sebesség-időfüggvény ($v(t)$) idő szerinti integrálja:

$$s = \int_0^T k\ f(t)dt,$$

ahol k együttható, amely a dimenziókat és a léptékeket hangolja össze. Ha elfogadjuk, hogy $f(t)$ félkör, akkor írhatjuk, hogy:

$$f\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2}.$$

A grafikon szerint viszont:

$$k\ f\left(\frac{T}{2}\right) = v_{max},$$

tehát:

$$k = \frac{2v_{max}}{T}.$$

Mivel $f(t)$ félkör, a megtett út kifejezése:

$$s = \frac{k}{2}\frac{T^2}{4}\pi = \frac{v_{max}T\pi}{4} = 261.8\ \text{m}.$$

1.2. A kifejezéseket ergodikus jelekre írjuk fel, de a mértékegységek általánosan érvényesek. Az integrálás dimenzió szempontjából az integrálási változóval való szorzásnak felel meg.

a)

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \Rightarrow [P] = 1\ \text{V}^2;$$

b)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \Rightarrow [X(f)] = 1\ \text{Vs} = 1\ \text{V/Hz};$$

c)

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \Rightarrow [R(\tau)]=1\ \mathrm{V}^2;$$

d)

$$S(f)=\mathcal{F}\{R(\tau)\} \Rightarrow [S(f)]=1\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}=1\ \mathrm{V}^2/\mathrm{Hz};$$

e)

$$E(f)=|X(f)|^2 \Rightarrow [E(f)]=1\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}^2=1\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}/\mathrm{Hz};$$

f)

$$X_{eff}=\sqrt{P} \Rightarrow [X_{eff}]=1\ \mathrm{V};$$

g)

$$X_{RMS}=\sqrt{P} \Rightarrow [X_{RMS}]=1\ \mathrm{V};$$

h)

$$\sigma^2=E\{(x-\mu)^2\}=E\{x^2\}-\mu^2=P-\mu^2 \Rightarrow [\sigma^2]=1\ \mathrm{V}^2;$$

i)

$$\Psi=E\{x^2\}=P \Rightarrow [\Psi]=1\ \mathrm{V}^2;$$

j)

$$\mu=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \Rightarrow [\mu]=1\ \mathrm{V};$$

k) a (h) alfeladat alapján:

$$[\sigma]=1\ \mathrm{V}.$$

1.3. Mivel:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

a mértékegységekre:

$$[y]=[h][x][t].$$

A súlyfüggvény mértékegysége tehát:

$$[h]=\frac{[y]}{[x][t]}=1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{As}}=1\ \Omega\mathrm{Hz}=1\ \frac{\Omega}{\mathrm{s}}.$$

1.4. A Fourier-transzformált és a mértékegységek:

$$Y(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{-j2\pi\nu x}dx,\quad [y]=[x]=1\ \mathrm{m},\ [\nu]=1\ \frac{1}{\mathrm{m}}.$$

Ezért:

$$[Y(\nu)]=[y][x]=1\ \mathrm{m}^2.$$

1.5. A trigonometrikus kifejezés komplex alakban a következő:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(2\pi f t+\varphi)=\frac{A}{2}\left(e^{j(2\pi f t+\varphi)}+e^{-j(2\pi f t+\varphi)}\right)= \\ &= \frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f t}+\frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j2\pi f t}. \end{aligned}$$

A komplex Fourier-sor általános alakja:

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi f n t}.$$

A fentieket összevetve:

$$C_n=\begin{cases} A/2\,e^{j\varphi}, & \text{ha } n=1 \\ A/2\,e^{-j\varphi}, & \text{ha } n=-1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

1.6. Az 1.5. feladat megoldását felhasználva (itt $\varphi=0$):

$$x(t)=\frac{A_1}{2}e^{j2\pi f_1 t}+\frac{A_2}{2}e^{j2\pi f_2 t}+\frac{A_1}{2}e^{-j2\pi f_1 t}+\frac{A_2}{2}e^{-j2\pi f_2 t}.$$

A komplex Fourier-sor együtthatói:

$$C_n=\begin{cases} A_1/2, & \text{ha } n=2,-2 \\ A_2/2, & \text{ha } n=3,-3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Az alapharmonikus frekvenciája $f_a=f_0/2$, periódusideje $T_a=2/f_0$.

1.7.

a)

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T e^{-j2\pi f t}dt=\frac{1}{T}\left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_0^T= \\ &= e^{-j\pi f T}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}=e^{-j\pi f T}\mathrm{sinc}(fT). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f t}dt=\frac{1}{T}\int_0^{\infty} e^{-t/T}e^{-j2\pi f t}dt= \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-(j2\pi f+1/T)t}}{-(j2\pi f+1/T)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{1+j2\pi f T} \end{aligned}$$

1.2. Gyakorló feladatok

1.8. A teljesítménysűrűség-spektrum az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja. Az 1.3. és az 1.4. feladat mintáját követve:

$$[S_T] = 1\ \mathrm{K^2 m},$$

ahol S_T a kérdéses spektrum.

1.9. Az átviteli karakterisztika a súlyfüggvény Fourier-transzformáltja. Az 1.3. és az 1.4. feladat mintáját követve:

$$[H(f)] = 1\ \mathrm{V},$$

ahol $H(f)$ a kérdéses átviteli karakterisztika.

1.10.

a) Az átviteli karakterisztika az 1.7.a feladatban adott. Ebbe behelyettesítve:

$$H(f=0) = 1.$$

b)

$$H(f=0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/T} e^{-j0} dt = 2AT.$$

1.11. A kérdéses művelet egy ideális aluláteresztő szűrővel való szűrés. Ennek súlyfüggvénye:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_0}^{f_0} e^{j2\pi f t} df = 2f_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} = \\ &= 2f_0 \mathrm{sinc}(2f_0 t). \end{aligned}$$

A művelet a fenti $h(t)$ súlyfüggvénnyel való konvolúció.

1.12.

$$X(f) = AT\mathrm{sinc}(fT).$$

1.13. Először oldjuk meg a feladatot általánosan! Legyen a transzformálandó jel $x(u)$, Fourier-transzformáltja $y(v)$, azaz:

$$y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi u v} du,$$

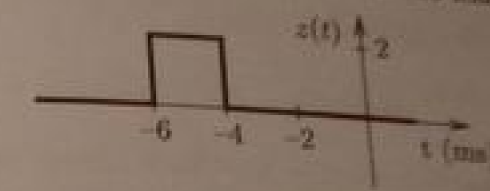
$y(v)$ Fourier-transzformáltja pedig $z(p)$, azaz:

$$z(p) = \int_{-\infty}^{\infty} y(v) e^{-j2\pi p v} dv.$$

Válasszunk $p = -u$-t:

$$z(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} y(v) e^{j2\pi u v} dv = x(u),$$

mivel ez az integrál egyben $y(v)$ inverz Fourier-transzformáltja is. Tehát, ha egy jelet kétszer egymás után Fourier-transzformálunk, akkor az időtengely „megfordul". A megadott jel esetében az eredmény a következő lesz:



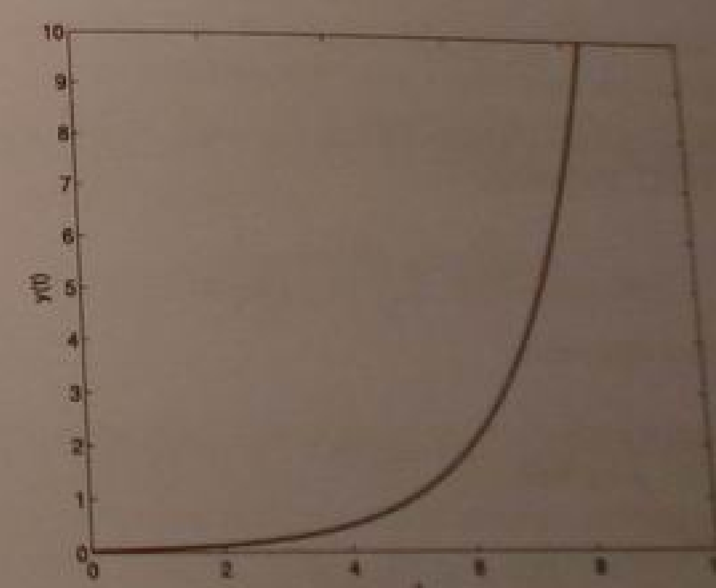
1.14. A Fourier-, illetve az inverz Fourier-transzformáció szimmetriáját, továbbá az 1.12. feladat megoldását felhasználva:

$$H(f) = T\mathrm{rect}(fT) \begin{cases} T, & \text{ha } |f| \le 1/2T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

azaz:

$$H(1/T) = 0, \quad H(1/4T) = T.$$

1.15.



Bár a feladat csak közvetett kapcsolatban van a méréstechnikával, illetve a jel-feldolgozással (egyszerű koordináta-transzformáció), hasonló eszközök gyakran szerepelnek jelfeldolgozási feladatokban.

1.16. $z(t)$ akkor és csak akkor periodikus, ha ha létezik olyan alapharmonikus frekvencia, amelynek mind $x(t)$, mind $y(t)$ harmonikus frekvenciái a többszörösei, tehát, ha létezik $1/T_x$-nek és $1/T_y$-nak közös osztója, avagy T_x-nek és T_y-nak közös többszöröse. Ez akkor teljesül, ha T_x/T_y racionális. A Fourier-transzformáció linearitása miatt $z(t)$ spektruma tartalmazza $x(t)$és $y(t)$ harmonikusait, és csak azokat tartalmazza.

1.17. A trigonometrikus kifejezést átalakítva:

$$x(t) = \frac{A_1 A_2}{2}\{\cos[2\pi(f_2 - f_1)t] - \cos[2\pi(f_2 + f_1)t]\},$$

tehát a két harmonikus frekvenciája $f_I = 0.6f_1$, illetve $f_{II} = 2.6f_1$. Az 1.16. feladat megoldását felhasználva az alapharmonikus frekvenciája $f_0 = 0.2f_1$.

1.3. Összetett feladatok

1.18. A kimenőjel általánosan a bemenőjel és a súlyfüggvény konvolúciója $t = -0$-ban energiamentes hálózatra. A konvolúciós integrál kiszámítása azonban elkerülhető, ha észrevesszük, hogy a bemenőjel szinuszos, így a lineáris hálózat kimenőjele is szinuszos lesz, frekvenciája a bemenőjel frekvenciája, amplitúdója és fázisa pedig a hálózat átviteli karakterisztikájának megfelelően módosul. A rendszer átvitele az 1.7.b feladat alapján:

$$H(f) = e^{-j2\pi f T_0}\frac{1}{1 + j2\pi f T},$$

ahol az exponenciális tag a késleltetés miatt szerepel. Ennek a rendszernek az átvitele az $f = 1/T$ frekvencián:

$$H(1/T) = e^{-j2\pi T_0/T}\frac{1}{1 + j2\pi}.$$

Az amplitúdó és a fázis tehát:

$$A = |H(1/T)| = \sqrt{\frac{1}{1 + 4\pi^2}}, \quad \varphi = \arg(H(1/T)) = -2\pi T_0/T - \arctan(2\pi).$$

A kimenőjel tehát:

$$y(t) = A\sin(2\pi t/T + \varphi).$$

1.19. Az előző feladat mintájára ez is megoldható. Egyszerűbb megoldáshoz jutunk azonban, ha észrevesszük, hogy $h(t)$ $t = 0$-ra szimmetrikus valós függvény. Ebből az következik, hogy a rendszer lineáris fázismenetű, nulla késleltetéssel, tehát fázisa azonosan nulla. Ennek alapján a bemenőjelet $\Delta\varphi = 0$-val tolja el.

(További tulajdonság, hogy a rendszer akauzális, de ebben a feladatban ennek nincs jelentősége.)

1.20. Az eredő súlyfüggvény a két súlyfüggvény konvolúciója:

$$h_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^T h(t-\tau)d\tau,$$

ahol $h(t-\tau)$ helyzete koordinátatranszformációval adódik:

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t - T < \tau \le t \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az integrált szakaszonként kiértékelve:

$$h_e(t) = \begin{cases} t, & \text{ha } 0 < t \le T \\ 2T - t, & \text{ha } T < t \le 2T \\ 0, & \text{ha } t \le 0 \text{ vagy } t > 2T \end{cases}$$

Tehát az eredő súlyfüggvény egy $2T$ szélességű és T magasságú háromszögjel.

1.21. A háromszögjelben csak páratlan felharmonikusok vannak, ezek amplitúdója $1/n^2$ szerint csökken. (n a Fourier-sorfejtés indexe.) A Parseval-tétel alapján:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |x|^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2.$$

Ha az alapharmonikus 1 V effektív értékű $(\sqrt{C_1^2 + C_{-1}^2})$, akkor a következő harmonikus 1/9 V effektív értékű. Mivel a teljesítmény kiszámításához négyzetösszegzést kell alkalmazni, és 0.1% pontosan kell számolni, a következő (1/25 V effektív értékű) harmonikust is figyelembe kell venni, a továbbiakat elhanyagolhatjuk. Így a keresett teljesítmény:

$$P = 1 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{25}\right)^2 \text{ V}^2 = 1.014 \text{ V}^2.$$

1.22. A maximumfüggvény miatt a rendszer nemlineáris, hiszen könnyű találni olyan x_1 és x_2 jelet, hogy $y_1 + y_2 \ne f(x_1 + x_2)$, ahol $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ és $f(x)$ a példában megadott függvény. Ebből adódóan súlyfüggvénye nem létezik. A rendszer viszont kauzális, mert a kimenet kiszámításához csak a bemenőjel jelenlegi és korábbi mintáit használja fel.

1.23. Mivel mindhárom átviteli karakterisztika valós és páros függvény, továbbá egy valós páros függvény Fourier-(és invera Fourier-) transzformáltja is valós páros függvény, így a súlyfüggvények nem belépő függvények, tehát nem kauzális rendszereket írnak le.

1.24. A rendszer tranziens válasza a sajátértékek hatványfüggvényeinek összege, ahol az egyes hatványfüggvények együtthatói a rendszer állapotváltozóinak kezdeti értékeitől függenek. Ebből az összegből viszont elegendően sok lépés után – az együtthatóktól függetlenül – dominánssá válik a legnagyobb sajátértékhez tartozó tag. Másfelől, tetszőleges kezdeti értéket tekintve, legrosszabb esetben az összes sajátértékhez tartozó együttható zérus, kivéve a legnagyobbhoz tartozót. A tranziens lecsengésének a legnagyobb sajátértékkel való becslése tehát (elegendően sok lépés után) majorálja az adott hiba eléréséhez szükséges lépésszámot. A feladatban megadott adatokkal:

$$0.99^K = 10^{-4},$$

ahol K a szükséges lépésszám. Ebből K kifejezhető:

$$K = \frac{-4}{\lg 0.99} \cong 916 \approx 1000.$$

Tehát legfeljebb 1000 lépés után a tranziens 0.01% alá csökken.

2. Hibaszámítás I.

2.1. Bevezető feladatok

2.1.

$$\begin{aligned} x_1 &= 100\ \text{cm} \pm 1\% = (100 \pm 1)\ \text{cm} = \hat{x}_1 \pm \Delta x_1 \to \hat{x}_1 = 100\ \text{cm},\ \Delta x_1 = 1\ \text{cm}, \\ x_2 &= 80\ \text{cm} \pm 1\% = (80 \pm 0.8)\ \text{cm} = \hat{x}_2 \pm \Delta x_2 \to \hat{x}_2 = 80\ \text{cm},\ \Delta x_2 = 0.8\ \text{cm}. \end{aligned}$$

A hosszúságmérés becslője:

$$\hat{y} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2 = 20\ \text{cm}.$$

A hibasáv a legkedvezőtlenebb eset feltételezésével:

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1.8\ \text{cm}.$$

A mérés eredménye:

$$y = (20 \pm 1.8)\ \text{cm} = 20(1 \pm 0.09)\ \text{cm} = 20\ \text{cm} \pm 9\%.$$

A keresett hibasáv:

$$\pm\Delta y = \pm 1.8\ \text{cm}.$$

2.2.

$$\begin{aligned} x &= 2000\ \text{m} \pm 5\% = (2000 \pm 10)\ \text{m} = \hat{x} \pm \Delta x \to \hat{x} = 2000\ \text{m},\ \Delta x = 10\ \text{m}, \\ t &= 2000\ \text{s} \pm 0.1\% = (2000 \pm 2)\ \text{s} = \hat{t} \pm \Delta t \to \hat{t} = 2000\ \text{s},\ \Delta t = 2\ \text{s}. \end{aligned}$$

A sebességmérés becslője:

$$\hat{v} = \frac{\hat{x}}{\hat{t}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A hibasáv a legkedvezőtlenebb eset feltételezésével:

$$\Delta v \cong \left|\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t\right| = \left|\frac{1}{\hat{t}}\Delta x\right| + \left|\frac{\hat{x}}{\hat{t}^2}\Delta t\right| = 6 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{1}$$

A mérés eredménye:

$$v = (1 \pm 6 \cdot 10^{-3})\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0.6\%.$$

A relatív hiba (1) átalakításával közvetlenül számítható:

$$\frac{\Delta v}{\hat{v}} \cong \frac{\Delta x}{\hat{x}} + \frac{\Delta t}{\hat{t}} = (0.5 + 0.1)\% = 0.6\%.$$

Megjegyzés. A továbbiakban az elsőfokú közelítésre utaló $\cong$ jel helyett egyenlőségjelet írunk. Ezen kívül elhagyjuk a becslőre vonatkozó $\hat{}$ (kalap) jelzést (pl. becslő helyett egyes esetekben a névleges érték kifejezés kedvezőbb), és csak azokban az esetekben használjuk, amikor a két érték megkülönböztethetetlensége zavaró lenne.

2.3. Az egyes ellenállások névleges értékei és hibái:

$$R_i = 1\ \mathrm{k}\Omega, \quad \Delta R_i = hR_i = 10\ \Omega,$$

ahol $h = \Delta R_i / R_i$, az egyes ellenállások relatív hibája, avagy tűrése. Az eredő ellenállás:

$$R_e = \sum_{i=1}^{100} R_i = 100 R_i = 100\ \mathrm{k}\Omega.$$

A megoldáshoz kétféleképpen juthatunk el: az abszolút és a relatív hibakomponensek összegzésével. Fontos, hogy a példa relatív hibát kérdez, tehát az első esetben is utolsó műveletként le kell osztani az eredő ellenállással.

I. Az eredő ellenállás megváltozása az i-edik ellenállás megváltozására:

$$\Delta R_e|_i = \frac{\partial R_e}{\partial R_i}\Delta R_i = \Delta R_i.$$

Az **(a)** esetben az eredő hiba:

$$\Delta R_e = \sum_{i=1}^{100} |\Delta R_e|_i = 100\Delta R_i, \quad \frac{\Delta R_e}{R_e} = \frac{100\Delta R_i}{100 R_i} = \frac{\Delta R_i}{R_i} = h = 1\%.$$

A **(b)** esetben az eredő hiba:

$$\Delta R_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} (\Delta R_e)_i^2} = \sqrt{100\Delta R_i^2} = 10\Delta R_i,$$

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \frac{10\Delta R_i}{100 R_i} = 0.1\frac{\Delta R_i}{R_i} = 0.1h = 0.1\%.$$

II. Az eredő ellenállás relatív megváltozása az i-edik ellenállás relatív megváltozására:

$$\left.\frac{\Delta R_e}{R_e}\right|_i = \frac{\partial R_e}{\partial R_i}\frac{R_i}{R_e}\frac{\Delta R_i}{R_i} = \frac{R_i}{R_e}h = \frac{1}{100}h.$$

Az **(a)** esetben az eredő hiba:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \sum_{i=1}^{100} \left|\frac{\Delta R_e}{R_e}\right|_i = h = 1\%.$$

A **(b)** esetben az eredő hiba:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{\Delta R_e}{R_e}\right)_i^2} = \sqrt{100 \cdot 10^{-4} h^2} = 0.1h = 0.1\%.$$

Jól látható, hogy a két úton ugyanazokra a megoldásokra jutottunk.

2.4. A mért tömeg:

$$m = \sqrt{m_1 m_2} = 15.98\ \mathrm{g}.$$

A mért tömeg tehát nem a két mérési eredmény számtani közepe (ami 16 g), hanem mértani közepe. Az érzékenységek:

$$\frac{\partial m}{\partial m_1} = \frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2}} m_2, \quad \frac{\partial m}{\partial m_2} = \frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2}} m_1.$$

Az egyes tömegmérések hozzájárulása az eredő hibához:

$$\left.\frac{\Delta m}{m}\right|_{m_1} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m_1}{m_1}, \quad \left.\frac{\Delta m}{m}\right|_{m_2} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m_2}{m_2}.$$

Legkedvezőtlenebb esetben:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{\Delta m_2}{m_2}\right) \cong \frac{0.01\ \mathrm{g}}{16\ \mathrm{g}} = 6.25 \cdot 10^{-4} = 0.0625\%.$$

2.5. Az RC-tag átviteli függvénye:

$$W(s) = \frac{R}{R + 1/sC} = \frac{sRC}{1 + sRC}.$$

s helyébe $j\omega$-t helyettesítve, az átvitel abszolút értéke:

$$|W(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Felhasználva, hogy $\omega = 2\pi f$, továbbá, hogy $RC = 1/2\pi f_c$, ahol f_c a törésponti frekvencia, kapjuk, hogy:

$$|W(j\omega)| = \frac{f/f_c}{\sqrt{1 + f^2/f_c^2}}.$$

Ez a mért érték, a helyes érték 1. A relatív hiba:

$$h = \frac{|W(j\omega)| - 1}{1} = |W(j\omega)| - 1 = -8 \cdot 10^{-4} = -0.08\%.$$

Tehát a rendszeres hiba negatív.

2.6.

a) Az osztásarány:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{50} = 0.02.$$

b) A hibaszámítást a fenti kifejezésének deriválásával végezhetjük el. Mivel worst case összegzést alkalmazunk, az előjeleket elhagyjuk, és a hibakomponenseket összegezzük. Mindkét oldalon a relatív hibákra rendezve:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}\right) = 196 \text{ ppm}.$$

c) 1) A gyártó számára ez *véletlen* hiba. Az ellenállások tűrése azt jelenti, hogy az egy adott osztóban felhasznált ellenállások, bár ismert határokon belül, de véletlenszerűen tetszőleges értéket felvehetnek. Ez azt jelenti, hogy az osztásarány hibája is véletlenszerű lesz, határait a hibaösszegzéssel kaptuk.

2) A mi számunkra ez *rendszeres* hiba. A mi osztónk egy adott ellenálláskészlettel épült, átvitele megmérhető, és a névleges értéktől való eltérés korrigálható.

2.2. Gyakorló feladatok

2.7. Az eredő ellenállásra célszerű nem a „repluszos", hanem a klasszikus képletet alkalmazni:

$$R_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{R_i}}.$$

Így az érzékenységszámítás egyszerűen elvégezhető:

$$\frac{\partial R_e}{\partial R_i} = -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{R_i}\right)^2}\left(-\frac{1}{R_i^2}\right) = \frac{1}{R_i^2\left(\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{R_i}\right)^2}.$$

Az eredő ellenállás relatív megváltozása az i-edik ellenállás relatív megváltozására:

$$\left.\frac{\Delta R_e}{R_e}\right|_i = \frac{1}{R_i\left(\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{R_i}\right)}\frac{\Delta R_i}{R_i} = \frac{R_e}{R_i}\frac{\Delta R_i}{R_i} = \frac{1}{100}\frac{\Delta R_i}{R_i} = \frac{1}{100}h.$$

Az (a) esetben az eredő hiba:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \sum_{i=1}^{100}\left|\frac{\Delta R_e}{R_e}\right|_i = h = 1\%.$$

A (b) esetben az eredő hiba:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \sqrt{\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{\Delta R_e}{R_e}\right)_i^2} = \sqrt{100 \cdot 10^{-4} h^2} = 0.1h = 0.1\%.$$

2.8. A 2.3. feladat megoldását felhasználva:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = 0.018\%.$$

2.9. Az eredő ellenállás nemcsak az elemek tűrése miatt pontatlan, hanem azért is, mert a megadott névleges értékű ellenállások párhuzamos eredője

$$R_e = 900.09\ \Omega,$$

azaz a megvalósításnak

$$h_r = 0.01\%$$

rendszeres hibája van. A legrosszabb eset tehát az, ha a tűrésből származó véletlen hibák a rendszeres hibához hasonlóan pozitívak. A véletlen hibák a 2.7. feladat megoldása alapján:

$$h_v = 0.036\%.$$

A legkedvezőtlenebb esetben az eredő ellenállás hibája:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = h_r + h_v = 0.046\%.$$

2.10. Legyen t_1 és t_2 a két valódi időpont, és ezek hibái rendre Δt_1 és Δt_2. Az időpontok leolvasásakor elkövetett mérési hibák a következők:

$$\Delta t_1 = (-1, 0] \text{ min}, \quad \Delta t_2 = (-1, 0] \text{ min}.$$

A valódi időtartam és annak becslője:

$$T = t_2 - t_1, \quad \hat{T} = \hat{t}_2 - \hat{t}_1 = t_2 + \Delta t_2 - t_1 - \Delta t_1,$$

ahol $\hat{t}_1$ és $\hat{t}_2$ a leolvasott időpontok. Ezekből az abszolút hiba:

$$\Delta T = \hat{T} - T = \Delta t_2 - \Delta t_1.$$

A mérési eljárás minősítéséhez a legkedvezőtlenebb esetet kell tekintenünk, így a relatív hiba:

$$h_{\max} = \frac{\Delta T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{1 \text{ min}}{t_2 - t_1 - 1 \text{ min}} = \frac{1}{7} = 14.3\%$$

2.11. Jelöljük az $\mathbf{X}$ mátrix elemeit a következőképpen:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Ekkor az inverz mátrix:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}.$$

A deriválásokat elvégezve, rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} h_{1,4} &= \frac{h}{|\det \mathbf{X}|} \left(|x_1 x_4| + 3|x_2 x_3|\right), \\ h_{2,3} &= \frac{h}{|\det \mathbf{X}|} \left(|x_2 x_3| + 3|x_1 x_4|\right), \end{aligned}$$

ahol:

$$\begin{aligned} h_{1,4} &= \frac{\Delta y_1}{y_1} = \frac{\Delta y_4}{y_4}, \\ h_{2,3} &= \frac{\Delta y_2}{y_2} = \frac{\Delta y_3}{y_3}, \\ h &= \frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{\Delta x_3}{x_3} = \frac{\Delta x_4}{x_4}. \end{aligned}$$

a)

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -26.5 & 25.5 \\ 26 & -25 \end{bmatrix}, \quad h_{1,4} = 26.52\%, \quad h_{2,3} = 26.51\%;$$

b)

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 11.32 & -7.491 \\ 11.15 & 7.325 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad h_{1,4} = 100.2 \text{ ppm}, \quad h_{2,3} = 99.98 \text{ ppm}.$$

A **a)** feladatban adott mátrix közel szinguláris, ezért adódott igen nagy hiba az inverz mátrix elemeire. A **b)** feladatban adott mátrix inverzének pontossága nagyságrendileg megegyezik az eredeti mátrix pontosságával.

2.12. A felvett energia kifejezése:

$$W = UIt.$$

A hibakomponensek:

$$\frac{\Delta W_U}{W} = \frac{\Delta U}{U}, \quad \frac{\Delta W_I}{W} = \frac{\Delta I}{I}, \quad \frac{\Delta W_t}{W} = \frac{\Delta t}{t}.$$

A hiba a legrosszabb esetben:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t} = 0.21\%.$$

2.13. Az ellenállás kifejezése:

$$R = \frac{U}{I} = 1 \text{ k}\Omega.$$

A hibakomponensek:

$$\begin{aligned} \Delta R_U &= \frac{1}{I} \Delta U \to \sigma_{R,U} = \frac{1}{I} \sigma_U, \\ \Delta R_I &= \frac{U}{I^2} \Delta I \to \sigma_{R,I} = \frac{U}{I^2} \sigma_I. \end{aligned}$$

A mért ellenállás szórása:

$$\sigma_R = \sqrt{(\sigma_R)_U^2 + (\sigma_R)_I^2} \cong 14.1\ \Omega.$$

2.14. Írjuk át először a példában megadott bonyolult kifejezést:

$$Q = \frac{4}{15}\sqrt{2g}\,\frac{d}{l}\,h^{5/2} = c_1 \cdot d = c_2 \cdot \frac{1}{l} = c_3 \cdot h^{5/2},$$

ahol c_1, c_2, c_3 konstansnak rögzíthetők, a mellettük kiemelt szerinti vizsgálatához. Ekkor egyszerűen adódik, hogy:

$$\frac{\Delta Q_d}{Q} = \frac{\Delta d}{d}, \quad \frac{\Delta Q_l}{Q} = -\frac{\Delta l}{l}, \quad \frac{\Delta Q_h}{Q} = \frac{5}{2}\frac{\Delta h}{h}.$$

A hiba legvalószínűbb értékéhez az egyes komponenseket négyzetesen kell összegezni:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = 7.63\%.$$

2.15. Írjuk át ismét a példában megadott bonyolult kifejezést:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi}{4} D_0^2 D^2 \sqrt{\frac{2gy}{D_0^4 - D^4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} D^2 \sqrt{2gy} \sqrt{\frac{D_0^4}{D_0^4 - D^4}} = c_1 \sqrt{\frac{D_0^4}{D_0^4 - D^4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} D_0^2 \sqrt{2gy} \sqrt{\frac{D^4}{D_0^4 - D^4}} = c_2 \sqrt{\frac{D^4}{D_0^4 - D^4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} D_0^2 D^2 \sqrt{\frac{2g}{D_0^4 - D^4}} \sqrt{y} = c_3 \sqrt{y}, \end{aligned}$$

ahol c_1, c_2, c_3 konstansnak rögzíthetők, a mellettük kiemelt kifejezés vizsgálatához, rendre a D_0, D, y szerinti deriválásokhoz. A deriválásokat elvégezve, és a relatív hibákat képezve adódik, hogy:

$$\frac{\Delta Q_{D_0}}{Q} = -\frac{2D^4}{D_0^4 - D^4}\frac{\Delta D_0}{D_0}, \quad \frac{\Delta Q_D}{Q} = \frac{2D_0^4}{D_0^4 - D^4}\frac{\Delta D}{D}, \quad \frac{\Delta Q_y}{Q} = \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}$$

A hiba legvalószínűbb értékéhez az egyes komponenseket négyzetesen kell összegezni:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta Q_{D_0}}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Q_D}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Q_y}{Q}\right)^2} = 10.68\%.$$

2.16.

a) A viszkozitás:

$$\eta = 0.7613 \text{ Pa s} = 0.7613 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\text{s} = 0.7613 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}.$$

b) A hibaszámításhoz írjuk fel a viszkozitás kifejezését másképpen, a 2.10., 2.11. példákhoz hasonlóan:

$$\eta = \frac{M}{4\pi L\omega}\left[\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_k^2}\right] = k_1 M = k_2\frac{1}{L} = k_3\frac{1}{\omega} = k_4\left[\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_k^2}\right].$$

Az egyes változók szerinti deriváláshoz ugyanis a többi konstansnak tekinthető. Így rögtön adódik, hogy:

$$\frac{\Delta\eta_M}{\eta} = \frac{\Delta M}{M}, \quad \frac{\Delta\eta_L}{\eta} = -\frac{\Delta L}{L}, \quad \frac{\Delta\eta_\omega}{\eta} = -\frac{\Delta\omega}{\omega}.$$

A hengerek sugara szerinti deriválás és rendezés után:

$$\frac{\Delta\eta_{r_b}}{\eta} = \frac{-2}{1-\frac{r_b^2}{r_k^2}}\frac{\Delta r_b}{r_b} = c_b\frac{\Delta r_b}{r_b},$$

$$\frac{\Delta\eta_{r_k}}{\eta} = \frac{-2}{1-\frac{r_k^2}{r_b^2}}\frac{\Delta r_k}{r_k} = c_k\frac{\Delta r_k}{r_k}.$$

Figyeljük meg, hogy $|c_b| \approx |c_k|$.
A valószínűségi összegzéshez az egyes hibakomponenseket négyzetesen kell összegezni:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 + c_k^2\left(\frac{\Delta r_k}{r_k}\right)^2 + c_b^2\left(\frac{\Delta r_b}{r_b}\right)^2} =$$

$$= 23.99\%.$$

2.3. Összetett feladatok

2.17. A sebességmérő a sebességet a

$$v = \frac{s}{t}$$

képlet alapján becsli, ennek megfelelően a hibakomponensek:

$$\frac{\Delta v_s}{v} = \frac{\Delta s}{s}, \quad \frac{\Delta v_t}{v} = -\frac{\Delta t}{t}.$$

A feladat nem adja meg számszerűen az egyes mérési hibákat. s hibájának becslésénél abból indulhatunk ki, hogy a kerékfordulat ($s = d\pi \approx 220$ cm) mérésénél kb. 1 cm-es hibát követhetünk el, így s relatív hibája 0.5%-ra tehető. t hibája pontosabban becsülhető: mivel egy nap 86400 s-ból áll, az időmérés relatív hibája 10 ppm.

a) Mivel az időmérés hibája elhanyagolható az útmérés hibája mellett, írható, hogy:

$$\frac{\Delta v}{v} \approx 0.5\%.$$

b) A hiba nagyságrendileg nem változna, feltehetően kissé nagyobb lenne. A kerékátmérő ugyan pontosabban mérhető, mint a megtett út, de számolni kell a gumi belapulásával is. Így továbbra is írható, hogy a mérés abszolút hibája kb. 1 cm, azaz a relatív hiba (70 cm-es kerékátmérővel számolva) kb. 1%. Tehát:

$$\frac{\Delta v}{v} \approx 1\%.$$

2.18. A példában megadott képletek felhasználásával:

$$d = 2\pi R f \varepsilon A. \qquad (2)$$

a) Ebből a hiba deriválás, rendezés után és worst case összegzéssel:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta R}{R} = 2\%.$$

b) A párhuzamosan kapcsolódó C_p kapacitás hozzáadódik a méréshez felhasznált kondenzátoréhoz. Ez a kapacitás rendszeres hibát okoz, de mivel értéke ismert, korrigálni lehet vele. Így a (2) képlet a következőképpen módosul:

$$d = \frac{2\pi R f \varepsilon A}{1 - C_p 2\pi R f}. \qquad (3)$$

Mivel a függvény megváltozott, a frekvenciamérés hibájának, illetve a[illegible] ellenállás bizonytalanságának hatását újra kell számolni. Tekintsük előszö[illegible] a frekvenciamérés hibájának hatását! Deriválás és rendezés után:

$$\frac{\Delta d_f}{d} = \frac{1}{1 - C_p 2\pi R f}\frac{\Delta f}{f}.$$

A fenti kifejezés alkalmas arra, hogy a hiba számszerű értékét kiszámít[illegible] Egy ilyen vagy ehhez hasonló kifejezés alapján azonban egy mérési [illegible] rás érzékenysége is értékelhető az egyes mért mennyiségek, illetve a [illegible] résben szereplő egyéb paraméterek bizonytalansága szempontjából. [illegible] szemmel, ha ezekben a kifejezésekben egy olyan, a mérendő mennyiségtől függő változó szerepel, amely sem mint mérési eredmény, sem mint mérendő mennyiség nem jelenik meg. Jelen esetben a frekvencia egy ilyen közbülső mennyiség. Fejezzük ki ezért f-et a (3) egyenletből, amivel a hiba kifejezése:

$$\frac{\Delta d_f}{d} = \frac{\varepsilon A + C_p d}{\varepsilon A}\frac{\Delta f}{f} = \frac{C + C_p}{C}\frac{\Delta f}{f},$$

ahol C jelöli a d méréskor előálló kapacitást. Figyeljük meg, hogy kis C (nagy d) esetén a hiba nagyon nagy. Mivel R a (3) kifejezésben f-fel megegyező helyzetben van, ezért $\Delta R/R$ is ugyanazzal a kifejezéssel szorzandó, így a teljes hiba worst case összegzéssel:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\varepsilon A + C_p d}{\varepsilon A}\left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta R}{R}\right] = 4.03\%.$$

2.19. A tartályban elhelyezett lemezekkel kialakított kondenzátor két kondenzátor párhuzamos kapcsolásával áll elő, tehát (a példa jelöléseit alkalmazva):

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{Ah}{d\,l} + \varepsilon_0\frac{A}{d}\frac{l-h}{l} = \frac{C_0}{l}[l + (\varepsilon_r - 1)h], \tag{4}$$

ahol $C_0 = \varepsilon_0 A/d$. A mért frekvencia:

$$f = \frac{1}{2\pi R\frac{C_0}{l}[l + (\varepsilon_r - 1)h]}. \tag{5}$$

Ebből a kérdéses h szint:

$$h = \frac{1 - 2\pi fRC_0}{(\varepsilon_r - 1)2\pi fR\frac{C_0}{l}} = \frac{1 - a}{(\varepsilon_r - 1)\frac{a}{l}}, \tag{6}$$

ahol $a = 2\pi fRC_0$. Az első kifejezés a mérési hiba R és f szerinti vizsgálatához, a második ε_r szerinti vizsgálatához illeszkedik.

a) A hibakomponensek deriválás és rendezés után:

$$\frac{\Delta h_{\varepsilon}}{h} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r},$$

$$\frac{\Delta h_f}{h} = -\frac{1}{1 - 2\pi fRC_0}\frac{\Delta f}{f},$$

$$\frac{\Delta h_R}{h} = -\frac{1}{1 - 2\pi fRC_0}\frac{\Delta R}{R}.$$

Az előző példa gondolatmenetét követve helyettesítsük be f helyébe az (5) kifejezést, amivel a hibakomponensek a következők lesznek:

$$\frac{\Delta h_f}{h} = -\frac{1 + (\varepsilon_r - 1)r}{(\varepsilon_r - 1)r}\frac{\Delta f}{f},$$

$$\frac{\Delta h_R}{h} = -\frac{1 + (\varepsilon_r - 1)r}{(\varepsilon_r - 1)r}\frac{\Delta R}{R},$$

ahol $r = h/l$, azaz a tartály telítettsége. Most már kifejezhető a szintmérés relatív hibája, worst case összegzéssel:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r} + \left[1 + \frac{1}{(\varepsilon_r - 1)r}\right]\left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta R}{R}\right].$$

Ez már elemezhető kifejezés. Látható a szemlélet alapján is nyilvánvaló összefüggés, hogy minél nagyobb relatív permittivitású anyag van a tartályban, annál kevésbé érzékeny a rendszer akár a permittivitás bizonytalanságára, akár f mérési hibájára, illetve R bizonytalanságára. De a hiba végtelenhez tart, ha véges bizonytalanságok mellett a tartály közel üres, hiszen ekkor a kapacitásváltozás is igen kicsiny. $h = l/2$ esetén:

$$\left.\frac{\Delta h}{h}\right|_{h=l/2} = 4.14\%.$$

b) A párhuzamosan kapcsolódó vezetékkapacitás okozta rendszeres hiba kiszámításához elegendő a (6) egyenletbe behelyettesíteni az Δf mért frekvenciát:

$$f = \frac{1}{2\pi R(C + C_p)},$$

ahol C a (4) egyenlettel adott kapacitás, C_p pedig a kondenzátorok kapacitása. Az eredő kapacitás, a $h = l/2$ feltételt is figyelembe véve:

$$C_e = C_0\frac{\varepsilon_r + 1}{2} + C_p.$$

Ezzel a mért szint:

$$h_m = l\left[\frac{1}{2} + \frac{C_p}{(\varepsilon_r - 1)C_0}\right].$$

A relatív rendszeres hiba tehát:

$$h_r = \frac{h_m - l/2}{l/2} = \frac{2C_p}{(\varepsilon_r - 1)C_0} = 12.90\%.$$

A rendszeres hiba pozitív.

2.20. Először fejezzük ki a sebességet:

$$v = c\frac{f_0 - f}{f_0 + f} = c\frac{1 - r}{1 + r},$$

ahol $r = f/f_0$. Látható, hogy a sebesség kifejezésében a frekvencia konkrét értékére nincs szükség, r a feladatban adott összefüggéssel kiszámítható. A sebességmérés relatív hibájának komponensei:

$$\frac{\Delta v_c}{v} = \frac{\Delta c}{c},\quad \frac{\Delta v_f}{v} = \frac{2r}{r^2 - 1}\frac{\Delta f}{f}.$$

a sebesség kifejezésének érzékenysége a frekvenciamérésre ugyanis:

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -c\frac{2}{(1+r)^2 f_0}.$$

Worst case összegzést alkalmazva:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{2r}{r^2-1}\frac{\Delta f}{f}.$$

A kérdés, hogy milyen pontossággal kell megmérni a frekvenciát, ha adott c mérésének pontossága, és ismert, hogy v-t milyen pontosan kell mérni. Ekkor:

$$\frac{\Delta f}{f} = \left(\frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta c}{c}\right)\frac{|r^2-1|}{2r} \cong 59 \text{ ppm}.$$

2.21. A hibakomponensek deriválás és rendezés után:

$$\frac{\Delta v_{t_1}}{v} = -\frac{t_2}{t_2-t_1}\frac{\Delta t_1}{t_1}, \quad \frac{\Delta v_{t_2}}{v} = \frac{t_1}{t_2-t_1}\frac{\Delta t_2}{t_2}.$$

a) A sebességmérés hibája worst case összegzéssel:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{t_2}{|t_2-t_1|}\frac{\Delta t_1}{t_1} + \frac{t_1}{|t_2-t_1|}\frac{\Delta t_2}{t_2}.$$

Mivel a példában megadott esetben

$$\frac{t_2}{|t_2-t_1|} \cong \frac{t_1}{|t_2-t_1|} \cong 300,$$

továbbá feltételezhető, hogy t_1 és t_2 mérésének hibája egyenlő, a szükséges időmérési pontosság:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{h}{2}\frac{1}{300} = 8.33 \cdot 10^{-5}.$$

b) A számlálós időmérő hibája a kvantálási hiba, ami jelen esetben:

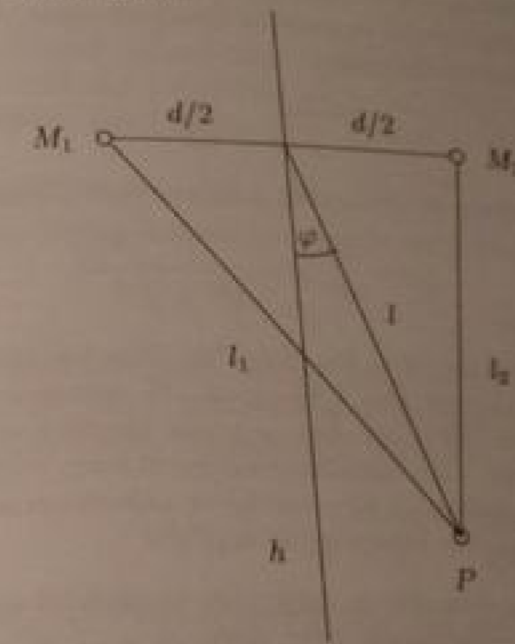
$$h_t = \frac{1}{N} = \frac{t_0}{t_1} = \frac{1}{f_0 t_1} \cong 3 \cdot 10^{-4},$$

ahol a '0' index az órajelre utal. t_1 helyett t_2 is írható, a hiba szempontjából mindegy, melyiket írjuk be. Látható, hogy a kvantálási hiba nagyobb, mint a szükséges mérési pontosság. Kisebb hiba csak hosszabb méréssel lenne teljesíthető, viszont a mérési idő a hang terjedési ideje miatt nem növelhető. A mérési pontosság úgy javítható, ha több mérést végzünk egymás után, és az így kapott eredményeket átlagoljuk. Mivel ezen mérési eredmények függetlennek tekinthetők, a hiba M mérés után a $\sqrt{M}$-ed részére csökken, azaz:

$$M = \left[\left(\frac{h_t}{\Delta t/t}\right)^2\right] + 1 = [12.98] + 1 = 13.$$

A szögletes zárójel itt az egészrész-képzést jelenti.

2.22. Tekintsük az alábbi ábrát!



Az ábrán M_1 és M_2 jelöli a mikrofonokat, a hangforrás a P pontban van. h a két mikrofon közötti szakaszt felező merőleges egyenes, a mikrofonok és a szakasz felezőpontjának távolsága a hangforrástól rendre l_1, l_2 és l. Két koszinusz-tételt tudunk felírni:

$$\begin{aligned} l_1^2 &= \frac{d^2}{4} + l^2 - 2\frac{d}{2}l\cos(90^\circ + \varphi), \\ l_2^2 &= \frac{d^2}{4} + l^2 - 2\frac{d}{2}l\cos(90^\circ - \varphi). \end{aligned}$$

a) Kihasználva, hogy $\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin\varphi$, illetve $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, valamint a második egyenletet az elsőből kivonva azt kapjuk, hogy:

$$l_1^2 - l_2^2 = 2dl\sin\varphi.$$

A bal oldalt felbonthatjuk két tényező szorzatára:

$$(l_1 + l_2)(l_1 - l_2) = 2dl\sin\varphi.$$

Ha $l \gg d$, $l_1 \cong l_2 \cong l$, így az egyenlet felírható a következő alakban is:

$$2l(l_1 - l_2) = 2dl\sin\varphi.$$

Ebből átrendezés után kapjuk, hogy:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{l_1 - l_2}{d}\right) = \arcsin\left(\frac{ct}{d}\right). \qquad (7)$$

ahol c a hangsebesség, t pedig a mért időkülönbség

b) Mivel a példában éppen $\varphi = 0$, a hiba kiszámításához elegendő a megadott Δt időkülönbséget a (7) egyenletbe behelyettesíteni, és a kiadódó szög éppen a mérés abszolút hibája:

$$\Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{c\,\Delta t}{d}\right) = 0.0017\ \text{rad} = 0.097^\circ. \qquad (8)$$

Tanulságos azonban, ha elvégezzük a hibaanalízist általános esetre:

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{ct}{d}}}\frac{c}{d}\Delta t,$$

ahol az első tényező az arcsin függvény deriváltja. Látszik, hogy ha $\varphi = 0$, az első tényező egységnyi, azaz a hiba csak a (8) egyenletben szereplő függvény argumentuma. Mivel azonban az arcsin függvény meredeksége nulla közelében egységnyi, a két számítás megegyező eredményt ad. A második módszerrel az is látszik, hogy ha φ növekszik, akkor ugyanakkora időmérési hiba mellett a szögmérés hibája egyre nagyobb.

Megjegyzés. Jó az a megközelítés is, hogy nagy távolságból gyakorlatilag párhuzamosan érkeznek a hanghullámok, ezért elegendő egy derékszögű háromszöget tekinteni. Ez nincs ellentétben a fenti gondolatmenettel, ugyanakkor az elhanyagolás fizikai alapú, nincs lehetőség az elhanyagoláskor elkövetett hiba becslésére. Ezt az ismertetett módszerrel meg lehet tenni, hiszen adott l távolsághoz megadható az a hiba, amit a közelítéssel elkövetünk.

2.23.

a) Az épület magassága:

$$h = \frac{p_0}{\varrho_0 g}(\ln p_1 - \ln p_2) = 80.22\ \text{m}.$$

b) A mérési hiba kifejezéséhez deriválás és rendezés után az alábbi komponenseket kapjuk:

$$\frac{\Delta h_{p_1}}{h} = \frac{1}{\ln p_1 - \ln p_2}\frac{\Delta p_1}{p_1}, \quad \frac{\Delta h_{p_2}}{h} = -\frac{1}{\ln p_1 - \ln p_2}\frac{\Delta p_2}{p_2}.$$

A magasságmérés hibája tehát:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{\ln p_1 - \ln p_2}\left(\frac{\Delta p_1}{p_1} ? \frac{\Delta p_2}{p_2}\right) = c\,(e_1 \ ?\ e_2),$$

ahol a kérdőjel helyén a hibaösszegzés módjától függő műveletet kell elvégezni.

A két hibakomponens kiszámításához tekintsük először azt az esetet, amikor két független műszerrel mérünk. Ekkor a hibák a következők:

$$e_1 = \frac{p_{\text{off},\text{I}}}{p_1} + \varepsilon_{\text{I}}, \quad e_2 = \frac{p_{\text{off},\text{II}}}{p_2} + \varepsilon_{\text{II}}.$$

ahol $p_{\text{off},\text{I}}$ és $p_{\text{off},\text{II}}$ jelöli az ofszethibát, ε_1 és ε_2 pedig a mért értékre vonatkozó relatív hibát rendre az I. és a II. műszerre. Mivel a két mérés független, a hibákat valószínűségi vagy worst case alapon kell összegezni. Az utóbbi módszerrel a magasság mérésének hibája:

$$\frac{\Delta h}{h} = c\,(e_1 + e_2) \approx 60\%.$$

Amennyiben azonos műszert használunk mindkét esetben, a hibák a következők:

$$e_1 = \frac{p_{\text{off},\text{I}}}{p_1} + \varepsilon_{\text{I}}, \quad e_2 = \frac{p_{\text{off},\text{I}}}{p_2} + \varepsilon_{\text{I}}.$$

Az indexelésnél az I index meghagyásával utalunk arra, hogy azonos műszerről van szó. Mivel azonban most a két hiba nem független egymástól, a hibakomponenseket előjelesen kell összegezni:

$$\frac{\Delta h}{h} = c\,|e_1 - e_2| = c\left|\frac{p_{\text{off},\text{I}}}{p_1} - \frac{p_{\text{off},\text{I}}}{p_2}\right| = 0.2\%.$$

A fenti eredményeket elemezve az alábbiak állapíthatók meg:

- Mivel a nyomáskülönbség kicsi, c elég nagy érték, ezért kicsiny nyomásmérési hiba is nagy magasságmérési hibát eredményez.
- Első pillantásra érdekesnek tűnhet, hogy azonos műszer esetén nem az ofszethibák, hanem a mért értékre vonatkozó hibák esnek ki. Ha viszont megnézzük a magasság kifejezését, látszik, hogy nem a két nyomás különbsége, hanem aránya szerepel, és az arányt a konstans ofszet megváltoztatja.

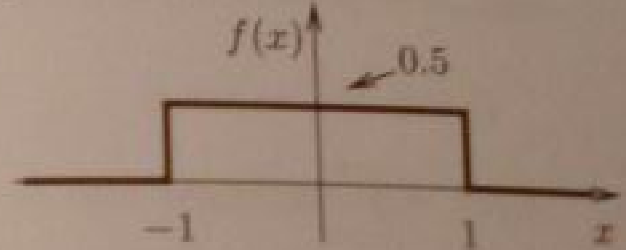
További megjegyzések. A megadott hibák a nyomásmérők specifikációjához tartoznak, amelyek minden, azonos típusú műszerre azonosak. Az ofszethiba nem fix, adott előjelű eltolást jelent, mert ha így lenne, azzal azonnal korrigálni lehetne. Az ofszet egy, a mért értéktől nem függő hibatag, amely tetszőleges értékű és előjelű lehet, abszolút értékének maximuma a megadott hiba.

A mért értékre vonatkozó hiba egy adott műszer esetén egy fix érték, véletlensége azt jelenti, hogy a megadott intervallumon belül (pl. ±1%) tetszőleges lehet. Sok műszert megvizsgálva, mindegyiknek más lenne ez a fajta hibája, véletlenszerűen. Nem azt jelenti tehát, hogy a mérés zajos, azaz a mérésre zaj szuperponálódik. A mérési zaj létező fogalom, de azt másképpen lehet figyelembe venni.

3. Hibaszámítás II.

3.1. Bevezető feladatok

3.1. A sűrűségfüggvény az alábbi:



A várható érték:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.$$

A szórás számításához felhasználható a Steiner-tétel:

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - E^2\{x\} = E\{x^2\},$$

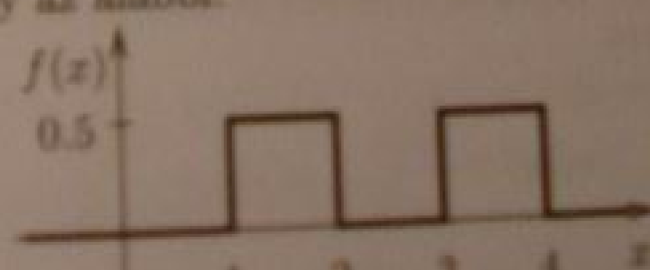
hiszen a várható érték zérus. Így a variancia:

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$

Tehát a szórás:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5774.$$

3.2. A sűrűségfüggvény az alábbi:



A várható érték az ábráról leolvasható vagy számítható:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 2.5.$$

A szórás ismét a Steiner-tétel felhasználásával:

$$\sigma_x = \sqrt{E\{x^2\} - E^2\{x\}} = \sqrt{7.33 - 6.25} = 1.04.$$

Az intervallum, amelybe a mérési eredmények 90%-os valószínűséggel beleesnek, a sűrűségfüggvény alakjából leolvasható: olyan intervallum, amely felett a sűrűségfüggvény integrálja 0.9. A $d = 2.8$ szélességű intervallum ennek a követelménynek eleget tesz, elhelyezkedése pedig tetszőleges az $[1, 4]$ intervallum belsejében.

3.3. Mivel normális eloszlású mennyiségről van szó, a 99.7%-os konfidenciaszinthez $\pm 3\sigma$ szélességű konfidenciaintervallum tartozik. Tehát:

$$\sigma = \frac{1}{6} = 0.1667.$$

3.4. A várható érték:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 1.$$

A négyzetes várható érték:

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 1.03.$$

A szórás ismét a Steiner-tétel felhasználásával:

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - E^2\{x\} = 1.03 - 1 = 0.03.$$

Mivel az egyenletes eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete gyakran szükséges, az az intervallum alapján rögtön felírható:

$$\sigma_x^2 = \frac{d^2}{12} = 0.03,$$

ahol d az intervallum szélessége. Ebben az esetben a Steiner-tételt a négyzetes várható érték egyszerű számítására használhatjuk fel.

3.5. A mért mennyiségek standard bizonytalansága az egyenletes eloszlású véletlen hiba szórása, azaz:

$$u(x_1) = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{3}}, \quad u(x_2) = \frac{\Delta x_2}{\sqrt{3}},$$

ahol:

$$\Delta x_1 = 1 \text{ cm}, \quad \Delta x_2 = 0.8 \text{ cm}.$$

A mért mennyiség a két hosszúság különbsége:

$$y = x_1 - x_2.$$

Ennek alapján az érzékenységek:

$$c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1.$$

Az eredő standard bizonytalanság pedig:

$$u(y) = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2)} = 1.28 \text{ cm}.$$

A mért hosszúság értéke és standard bizonytalansága tehát:

$$y = 20 \text{ cm}, \quad u(y) = 1.28 \text{ cm}.$$

3.6. Az egyes ellenállások standard bizonytalansága:

$$u(R_i) = \frac{h}{k} R_i = 5\,\Omega.$$

Az eredő ellenállás és az egyes érzékenységek:

$$R_e = \sum_{i=1}^{100} R_i, \quad c_i = \frac{\partial R_e}{\partial R_i} = 1.$$

Az eredő standard bizonytalanság:

$$u(R_e) = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} c_i^2 u^2(R_i)} = \sqrt{100 \cdot 25}\,\Omega = 50\,\Omega.$$

Az eredő ellenállás és a kiterjesztett bizonytalanság:

$$R_e = 100 \text{ k}\Omega, \quad \Delta R_e = k u(R_e) = 100\,\Omega.$$

Az eredő ellenállás kifejezhető még az alábbi formákban:

$$R_e = 100000(100)\,\Omega = (100000 \pm 100)\,\Omega.$$

3.7. Az egyes ellenállások standard bizonytalansága:

$$u(R_1) = hR_1 = 4.9\,\Omega, \quad u(R_2) = hR_2 = 0.1\,\Omega.$$

Az osztásarány és az egyes érzékenységek:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad c_1 = \frac{\partial a}{\partial R_1} = -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2}, \quad c_2 = \frac{\partial a}{\partial R_2} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Az eredő standard bizonytalanság:

$$u(a) = \sqrt{c_1^2 u^2(R_1) + c_2^2 u^2(R_2)} = 2.77 \cdot 10^{-4}.$$

Az osztásarány és a kiterjesztett bizonytalanság:

$$a = 0.02, \quad \Delta a = ku(a) = 5.54 \cdot 10^{-6} \approx 5.5 \cdot 10^{-6}.$$

Más formátumban:

$$a = 0.0200000(55).$$

3.8. Az egyes ellenállások standard bizonytalansága:

$$u(R_i) = \frac{h}{k_1} R_i = \begin{cases} \frac{0.01\%}{3} 10^3\ \Omega & = \ 0.0333\ \Omega \\ \frac{0.1\%}{3} 10^4\ \Omega & = \ 3.33\ \Omega \\ \frac{1\%}{3} 10^5\ \Omega & = \ 333\ \Omega \\ \frac{10\%}{3} 10^6\ \Omega & = \ 33.3\ \mathrm{k}\Omega \end{cases}.$$

Az eredő ellenállás és az egyes érzékenységek:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}, \quad c_i = \frac{1}{R_i^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)^2}, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Az eredő standard bizonytalanság:

$$u(R_e) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} c_i^2 u^2(R_i)} = 0.054\ \Omega.$$

Az eredő ellenállás és a kiterjesztett bizonytalanság:

$$R_e = 900.09\ \Omega, \quad \Delta R_e = k_2 u(R_e) = 0.108\ \Omega.$$

Más formátumban:

$$R_e = 900.090(108)\ \Omega.$$

$k = 3$ mellett a valószínűségi hibaösszegzésnek megfelelő hibát kaptuk volna.

3.9. Az áfonyaszem tömegének várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mu = 5\ \mathrm{g}, \quad \sigma_1^2 = \frac{1}{12}\ \mathrm{g}^2.$$

A szórást az egyenletes eloszlás alapján határoztuk meg. $N = 120$ áfonyaszem össztömegének becslője és szórásnégyzete, illetve szórása:

$$\hat{m} = 600\ \mathrm{g}, \quad \sigma_{120}^2 = 120 \frac{1}{12}\ \mathrm{g}^2 = 10\ \mathrm{g}^2, \quad \sigma_{120} = 3.162\ \mathrm{g}.$$

A konfidenciaintervallum felírásához szükség van a standard normális eloszlás változójának azon értékére, amelynél nagyobb értéket a valószínűségi változó a példában megadott valószínűség felével nem vesz fel. Ha $p = 98\%$, az azt jelenti, hogy 1–1% lehet a valószínűsége, hogy a keresett értéknél nagyobb értéket vesz

fel a valószínűségi változó, vagy a keresett érték −1-szeresénél kisebbet. Ez az érték példánkban:

$$z_{0.01} = 2.24.$$

Tehát a szimmetrikus konfidenciaintervallum szélessége:

$$\Delta m = \sigma_{120} z_{0.01} = 7.084\ \mathrm{g}.$$

A konfidenciaintervallum a konfidenciaszinttel:

$$P\left[\hat{m} - \Delta m < m < \hat{m} + \Delta m\right] = 98\%,$$

azaz

$$P\left[592.92\ \mathrm{g} < m < 607.08\ \mathrm{g}\right] = 98\%.$$

3.10. A $[0, a]$, $a = 5$ intervallumban egyenletes eloszlás várható értéke és varianciája:

$$\mu_1 = \frac{a}{2} = 2.5, \quad \sigma_1^2 = \frac{a^2}{12} = 2.0833,$$

ahol μ_1 a várható érték és σ_1 a szórás. $N = 48$ független minták összegére:

$$\mu_2 = N\frac{a}{2} = 120, \quad \sigma_2^2 = N\frac{a^2}{12} = 100.$$

Ahhoz, hogy standard normális eloszlást kapjunk, „standardizálni” kell, azaz minden generált mintára el kell végezni a

$$z_i = \frac{x_i - \mu_2}{\sigma_2} = \frac{x_i - 120}{10}$$

műveletet.

Az eloszlás, illetve a valószínűség-sűrűségfüggvény matematikai absztrakció, a valóságban minták vannak. Ezek relatív gyakorisága tart a megfelelő valószínűségi függvényekhez. Ha tehát egy adott eloszlást változó eloszlását akarjuk megváltoztatni, az eloszlásnak megfelelő minták mindegyikén kell ezt a transzformációt végrehajtani.

3.11. A megadott minták alapján kiszámítható a várható érték becslője, valamint a tapasztalati szórás:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = 14.5738, \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2} = 4.7527,$$

ahol $\hat{\mu}$ jelöli a várható érték becslőjét, s a tapasztalati szórást, $N = 6$ pedig a minták száma. Mivel a szórást is a minták alapján becsültük, a konfidenciaintervallum megállapításához a Student t-eloszlást kell alkalmaznunk.

A konfidenciaintervallum felírásához szükség van az $N - 1 = 5$ szabadságfokú Student t-eloszlás változójának azon értékére, amelynél nagyobb értéket az valószínűségi változó a példában megadott valószínűség felével nem vesz fel. Ha $p = 90\%$, az azt jelenti, hogy 5-5% lehet a valószínűsége, hogy a keresett értéknél nagyobb értéket vesz fel a valószínűségi változó, vagy a keresett érték -1-szeresénél kisebbet. Ez az érték példánkban:

$$t_{(5,0.05)} = 2.015.$$

Tehát a szimmetrikus konfidenciaintervallum szélessége:

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{N}} t_{(5,0.05)} = 3.9096.$$

A konfidenciaintervallum tehát a következő:

$$P\left[\hat{\mu} - \frac{s}{\sqrt{N}} t_{(5,0.05)} < \mu < \hat{\mu} + \frac{s}{\sqrt{N}} t_{(5,0.05)}\right] = 90\%.$$

Behelyettesítve:

$$P[10.6642 < \mu < 18.4835] = 90\%.$$

3.2. Gyakorló feladatok

3.12. Az intervallum határait a háromszög alakú eloszlásba rajzolva egymással arányos derékszögű háromszögeket kapunk. Mivel a „kihagyott" terület az összterület 1%-a kell legyen, továbbá a területek aránya az arányos háromszögek oldalarányának négyzetével egyenlő:

$$p = \bar{p} \pm \Delta p = 100 \pm 4.5.$$

3.13. A 95.5%-os konfidenciaszinthez pontosan 2σ konfidenciaintervallum tartozik, ezért:

$$\sigma_1 = 0.5 \text{ cm}, \quad \sigma_2 = 0.5 \text{ cm}, \quad \sigma_1 = 0.25 \text{ cm}.$$

A három asztal együttes hosszának várható értéke és szórása:

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 300 \text{ cm}, \\ \sigma_e^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \to \sigma_e = 0.75 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Az egyes asztalok hosszúságának hibája normális eloszlású, tehát az eredő eloszlás is normális lesz. A valószínűség ennek alapján számítható ki. Az a kérdés, hogy mekkora helyre fér be a három asztal, azt jelenti, hogy mekkora az a hosszúság, amelynél az asztalok hosszúságának összege nem nagyobb. Ez a feltétel nem korlátozza azt, hogy mennyire lehetnek rövidek az asztalok, azaz egyoldali valószínűségi intervallumot kell meghatároznunk. Az intervallum a következő:

$$P\left[l < \mu_e + \sigma_e z_{(0.003)}\right] = 99.7\%.$$

A Függelékben található táblázatot úgy kell használni – mivel az csak a standard normális eloszlás pozitív tartományába eső területet adja meg – hogy a 0.003 valószínűséget 0.5-ből kell kivonni, azaz

$$z_{(0.003)} \approx 2.74.$$

Így az asztalok 99.7% valószínűséggel

$$\mu_e + \sigma_e z_{(0.003)} = 302 \text{ cm}$$

hosszúságú helyre férnek be.

3.14. A 3.2. feladat mintájára az intervallum, amelybe a mérési eredmények 90%-os valószínűséggel beleesnek, egy $d = 2.6$ szélességű intervallum, elhelyezkedése pedig tetszőleges az $[1,4]$ intervallum belsejében.

3.15. Az eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 1/a, & \text{ha } \mu - a/2 < x < \mu + a/2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol:

$$\mu = 5, \quad a = \sigma\sqrt{12} = 2\sqrt{12} = 6.93.$$

Az intervallum szélessége $d = 0.98a = 6.79$, elhelyezkedése pedig tetszőleges az $[5 \pm a/2] = [1.54, 8.46]$ intervallum belsejében.

3.16. A mért mennyiségek standard bizonytalansága:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{z_{0.005}} = 6.1 \text{ m}, \quad u(t) = \frac{\Delta t}{z_{0.005}} = 1.22 \text{ s}.$$

A sebesség és az egyes érzékenységek:

$$v = \frac{x}{t}, \quad c_1 = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{t}, \quad c_2 = \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}.$$

Az eredő standard bizonytalanság:

$$u(v) = \sqrt{c_1^2 u^2(x) + c_2^2 u^2(t)} = 0.0031 \text{ m/s}.$$

A sebesség a kiterjesztett bizonytalansággal:

$$v = 1.0000(62) \text{ m/s}.$$

Megjegyzés. Mivel $k = 2$ kiterjesztési tényező kb. 95%-os, a mért mennyiségekénél magasabb konfidenciaszinthez tartozik, a szabványos kiértékelés a 2.2 feladatban bemutatott worst case hibaösszegzéssel jó közelítéssel megegyező hibát eredményezett.

3.17. A 3.5., 3.6. példák megoldását felhasználva az egyes ellenállások standard bizonytalansága:

$$u(R_i) = \frac{h_i R_i}{\sqrt{3}} = \frac{0.1\ \Omega}{\sqrt{3}} = 0.0577\ \Omega, \quad i = 1, \ldots, 4$$

Az eredő standard bizonytalanság:

$$u(R_e) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} c_i^2 u^2(R_i)} = 0.1155\ \Omega,$$

ahol $c_i = 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Az eredő ellenállás értéke a kiterjesztett bizonytalansággal:

$$R_e = 1111.00(23)\ \Omega.$$

3.18. A teljesítmény kifejezése:

$$P = \frac{U^2}{R} = 144\ \text{mW}.$$

Relatív szórásokkal számolva:

$$\frac{\sigma_P^2}{P^2} = 4\frac{\sigma_U^2}{U^2} + \frac{\sigma_R^2}{R^2} = 4 \cdot 10^{-6} + 10^{-4} = 1.04 \cdot 10^{-4}.$$

Ebből:

$$\frac{\sigma_P}{P} = 0.0102, \quad \sigma_P = 1.47\ \text{mW}.$$

3.19. A mért mennyiségek standard bizonytalansága megegyezik a szórással:

$$u(U) = \sigma_U, \quad u(I) = \sigma_I.$$

Az ellenállás és az egyes érzékenységek:

$$R = \frac{U}{I}, \quad c_U = \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}, \quad c_I = \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}.$$

Az ellenállás és standard bizonytalansága:

$$R = 1\ \text{k}\Omega, \quad u(R) = \sqrt{c_U^2 u^2(U) + c_I^2 u^2(I)} = 0.0141\ \text{k}\Omega.$$

3.20. A 3.6. példa megoldását felhasználva az egyes ellenállások szórása:

$$\sigma_i = \frac{h_i}{z_{0.005}} R_i.$$

Az eredő szórás:

$$\sigma_e = \sqrt{100\sigma_i^2} = 10\sigma_i.$$

Az eredő ellenállás relatív hibája 99%-os konfidenciaszinten:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = z_{0.005}\sigma_e \frac{1}{100R_i} = 0.1h_i = 0.1\%.$$

3.21. Az egyes ellenállások szórása:

$$\sigma_1 = \frac{hR_1}{z_{0.025}} = 11.22\ \Omega, \quad \sigma_2 = \frac{hR_2}{z_{0.025}} = 51.02\ \Omega, \quad \sigma_3 = \frac{hR_3}{z_{0.025}} = 112.2\ \Omega.$$

Az eredő szórás:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = 123.76\ \Omega.$$

Az eredő ellenállás relatív hibája 90% konfidenciaszinten:

$$h_e = \frac{\sigma_e z_{0.01}}{R_e} \cong 0.59\%.$$

3.22. A rendszeres hiba és a véletlen hiba szórása:

$$\begin{aligned} h_{100} &= Nh_1 = 50\ \text{s}, \\ \sigma_{100} &= \sqrt{N}\sigma_1 = 5\ \text{s}. \end{aligned}$$

A fentiek alapján:

$$p(h < -60\ \text{s}) \cong 0,$$
$$p(h > +60\ \text{s}) \cong 2.5\%.$$

Ugyanis az 1 percnél nagyobb késéshez a véletlen hibának a várható értéktől $22\sigma_{100}$ távolságra kellene lennie, aminek normális eloszlás esetén praktikusan nulla a valószínűsége; az 1 percnél nagyobb sietés viszont $2\sigma_{100}$ esetén már megvalósul, amelynek valószínűsége az egyoldali konfidenciaintervallum miatt 2.5%. Azaz az éjfelet 100 nap múlva kb. 97.5% valószínűséggel jelezzük 1 percnél kisebb hibával.

3.23. Egy csomag és a zsák tömegének szórása:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{dkg}, \quad \sigma_{200} = \sqrt{200}\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{dkg} = 8.165\ \text{dkg}.$$

A zsák tömegének várható értéke, és a specifikáció szerinti maximális eltérése:

$$\bar{m} = 20\ \text{kg}, \quad \Delta m = 2\ \text{dkg}.$$

Mivel a zsák tömegének eloszlása normális, kifejezhető a standard normális eloszlás változója:

$$z = \frac{\Delta m}{\sigma_{200}} \cong 2.45.$$

Mivel csak a túlsúly érdekes, itt is egyoldali valószínűséget kell vizsgálni, azaz

$$p = 0.5 - p(z) = 0.0071 \approx 0.71\%.$$

Ekkora valószínűséggel lesz a Mikulás zsákja túlsúlyos.

3.24. A $-a$, a értéket 50-50% valószínűséggel felvevő eloszlás várható értéke és varianciája:

$$\mu_1 = 0; \quad \sigma_1^2 = a^2 = 4,$$

ahol μ_1 a várható érték és σ_1 a szórás. N független mintát összegezve:

$$\mu_2 = 0; \ \sigma_2^2 = Na^2 = 1024.$$

Ahhoz, hogy standard normális eloszlást kapjunk, „standardizálni" kell, azaz minden generált mintára el kell végezni a:

$$z_i = \frac{x_i}{\sigma_2} = \frac{x_i}{32}$$

műveletet.

3.25. A baktériumok szaporodását a csukamájolajjal kezelt esetben akkor fogadhatjuk el nagyobbnak, ha az 5. csészében megfigyelt szaporodás kívül esik az első 4 csészében mért szaporodás alapján kiszámított konfidenciaintervallumon. A 3.11. feladat mintájára:

$$\hat{\mu} = 1186, \quad s = 99.17,$$

ahol $\hat{\mu}$ jelöli a várható érték becslőjét, s a tapasztalati szórást. A konfidenciaintervallum kiszámításánál figyelembe kell venni, hogy most nem az átlagra, hanem egyetlen mintára kell az intervallumot felírni. A szórás most is chinégyzet-eloszlást követ, a várható érték eloszlása most is normális, a hányados tehát Student-t eloszlást követ, de az eredeti tapasztalati szórással. A konfidenciaintervallum felírásánál tehát nem kell leosztani $\sqrt{N}$-nel, azaz:

$$P\left[\hat{\mu} - s t_{(3,0.025)} < x < \hat{\mu} + s t_{(3,0.025)}\right] = 95\%.$$

Behelyettesítve:

$$P[870 < x < 1502] = 95\%.$$

Az eltérés tehát szignifikáns, a csukamájolaj segíti a baktériumok szaporodását.

3.26. A példában nem volt megadva a mintasorozat, még a minták száma sem. Ezen adatok híján abból indulhatunk ki, hogy a mérési sorozat átlaga a várható értéket elhanyagolható hibával közelíti, a tapasztalati szórás pedig megegyezik a valódi szórással. Ekkor már felírhatók az egyes mérési eredményekre vonatkozó konfidenciaintervallumok.

a) Amennyiben az eloszlás nem ismert, a Csebisev-egyenlőtlenség használható fel:

$$P\left(|x - \mu| \le \varepsilon\sigma\right) > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2},$$

ahol μ és σ jelöli a szórást, ε pedig a konfidenciaszintre jellemző konstans. Ha a konfidenciaszint p, ε kifejezhető:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{1-p}}.$$

Így az ellenállásra vonatkozó konfidenciaintervallum:

$$P[R - \varepsilon\sigma_R < R_i < R + \varepsilon\sigma_R] = p.$$

Behelyettesítve:

$$P[332.5\ \Omega < R_i < 351.5\ \Omega] = 90\%.$$

b) Ha ismert, hogy a mérési eredmények eloszlása normális, a konfidenciaintervallum:

$$P\left[R - \sigma_{R^2(3,m)} < R_i < R + \sigma_{R^2(3,m)}\right] = p.$$

Behelyettesítve:

$$P[337.1\ \Omega < R_i < 346.9\ \Omega] = 90\%.$$

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy ebben a feladatban nem az átlagra mondunk ki konfidenciaállítást, hanem az egyes mért értékekre.

3.27. Student-t eloszlással kell számolni, mert csak a mérési eredményekből számított átlag és a tapasztalati szórás áll rendelkezésünkre.

a) Mivel a konfidenciaintervallumot a mérési sorozat átlagára kell felírni, a szórás a mintaszám gyökével osztódik. Ennek megfelelően a konfidenciaintervallum az első esetben:

$$P\left[m_1 - \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}} t_{(N-1,1-p/2)} < m < m_1 + \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}} t_{(N-1,1-p/2)}\right] = p,$$

azaz:

$$P[2.9872\ \mathrm{g} < m < 3.0128\ \mathrm{g}] = 99\%.$$

b) A konfidenciaintervallumot a K db érme mérésére lehet felírni a fentiekkel hasonló módon:

$$P\left[m_2 - \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}} t_{(N-1,1-p/2)} < Km < m_2 + \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}} t_{(N-1,1-p/2)}\right] = p.$$

Az egyetlen érme tömegére vonatkozó konfidenciaintervallumhoz egy transzformációval jutunk:

$$P\left[\frac{m_2}{K} - \frac{\sigma_m}{K\sqrt{N}} t_{(N-1,1-p/2)} < m < \frac{m_2}{K} + \frac{\sigma_m}{K\sqrt{N}} t_{(N-1,1-p/2)}\right] = p,$$

azaz:

$$P[2.99968\ \mathrm{g} < m < 3.00032\ \mathrm{g}] = 99\%.$$

3.3. Összetett feladatok

3.28. A téglák $N = 100$ rétegben fekszenek egymáson. A hibák függetlensége miatt:

$$\sigma^2_{\text{torony}} = \sum_{i=1}^{100} \sigma^2_{\text{tégla}} = N\sigma^2_{\text{tégla}}.$$

A feladat nehézségét az adja, hogy nem ismert a téglák hibájának eloszlása, valamint a megadott hiba és a szórás kapcsolata. Gyakran (lásd pl. 3.20. feladat), ha az egyes minták eloszlása normális, és ugyanolyan konfidenciaszinttel vagyunk kíváncsiak az eredő hibára is, a szórás és a hiba közötti szorzótényező kiesik (hiszen az eredő eloszlás mindenképpen normális), és a hiba kiszámítása a valószínűségi hibaösszegzésre egyszerűsödik. Adatok hiányában tehát feltételezhető a normális eloszlás és az azonos konfidenciaszint, azaz:

$$\begin{aligned} h_{\text{torony,abs}} &= \sqrt{N} h_{\text{tégla,abs}} = 1 \text{ cm}, \\ h_{\text{torony,rel}} &= \frac{h_{\text{torony,abs}}}{l_{\text{torony}}} = \frac{\sqrt{N} h_{\text{tégla,abs}}}{N l_{\text{tégla}}} = \frac{h_{\text{tégla,rel}}}{\sqrt{N}} = 0.1\%. \end{aligned}$$

3.29. Mivel a jel-zaj viszony (SNR) definíciója

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{P_{\text{jel}}}{P_{\text{zaj}}},$$

a példában megadott esetben:

$$\frac{P_{\text{jel}}}{P_{\text{zaj}}} = 10^{30/10} = 1000.$$

Egyenfeszültségről, illetve ergodikus jelről lévén szó, a teljesítmények az alábbiak:

$$P_{\text{jel}} = U^2, \quad P_{\text{zaj}} = \sigma^2.$$

A feladat a szinteket nem specifikálta, az egyszerűség kedvéért legyen:

$$\sigma^2 = 1 \text{ V}^2.$$

Ekkor:

$$U = \sqrt{1000} \text{ V}^2 = 31.62 \text{ V}.$$

Az abszolút hibára írható, hogy:

$$\Delta U = hU = z_{(0.025)}\sigma_N = z_{(0.025)} \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

ahol σ_N jelöli az N *mérés* átlagolása utáni szórást. A hiba eléréséhez szükséges *mérések* száma tehát:

$$N = \left[\frac{z^2_{(0.025)}\sigma^2}{h^2 U^2} \right] + 1 = [38.4] + 1 = 39.$$

A szögletes zárójel itt az egészrész-képzést jelenti.

3.30. Az óra által mutatott idők különbsége adja az egyes napok hibáját:

$$9 \quad 9 \quad 14 \quad 9 \quad 10 \quad 12 \quad [\text{sec}]$$

Ekkor a napi járásra vonatkozó konfidenciaintervallum felírása már nem okoz nehézséget. Az átlag és a szórás:

$$\hat{\mu} = 10.5 \text{ s}, \quad s = 2.0736 \text{ s}.$$

A konfidenciaintervallum a következő:

$$P\left[\hat{\mu} - \frac{s}{\sqrt{N}} t_{(5,0.025)} < \mu < \hat{\mu} + \frac{s}{\sqrt{N}} t_{(5,0.025)}\right] = 95\%.$$

Behelyettesítve:

$$P\left[8.3235 \text{ s} < \mu < 12.6765 \text{ s}\right] = 95\%.$$

3.31.

a) A feladat az $N = 9$ szabadságfokú Student-t eloszlással oldható meg:

$$P\left[\hat{\mu} - \frac{s}{\sqrt{N_1}} t_{(9,0.05)} < \mu < \hat{\mu} + \frac{s}{\sqrt{N_1}} t_{(9,0.05)}\right] = 90\%.$$

Behelyettesítve:

$$P\left[174.99 \text{ cm} < \mu < 181.01 \text{ cm}\right] = 90\%.$$

b) Itt ki kell használni, hogy nagy N értékekre a Student-t eloszlás a normális eloszláshoz tart, azaz:

$$t_{(325,0.05)} \cong z_{(0.05)} = 1.64.$$

Így a konfidenciaintervallum:

$$P\left[\hat{\mu} - \frac{s}{\sqrt{N_2}} z_{(0.05)} < \mu < \hat{\mu} + \frac{s}{\sqrt{N_2}} z_{(0.05)}\right] = 90\%.$$

Behelyettesítve:

$$P\left[177.53 \text{ cm} < \mu < 178.47 \text{ cm}\right] = 90\%.$$

3.32. A várható érték új becslője:

$$m = \frac{N_1 m_1 + N_2 m_2}{N_1 + N_2}$$

A szórásnégyzet új becslője a következő egyenlettel lenne kiszámítható:

$$s^2 = \frac{1}{N_1+N_2-1}\sum_{i=1}^{N_1+N_2}(z_i-m)^2 = \frac{1}{N_1+N_2-1}S^2.$$

Az egyes z_i mintákat nem ismerjük, ismertek viszont az egyes csoportokra vonatkozó korrigált tapasztalati szórások, így megpróbálhatunk ezek segítségével kifejezni a szórásnégyzetet. Fejezzük ki S^2-et úgy, hogy a várható érték helyébe behelyettesítjük annak (9) szerinti kifejezését:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \sum_{i=1}^{N_1+N_2}\left(z_i-\frac{N_1m_1+N_2m_2}{N_1+N_2}\right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{N_1}\left(z_i-\frac{(N_1+N_2)m_1+N_2(m_2-m_1)}{N_1+N_2}\right)^2 + \\
&+ \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\left(z_i-\frac{(N_1+N_2)m_2+N_1(m_1-m_2)}{N_1+N_2}\right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{N_1}\left((z_i-m_1)+\frac{N_2}{N_1+N_2}(m_2-m_1)\right)^2 + \\
&+ \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\left(z_i-\frac{N_1}{N_1+N_2}(m_1-m_2)\right)^2.
\end{aligned}$$

A négyzetreemelést elvégezve:

$$\begin{aligned}
S^2 &= (N_1-1)s_1^2+\frac{N_1N_2^2}{(N_1+N_2)^2}(m_2-m_1)^2 + \\
&+ (N_2-1)s_2^2+\frac{N_2N_1^2}{(N_1+N_2)^2}(m_1-m_2)^2 + \\
&+ \frac{2N_2}{N_1+N_2}(m_2-m_1)\sum_{i=1}^{N_1}(z_i-m_1)+\frac{2N_1}{N_1+N_2}(m_1-m_2)\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(z_i-m_2).
\end{aligned}$$

Az átlag definícióját alkalmazva a két szumma nullát ad. A nemzérus tagok rendezése után, illetve felhasználva, hogy $(m_2-m_1)^2=(m_1-m_2)^2$, azt kapjuk, hogy

$$S^2 = (N_1-1)s_1^2+(N_2-1)s_2^2+\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}(m_2-m_1)^2.$$

Tehát az eredő korrigált tapasztalati szórásnégyzet:

$$s^2 = \frac{1}{N_1+N_2-1}\left[(N_1-1)s_1^2+(N_2-1)s_2^2+\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}(m_2-m_1)^2\right].$$

Behelyettesítve:

$$m = 177.86\ \text{cm}, \quad s = 4.8642\ \text{cm}.$$

3.33. A Thevenin-helyettesítőkép alapján a keresett ellenállás:

$$R_x = R_t\frac{U_1-U_2}{U_2}.$$

Az érzékenységek a következők:

$$\begin{aligned}
c_{U_1} &= \frac{\partial R_x}{\partial U_1} = \frac{R_t}{U_2}, \\
c_{U_2} &= \frac{\partial R_x}{\partial U_2} = -\frac{R_tU_1}{U_2^2}, \\
c_{R_t} &= \frac{\partial R_x}{\partial R_t} = \frac{U_1-U_2}{U_2}.
\end{aligned}$$

Mivel a terhelő ellenállás toleranciája nem volt megadva, a hozzá tartozó hibakomponenst nullának tekintjük.

a) Az U_2 feszültség A típusú standard bizonytalansága számítható, ehhez ki kell számítani a megadott U_2 értékek tapasztalati szórását:

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}U_{2,i} = 10.4168\ \text{V}, \quad s = \sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(U_{2,i}-\bar{U}_2)^2} = 6.238\ \text{mV}.$$

Az A típusú standard bizonytalanság:

$$u(U_2)_A = \frac{s}{\sqrt{N}} = 3.119\ \text{mV}.$$

b) A B típusú standard bizonytalanság meghatározásához ki kell értékelnünk a gyártói specifikációt, kiegészítve a kvantálási hibával:

$$h_m = \bar{U}_2\left[h_{rdg}+h_{rng}\frac{U_{mr}}{\bar{U}_2}+\frac{1}{D}\right] \tag{10}$$

ahol D a kijelzett számérték a tizedespont nélkül, jelen esetben kb. 10400. A B típusú standard bizonytalansághoz az egyenletes eloszlás szórásának kifejezését használva juthatunk el:

$$u(U_2)_B = \frac{h_m}{\sqrt{3}} = 1.411\ \text{mV}. \tag{11}$$

U_2 teljes bizonytalansága az A és a B típusú bizonytalanság négyzetes összege, míg U_1-nek csak B típusú bizonytalansága számítható:

$$u(U_2) = \sqrt{u^2(U_2)_A+u^2(U_2)_B} = 3.423\ \text{mV}, \quad u(U_1) = u(U_1)_B = 1.408\ \text{mV}.$$

$u(U_1)_B$ a (10) és a (11) egyenletekkel adott módon számítható. A két feszültség csekély eltérése miatt $u(U_1)_B \cong u(U_2)_B$.

c) A belső ellenállás és standard bizonytalansága:

$$R_g = 5.046\ \Omega,\quad u(R_g) = \sqrt{c_{U_1}^2 u^2(U_1) + c_{U_2}^2 u^2(U_2)} = 0.06211\ \Omega.$$

A belső ellenállás kiterjesztett bizonytalanságával együtt megadva:

$$R_g = 5.046(124)\ \Omega.$$

3.34. Az áram becslője:

$$I = \frac{\hat{U}}{\hat{R}}.$$

Az érzékenységek a következők:

$$c_U = \frac{\partial I}{\partial U} = \frac{1}{R},$$
$$c_R = \frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{U}{R^2}.$$

a) Az A típusú standard bizonytalansága az U feszültségnek számítható, ehhez ki kell számítani a megadott U értékek tapasztalati szórását:

$$\hat{U} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i = 138.736\ \text{mV},\quad s = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}\left(U_i - \hat{U}\right)^2} = 33.616\ \mu\text{V}.$$

Az A típusú standard bizonytalanság:

$$u(U)_A = \frac{s}{\sqrt{N}} = 15.033\ \mu\text{V}.$$

b) A B típusú standard bizonytalanság meghatározásához ki kell értékelnünk a gyártói specifikációt, amelynek most része a kvantálási hiba is:

$$h_m = \hat{U}\left[h_{o.v.} + h_{o.r.}\frac{U_{\max}}{\hat{U}}\right].$$

A B típusú standard bizonytalansághoz az egyenletes eloszlás szórásának kifejezését használva juthatunk el:

$$u(U)_B = \frac{h_m}{\sqrt{3}} = 21.793\ \mu\text{V}.$$

c) U teljes bizonytalansága az A és a B típusú bizonytalanság négyzetes összege:

$$u(U) = \sqrt{u^2(U)_A + u^2(U)_B} = 26.475\ \mu\text{V}.$$

A normálellenállás méréskori értékének meghatározásához korrekciót kell alkalmazni. Az ellenállás várható értéke, illetve legjobb becslője a hőfoktényezővel való korrekció után:

$$\hat{R} = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] = 100.131\ \Omega,$$

ahol R_0 a $T_0 = 20$ °C-on megadott ellenállás, R és T az aktuális ellenállás és hőmérséklet. A bizonytalanság kifejezéséhez nincs szükségünk erre a korrekcióra, mert az a „hiba hibája". A normálellenállásnak csak B típusú bizonytalansága számítható, szintén egyenletes eloszlást feltételezve:

$$u(R) = u(R)_B = \frac{\Delta R}{\sqrt{3}} = 0.0266\ \Omega$$

ahol ΔR a példában megadott eltérés.

d) Az áram és standard bizonytalansága:

$$I = 1.38554\ \text{mA},\quad u(I) = \sqrt{c_U^2 u^2(U) + c_R^2 u^2(R)} = 4.5323\cdot 10^{-4}\ \text{mA}.$$

Az áram kiterjesztett bizonytalanságával együtt megadva:

$$I = 1.38554(91)\ \text{mA}.$$

e) A fenti kiterjesztett bizonytalanság kb. 95%-os konfidenciaszinttel igaz. A bizonytalanságnak a példában három forrása jelenik meg. A két B típusú bizonytalansághoz egyenletes eloszlást rendeltünk, a feszültségmérés A típusú bizonytalanságának eloszlása nem ismert, de feltételezhető, hogy a megfigyelési zaj, ami miatt különféle értékeket mérünk, normális eloszlású. Ezen eloszlások eredője (konvolúciója) durva közelítéssel normális, ennek alapján tehető meg a 95%-os becslés. (A gyakorlatban 10-12 egyenletes eloszlású valószínűségi változó összege már normálisnak tekinthető.)

f) A feszültségmérő hibája (a B típusú bizonytalanság forrása) az adott mérés alatt egy konkrét érték, a mérés rövid ideje alatt nem változik. A műszer hibája egy konkrét érték, amely azonban kielégíti a gyártói specifikációt, azaz az abban meghatározott intervallumon belül marad. A gyártó a specifikációt a beépített alkatrészek, illetve saját, *gyártási sorozatra* vonatkozó megfigyelései alapján tette meg. A specifikáción belül egy-egy műszer hibáját valószínűségi változónak tekintjük. Ennek a hibának a véletlenségét csak az *adott típusú műszer több példányával* végrehajtott mérések sorozatával lehet megmutatni.

3.35. Először vezessük be a következő jelöléseket: 1-es index fogja jelölni az etalonra vonatkozó mennyiségeket, 2-es pedig a tesztelt műszerre vonatkozókat. Ennek megfelelően $f_{0,1}$ jelöli az etalon órajelét, $f_{0,2}$ a tesztelt műszerét. f_0 jelöli az órajel névleges értékét (amely mindkét műszerre ugyanaz az érték). Nagyon *fontos* leszögezni, hogy f_0 konstans, nem mérési eredmény, nem változó. Mivel a két műszer által mért időtartam megegyezik, ezért írható, hogy:

$$T = \frac{N_1}{f_{0,1}} = \frac{N_2}{f_{0,2}}.$$

Mivel f_1 bizonytalansággal terhelt, de torzítatlan, ezért:

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

Az előző két egyenlet alapján:

$$f_1 = \frac{f_{0,2}}{N_2}. \tag{12}$$

A műszerekben fizikailag a számláló értéke hordozza a mérési eredményt, ezért a tesztelt műszer által mutatott frekvencia az alábbi:

$$f_2 = \frac{f_0}{N_2}.$$

Ebből N_2-t kifejezve, és a (12) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy:

$$f_{0,2} = \frac{f_1}{f_2} f_0.$$

A bizonytalanság kiszámításához tehát ezt az egyenletet kell vizsgálni. Az egyenletben csak f_1 és f_2 változó, f_0 konstans, tehát csak az f_1-re és f_2-re vonatkozó érzékenységeket kell vizsgálni. Ezek:

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{\partial f_{0,2}}{\partial f_1} &= \frac{f_0}{f_2}, \\ c_2 = \frac{\partial f_{0,2}}{\partial f_2} &= -\frac{f_1}{f_2^2} f_0. \end{aligned}$$

Mind f_1, mind f_2 bizonytalansága két tagból áll: az órajel bizonytalanságából és a kvantálási hibából. Mind a kvantálási hiba, mind pedig az órajel bizonytalansága (a feladat szövege alapján) egyenletes eloszlással modellezhető, ezért a standard bizonytalanságok az alábbiak:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{f_1}{N}, \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_1 h_1, \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{f_2}{N} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{f_1}{N}, \\ u_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_2 h_2 \cong \frac{1}{\sqrt{3}} f_1 h_2, \end{aligned}$$

ahol $N = t_m f_0$ (t_m a mérési idő). A számláló értéke ugyan különbözik a két műszer esetén, de ezt a hibaszámítás szempontjából elhanyagolhatjuk (a hiba hibája).
$f_{0,2}$ teljes standard bizonytalansága ezek után:

$$u(f_{0,2}) = \sqrt{c_1^2 u_1^2 + c_1^2 u_2^2 + c_2^2 u_3^2 + c_2^2 u_4^2} = \frac{f_0}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{N^2} + h_1^2 + h_2^2} = 1.732 \text{ Hz}.$$

Felhasználtuk, hogy $f_1/f_2 \cong 1$. Ezzel $f_{0,2}$ bizonytalansága:

$$\Delta f_{0,2} = k u(f_{0,2}) = k \cdot 1.732 \text{ Hz}.$$

ahol k a kiterjesztési tényező, amit a feladat nem specifikált. A tesztelendő műszer órajelfrekvenciája tehát:

$$f_{0,2} = 9.9999985(k \cdot 17) \text{ MHz}.$$

A fenti gondolatmenet feszesen követi a GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) előírásait. Az alábbiakban bemutatunk egy gondolatmenetet, amelyel szintén el lehet jutni a helyes megoldáshoz.

1. Adott (ismert, pontos) f_x generátorfrekvencia és a tesztelt műszer esetén f_2 alapján $f_{0,2}$ értéke és bizonytalansága kifejezhető.

2. Ugyanez megtehető az etalon műszerre is.

3. Ha a generátorfrekvencia nem ismert, az a 2. pont szerint az etalon műszerrel megmérhető. Ekkor egyedül f_1 ismert, és a bizonytalanság "megfordul", a mérési eredmény alapján f_x lesz bizonytalan, hiszen adott f_1-hez sok f_x tartozhat (hiába tudjuk, hogy fizikailag az a pontos.)

4. Ha most f_x-et a tesztelt műszerrel mérjük (1-es eset), de értékét csak f_1-en keresztül ismerjük, akkor $f_{0,2}$ bizonytalanságába beleszámít f_1 bizonytalansága is.

További megjegyzések:

1. $f_{0,2}$ bizonytalanságán annak mérése bizonytalanságát értjük, nem fizikai viselkedését. Ez utóbbit a feladatban h_2 fejezte ki.

2. Jól látszik, hogy egy ilyen mérés (kalibrálás) során a teljes bizonytalanságba mindkét műszer bizonytalansága beleszámít. Hiába van tehát nagyon jó etalon műszerünk, ha a tesztelt műszer bizonytalan, a kalibráció bizonytalanságát a tesztelt műszer fogja meghatározni.

4. Feszültség és áram mérése

4.1. Bevezető feladatok

4.1. Szimmetrikus négyszögjel (vagy egyszerűen csak: négyszögjel) alatt olyan periodikus jelet értünk, amely a periódus felében A, másik felében $-A$ értékű. Az effektív érték definíciója szerint:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |U(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} 1^2 dt + \int_{T/2}^{T} (-1)^2 dt\right)}\ \text{V} = 1\ \text{V}.$$

4.2. Az alapműszer ellenállása:

$$R_b = \frac{U}{I} = 2\ \text{k}\Omega.$$

A szükséges előtét-ellenállás:

$$R_e = \frac{U_m - U}{U} R_b = 198\ \text{k}\Omega.$$

4.3. Váltakozó jelet mérő műszerek mindig szinuszos jelet feltételezve jelzik ki az effektív értéket. Csúcsérték mérése esetén a mért értéket a szinuszjel csúcstényezőjével osztják, azaz:

$$U_{ki} = \frac{U_p}{k_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{V} = 0.7071\ \text{V}.$$

4.4. A kvantálási hiba a tizedespont és előjel nélküli kijelzett számérték reciproka, azaz:

$$h_q = \frac{1}{N} = \frac{1}{50} = 2\%.$$

4.5. A torzítási tényező definíciója:

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}} = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}.$$

ahol P_f és P_t rendre a felharmonikusok és a teljes jel teljesítményét jelölik. Ebből a kérdéses arány:

$$\frac{P_f}{P_t} = k^2 = 10^{-4}.$$

4.6. Az osztálypontosság definíciójából adódóan:

$$h = \mathrm{op}\frac{U_{\max}}{U} = 1.5\%.$$

4.7. A jel-zaj viszony definíciója:

$$\mathrm{SNR} = 10\lg\frac{P_{\mathrm{jel}}}{P_{\mathrm{zaj}}}.$$

Ennek alapján a jel és a zaj teljesítményének aránya:

$$a = \frac{U_x^2}{U_n^2} = 10^{\mathrm{SNR}/10} \cong 29.51.$$

Mivel a mért jel effektív értéke az effektívérték-négyzetek összege:

$$U_m^2 = U_x^2 + U_n^2,$$

ezért a fentiek alapján U_x kifejezhető:

$$U_x = \sqrt{\frac{U_m^2}{1+1/a}} = 6\ \mathrm{V}.$$

4.8. Szimmetrikus háromszögjel (vagy egyszerűen csak: háromszögjel) alatt olyan periodikus jelet értünk, amelynek értéke a periódus első felében A és $-A$, második felében $-A$ és A között lineárisan változik.

a) Az abszolút középérték definíciója szerint:

$$U_{\mathrm{abs}} = \frac{1}{T}\int_0^T |U(t)|dt = \frac{U_p}{2}.$$

Mivel váltakozó jelet mérő műszerek mindig szinuszos jelet feltételezve jelzik ki az effektív értéket, abszolút középérték mérése esetén a mért értéket a szinuszjel formatényezőjével szorozzák, azaz:

$$U_{\mathrm{ki}} = k_f U_{\mathrm{abs}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}U_{\mathrm{abs}} = 1.111\ \mathrm{V}.$$

b) Csúcsérték mérése esetén a mért értéket a szinuszjel csúcstényezőjével osztják, azaz:

$$U_{\mathrm{ki}} = \frac{U_p}{k_p} = \frac{2}{\sqrt{2}}\ \mathrm{V} = 1.414\ \mathrm{V}.$$

4.9. A kérdéses értékek függetlenek a frekvenciától. A csúcsérték megegyezik az amplitúdóval:

$$U_p = 1\ \mathrm{V}.$$

Az abszolút középérték (az előző feladat megoldását felhasználva):

$$U_{\mathrm{abs}} = \frac{U_p}{2} = 0.5\ \mathrm{V}.$$

Az effektív érték, a definíciót alkalmazva, és kihasználva, hogy a görbe alatti területek minden negyedperiódusra egyenlők:

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{64U_p^2}{T^3}\int_0^{T/4} t^2 dt} = \sqrt{\frac{64U_p^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4}} = \frac{U_p}{\sqrt{3}} = 0.5774\ \mathrm{V}.$$

4.10. A várható érték a jel középértéke, a DC-komponens. Az effektív érték a különböző frekvenciájú komponensek effektív értékeiből számítható, négyzetes összegzéssel. A DC-komponens speciálisan zérus frekvenciájú komponens, melynek effektív értéke önmaga. A jel frekvenciája a legalacsonyabb frekvenciájú komponens frekvenciájával egyezik meg (lásd még: 1.6., 1.16., 1.17. feladat).

a)

$$x(t) = A^2\sin^2(2\pi f_0 t) = A^2/2(1-\cos(4\pi f_0 t)).$$

Tehát:

$$x_0 = A^2/2,\quad x_{\mathrm{eff}} = \sqrt{A^4/4 + A^4/8} = \sqrt{3/8}\,A^2,\quad f_x = 2f_0.$$

b) Az a) feladat alapján:

$$x_0 = 0.5,\quad x_{\mathrm{eff}} = \sqrt{3/8},\quad f_x = 3f_0.$$

(Az eredeti szinuszjel frekvenciája $1.5f_0$ volt.)

c)

$$x_0 = 0,\quad x_{\mathrm{eff}} = \sqrt{12^2/2 + 12^2/2} = 12,\quad f_x = f_0.$$

d) Mivel valós jelekre $|x(t)|^2 = x^2(t)$, ezért az effektív érték számításánál az abszolútérték-képzés figyelmen kívül hagyható. A középérték a szinuszjel abszolút középértéke. Mivel a félperiódusok abszolút értéke megegyezik, $x(t)$ periódusideje az eredetinek a fele.

$$x_0 = x_{\mathrm{abs}} = \frac{2}{\pi}12 = 7.6394,\quad x_{\mathrm{eff}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8.485,\quad f_x = 2f_0.$$

e)

$$x_0 = 0,\quad x_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2} = 1.414,\quad f_x = f_0,$$

ugyanis $|x(t)| = \sqrt{2}$, és az effektív érték számításához szükség van abszolútérték-képzésre is.

4.2. Gyakorló feladatok

4.11.

$$R_b = \frac{U}{I} = 2\ \mathrm{k\Omega}, \quad R_s = \frac{I}{I_m - I} R_b = 0.0202\ \mathrm{k\Omega} = 20.202\ \Omega.$$

4.12.

$$U_1 = U_2 = \frac{U_z}{2} = 80\ \mathrm{V}, \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{\Delta U_2}{U_2} = \mathrm{op}\frac{100\ \mathrm{V}}{80\ \mathrm{V}} = 1.25\%.$$

A mérés hibája a legkedvezőtlenebb esetben:

$$\frac{\Delta U_z}{U_z} = \frac{1}{2}\frac{\Delta U_1}{U_1} + \frac{1}{2}\frac{\Delta U_2}{U_2} = 1.25\%.$$

4.13.

$$I_1 = I_2 = \frac{I_z}{2} = 8\ \mathrm{A}, \quad h = \frac{\Delta I_1}{I_1} = \frac{\Delta I_2}{I_2} = \mathrm{op}\frac{10\ \mathrm{V}}{8\ \mathrm{V}} = 1.25\%.$$

A műszerek hibái egyenletes eloszlást követnek, a standard bizonytalanság ennek alapján számítható. A mérés kiterjesztett bizonytalansága:

$$\frac{\Delta I_z}{I_z} = k\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{1}{6}}h = 1.06\%.$$

4.14. A termoelemes átalakító valódi effektív értéket mér. Eszerint:

$$U_{ki} = 1\ \mathrm{V}.$$

4.15. A hiba forrása a mérési eredmény kvantált kijelzése, és egyedül a kvantálási hibát tudjuk számítani. Feltesszük, hogy a műszer kijelzésének megfelel a mérőáramkörök pontossága is.

$$h \approx h_q = \frac{1}{245} \approx 0.4\%.$$

4.16. Mivel négyszögjelre $U_{eff} = U_p$, továbbá a kijelzés a szinuszjel csúcstényezője alapján történik,

$$U_{ki} = \frac{U_p}{\sqrt{2}} = 1.414\ \mathrm{V}.$$

4.17. Mivel:

$$\frac{U_1}{U_3} = 30\ \mathrm{dB} \to U_3^2 = 10^{-3}U_1^2,$$

a torzítási tényező:

$$k = \sqrt{\frac{U_3^2}{U_1^2 + U_3^2}} \approx \sqrt{\frac{U_3^2}{U_1^2}} = \sqrt{0.001} = 3.16\%.$$

4.18.

$$U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2} = \sqrt{2}\ \mathrm{V} = 1.414\ \mathrm{V}.$$

4.19. A 4.15. feladat alapján, worst case összegzéssel:

$$\frac{\Delta R}{R} = h_{q,U} + h_{q,I} = \frac{1}{202} + \frac{1}{167} = 1.09\%.$$

A kvantálási hiba egyenletes eloszlása alapján, szabványos kiértékeléssel, 2-es kiterjesztési tényezővel:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{202^2} + \frac{1}{167^2}} = 0.90\%.$$

A kétféle eljárással kapott hiba nagyságrendileg megegyezik.

4.20.

a) Az 1 V-ot 0 dB-nek tekintve az effektív feszültségek a következőképpen fejezhetők ki:

$$U\,[\mathrm{V}] = 10^{U_i\,[\mathrm{dB}]/20} = [1.000\ 0.2512\ 0.0631\ 0.0158\ 0.0040]\ \mathrm{V}.$$

b) Az effektív érték:

$$U = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} U_i^2[\mathrm{V}]} = 1.033\ \mathrm{V}.$$

c) A torzítási tényező:

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{5} U_i^2[\mathrm{V}]}}{U} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2[\mathrm{V}]}}{U} = 25.12\%.$$

4.21.

a) Az egyszerű középérték:

$$U_0 = \frac{T_1}{T_1 + T_2}U_p = 2\ \mathrm{V}.$$

Az effektív érték pedig:

$$U = \sqrt{\frac{T_1}{T_1 + T_2}}U_p = 3.162\ \mathrm{V}.$$

A csúcstényező és a formatényező kifejezése az alábbi:

$$k_p = \frac{U_p}{U} = \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{T_1}} = 1.581$$

$$k_f = \frac{U}{U_k} = \frac{U}{U_0} = \sqrt{\frac{T_1}{T_1 + T_2}}\,\frac{T_1 + T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{T_1}} = 1.581,$$

ugyanis $U_k = U_0$, azaz az abszolút középérték megegyezik az egyszerű középértékkel.

b) Az AC csatolású műszer az egyenkomponenst leválasztja, ennek megfelelően a csatoló kondenzátor után a jel a periódus T_1-gyel jelölt részében $U_p - U_0$, a T_2-vel jelölt részében pedig $-U_0$ nagyságú. A műszer felépítésétől függ, hogy a pozitív vagy a negatív csúcsot méri meg. A kijelzett érték a szinuszjel csúcstényezőjének megfelelően ennek $1/\sqrt{2}$-szerese:

$$U_{m,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[U_p - U_0] = \frac{U_p}{\sqrt{2}}\frac{T_2}{T_1 + T_2} = 2.121 \text{ V},$$

$$U_{m,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_0 = \frac{U_p}{\sqrt{2}}\frac{T_1}{T_1 + T_2} = 1.414 \text{ V}.$$

4.22. A mérendő jel effektív értéke:

$$U = \sqrt{\frac{U_p^2}{2} + U_n^2},$$

ahol U_p a szinuszjel csúcsértéke, U_n pedig a zaj effektív értéke. A jel-zaj viszony:

$$\mathrm{SNR} = 10 \lg \frac{P_{jel}}{P_{zaj}} = 10 \lg \frac{U_p^2}{2U_n^2}.$$

Ebből a szinuszjel csúcsértéke:

$$U_p = \sqrt{\frac{2U^2}{1 + 10^{-\frac{\mathrm{SNR}}{10}}}} = 9.120 \text{ V}.$$

4.23.

a) A kapcsolás az alábbi ábrán látható.

b) Az ábra alapján:

$$dI = I_x - I_y,$$

tehát:

$$I_x = I_y \pm |dI| = \begin{cases} 234.158 \text{ mA} \\ 233.842 \text{ mA} \end{cases},$$

mivel a feladatban csak a hibaáram nagysága volt megadva. A bemenő ellenállás ezek után:

$$R_{be} = \frac{U_{be}}{I_{be}} = \frac{\pm|dI|R_s}{I_x} \cong \pm R_s\frac{|dI|}{I_x} = \pm 1.3504 \cdot 10^{-4}\ \Omega \approx \pm 0.135 \text{ m}\Omega.$$

4.24. A zaj effektív értéke a következőképpen fejezhető ki:

$$U_n[\mathrm{V}] = U_{ref}10^{U_n[\mathrm{dB}]/20} = 4.358 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

Mivel a műszer effektív értéket mér, ezért méréshatára is effektív értékben adott, így a végértékre vonatkoztatott hiba nagyon egyszerűen fejezhető ki:

$$h = \frac{U_n[\mathrm{V}]}{U_{max}} = 2.179 \cdot 10^{-4} \approx 0.022\%,$$

ahol $U_{max} = 2$ V a végérték.

4.25. A jelre:

$$U_{abs} = U_p = U_{eff} = 1 \text{ V}.$$

A kijelzett feszültségek, rendre az abszolútközépérték-mérő, a csúcsértékmérő és az effektívérték-mérő esetében:

$$U_{ki,1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}U_{abs} = 1.111 \text{ V}, \quad U_{ki,2} = \frac{U_p}{\sqrt{2}} = 0.7071 \text{ V}, \quad U_{ki,3} = U_{eff} = 1 \text{ V}.$$

4.26.

$$U_0 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)U_m = aU_m$$

Ebből:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta U_m}{U_m}.$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{(\Delta R_1/R_1 + \Delta R_2/R_2)R_1/R_2}{1 + R_1/R_2} = 1\%$$

$$\frac{\Delta U_m}{U_m} = 2 \cdot 10^{-4} + \frac{20 \text{ V}}{1 \text{ V}}1 \cdot 10^{-4} = 0.22\%$$

Tehát:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = 1.22\%$$

4.3. Összetett feladatok

4.27. Az ellenállás kifejezése:

$$R = \frac{U}{I} = 20\ \Omega.$$

A feszültség- és árammérés hibája a következőképpen írható fel:

$$\frac{\Delta U}{U} = h_1 + h_2 \frac{U_{max}}{U},$$
$$\frac{\Delta I}{I} = h_1 + h_2 \frac{I_{max}}{I_1},$$

ahol h_1 és h_2 rendre a mért értékre és a végértékre vonatkozó relatív hiba. A példában nem volt precízen megadva, hogy a feszültségmérés hibája milyen szabványos esetnek felel meg. Ennek hiányában feltételezhetjük, hogy normális eloszlású a hiba, ekkor valószínűségi összegzéssel a mért mennyiség ugyanolyan konfidenciaszintű hibáját kapjuk meg (lásd pl. 3.20. feladat), azaz az érzékenységszámítást nem részletezve:

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = 0.495\% \approx 0.5\%.$$

Ha az eloszlás nem ismert, további információk híján érdemes a legkedvezőtlenebb esetet tekinteni, ekkor:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 0.7\%.$$

Az abszolút hibák a kétféle hibaösszegzéssel pedig a következők:

$$\Delta R_{w.c.} = 0.14\ \Omega, \quad \Delta R_{val} = 0.099\ \Omega.$$

4.28.

a) A belső ellenállás kifejezése az első esetben:

$$R_g = R_t \frac{U_1 - U_2}{U_2} = 0.1\ \Omega.$$

A hiba, a 4.27. példához hasonló megfontolásból, valószínűségi összegzést alkalmazva (az érzékenységszámítás mellőzésével):

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{U_1}{U_1 - U_2}\sqrt{\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_2}{U_2}\right)^2} = \frac{U_1}{U_1 - U_2}\sqrt{2h^2} = 14.14\%.$$

A második esetben a belső ellenállás pontosabban meghatározható:

$$R_g = R_t \frac{dU}{U_2} = 0.1031\ \Omega.$$

Mivel itt közvetlenül a feszültségkülönbséget mérjük, az érzékenység kisebb, tehát a hiba is:

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U_2}{U_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta dU}{dU}\right)^2} = \sqrt{2h^2} = 0.014\%.$$

b) Mivel az érzékenységszámítás eredményeként kiemelhető az $U_1/(U_1 - U_2)$ hányados, az eredő hibára írható, hogy:

$$h_e = h_d \frac{U_1 - U_2}{U_1} = 10^{-4},$$

ahol $h_d = 1\%$ az előírt hiba. Akármilyen hibaösszegzést is alkalmazunk, a feszültségmérés hibája 10^{-6} nagyságrendű kell legyen, ehhez 7 számjegyre van szükség.

4.29. A mérési hibának két összetevője van: a teljes műszer belső ellenállásából adódó rendszeres hiba, valamint az osztálypontosságból adódó véletlen hiba. Ha az alapműszer ellenállása R_m, végkitérése (U_{max}) pedig 0.1 V, akkor a szükséges előtétellenállások (R_e), illetve a belső ellenállás (R_b) értéke az egyes méréshatárokban:

U_{max}	0.1 V	1 V	10 V	100 V
R_e	0	$9R_m$	$99R_m$	$999R_m$
R_b	R_m	$10R_m$	$100R_m$	$1000R_m$

A föld és a P pont közé kapcsolt műszer által mutatott feszültség:

$$U_m = \frac{R_2 \times R_b}{R_2 \times R_b + R_1} U_T = \frac{R_2 R_b}{R_2 R_b + R_1 (R_2 + R_b)} U_T.$$

Az ideális (végtelen belső ellenállású) műszerrel mért érték:

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_T.$$

A relatív rendszeres hiba pedig a fentiek felhasználásával:

$$h_r = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\left[\frac{R_2 R_b}{R_2 R_b + R_1 (R_2 + R_b)} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right] = \frac{(R_1 + R_2) R_b}{R_2 R_b + R_1 (R_2 + R_b)} - 1.$$

Az osztálypontosságból adódó véletlen hiba:

$$h_v = \frac{U_{max}}{U_m} \text{op}.$$

A két hibát worst case hibaösszegzéssel összegezve megkapjuk a mérés teljes hibáját:

$$h_e = |h_r| + h_v \approx \begin{cases} 23\% + 0.73\% \approx 24\%, & \text{ha } U_{max} = 1\ \text{V} \\ 2.9\% + 7.3\% \approx 10\%, & \text{ha } U_{max} = 10\ \text{V} \\ 0.3\% + 73\% \approx 73\%, & \text{ha } U_{max} = 100\ \text{V} \end{cases}$$

Az $U_{max} = 0.1$ V-os méréshatár nem alkalmas a feszültség nagysága miatt. Fentiek alapján célszerű a 10 V-os méréshatárban mérni.

4.30. A bemenő ellenállás kifejezése:

$$R_b = \frac{U_1}{I_1}.$$

a) A feszültség-és árammérés hibája a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_1}{U_1} &= h_1 + h_2 \frac{U_{max}}{U_1} + \frac{1}{N_U}, \\ \frac{\Delta I_1}{I_1} &= h_1 + h_2 \frac{I_{max}}{I_1} + \frac{1}{N_I}, \end{aligned} \tag{13}$$

ahol h_1 és h_2 rendre a mért értékre és a végértékre vonatkozó relatív hiba, $1/N_U$, illetve $1/N_I$ a kvantálási hibát jelölik. A hiba, a 4.28. példához hasonló megfontolásból, valószínűségi összegzést alkalmazva:

$$\frac{\Delta R_b}{R_b} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_1}{I_1}\right)^2} = 0.87\%.$$

b) A soros ellenállás beállításával tulajdonképpen az alábbi egyenlet szerint mérünk:

$$R_b = \frac{U_2}{U_1 - U_2} R_s,$$

ahol U_2 jelöli a bemeneten mérhető feszültséget, a soros ellenállás beiktatása után, R_s pedig maga a soros ellenállás. A példában vázolt eljárás kiküszöböli a számítást, hiszen, ha $U_2 = U_1/2$, akkor $R_b = R_s$.
Az érzékenységek:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R_{b,U_1}}{R_b} &= -\frac{U_1}{U_1 - U_2} \frac{\Delta U_1}{U_1}, \\ \frac{\Delta R_{b,U_2}}{R_b} &= \frac{U_1}{U_1 - U_2} \frac{\Delta U_2}{U_2}, \\ \frac{\Delta R_{b,R_s}}{R_b} &= \frac{\Delta R_s}{R_s}, \end{aligned}$$

azaz, $U_2 = U_1/2$ helyettesítéssel, és valószínűségi összegzést alkalmazva:

$$\frac{\Delta R_b}{R_b} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_s}{R_s}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta U_2}{U_2}\right)^2} = 0.145\%,$$

ahol $\Delta U_2/U_2$ a (13) összefüggés szerint számítható.

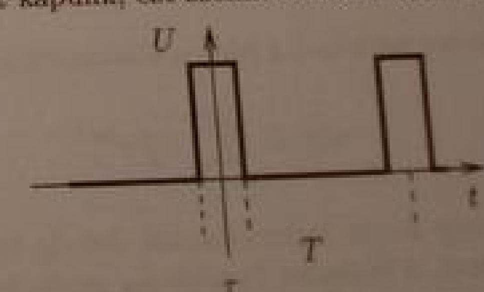
A fenti megoldásban feltételeztük, hogy a hibakomponensek függetlenek. Felmerül azonban, hogy a második esetben, mivel a mérést ugyanazzal a műszerrel hajtjuk végre, összefüggés van a komponensek között, ekkor viszont azok ellenkező előjelű súlyuk miatt kiejtik egymást. Ehhez azonban részletesen meg kell vizsgálni az egyes módszereket, illetve az egyes hibakomponenseket.

1. *A mért értékre vonatkozó hiba.* Ez a műszer erősítéshibája, és a két esetben ugyankkora, tehát a kivonást el lehet végezni. Jegyezzük meg azonban, hogy ennek feltétele, hogy a műszert ugyanabban a méréshatárban használtuk. Ha a mérés során méréshatárt kellett volna váltani, ezt nem tehetnénk meg!
2. *A végértékre vonatkozó hiba.* Ennek fizikailag több összetevője is lehet. Származhat (a) az ofszethibából, (b) a linearitási hibából, valamint (c) az elektronikus zajból. Az (a) esettől eltekintve a hibák a két mérés során függetlenek. Mivel nincs információnk arról, hogy a végértékre vonatkozó hibában mekkora az összetevők súlya, itt nem vonhatjuk ki a két hibát egymásból.
3. *Kvantálási hiba.* A kvantálási hiba pontos értéke függ attól is, hogy az adott műszer milyen „kerekítést" alkalmaz. Ugyanakkor a két kvantálási hiba egymástól nem független, hiszen U_1 kijelzett értékének függvényében állítjuk be U_2-t, helyesebben annak kijelzett értékét. A legkedvezőtlenebb eset a kisebbik érték pontatlansága esetén áll elő.

A fentiekre tekintettel a hibakomponensek közül a mért értékre vonatkozó hibát és a kisebbik kvantálási hibát törölhetjük, ezzel a hiba:

$$\frac{\Delta R_b}{R_b} = 0.105\%.$$

4.31. A Fourier-sor sokféleképpen felírható, az alábbiakban egyrészt törekszünk az egyszerűségre, másrészt megadjuk az előfordulható alakokat. A példában megadott „négyszögjel"-hez nem tartozik hozzá annak kezdőfázisa, így az időtengely mentén tetszőlegesen eltolható. Általában, ha egy jelet önmagában akarunk a frekvenciatartományban jellemezni, az egyes komponensek fázisa nem lényeges, esetleg csak az egymáshoz képesti fázisok (pl. váltakozó előjel). A fázisinformációnak inkább több jel együttes jellemzése esetén, pl. átviteli függvény mérésekor van jelentősége. A mi esetünkben a jel pozitív impulzusának felét $t = 0$-ba helyezve páros függvényt kapunk, ezt szemlélteti az alábbi ábra:



Az ábrán T jelöli a periódusidőt, τ pedig az impulzus hosszát.

a) A valós Fourier-sor a következőképpen írható fel:

$$u(t) \cong U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^A \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^B \sin k\omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

U_0 a jel egyszerű középértéke:

$$U_0 = U_p \frac{\tau}{T} = 0.6 \text{ V},$$

ahol U_p a jel csúcsértéke. Az ábrán látható jelre $U_k^B \equiv 0$, a koszinuszos tagok együtthatóit egyszerűen U_k-val jelölve az együtthatók:

$$U_k = \frac{2U_p}{T} \int_0^T \cos k\omega t f(t) dt = \frac{4U_p}{T} \int_0^{\tau/2} \cos k\omega t dt = \frac{2U_p}{k\pi} \sin\left(k\pi \frac{\tau}{T}\right).$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} U_k = {} & [1.1226 \;\; 0.9082 \;\; 0.6055 \;\; 0.2806 \;\; 0.0 \\ & -0.1871 \;\; -0.2595 \;\; -0.2270 \;\; -0.1247 \;\; 0.0] \text{ V}. \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az 5. és a 10. komponens zérus, ugyanis a négyszögjel kitöltési tényezője éppen 1/5. Ennek oka, hogy ezekben az esetekben a sorfejtés során – fázishelyzettől függetlenül – egész számú periódust integrálunk az adott frekvenciájú szinusz-vagy koszinuszfüggvényből, így az integrál értéke zérus. Ha az impulzust $t = 0$-ban kezdődőnek tekintjük, az együtthatók a következőképpen módosulnak:

$$\begin{aligned} U_k^A &= U_k \cos\left(k\pi \frac{\tau}{T}\right) \\ U_k^B &= U_k \sin\left(k\pi \frac{\tau}{T}\right), \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} U_k^A &= [0.9082 \;\; 0.2806 \;\; -0.1871 \;\; -0.2270 \;\; 0.0 \\ & \quad 0.1514 \;\; 0.0802 \;\; -0.0702 \;\; -0.1009 \;\; 0.0] \text{ V}, \\ U_k^B &= [0.6598 \;\; 0.8637 \;\; 0.5758 \;\; 0.1650 \;\; 0.0 \\ & \quad 0.1100 \;\; 0.2468 \;\; 0.2159 \;\; 0.0733 \;\; 0.0] \text{ V}. \end{aligned}$$

Komplex Fourier-sor esetében a jelet a következőképpen approximáljuk:

$$u(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_k^C e^{jk\omega t}.$$

Figyeljük meg, hogy itt az index $-\infty$-től $+\infty$-ig fut, a $k = 0$ eset adja az egyenkomponenst. A komplex Fourier-sor együtthatói az ábrán látható esetre:

$$U_k^C = U_{-k}^C = \frac{U_k}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

A pozitív és negatív frekvenciákhoz tartozó együtthatók azért egyeznek meg, mert a jel szimmetrikus. Egyéb valós jelekre az együtthatók egymás komplex konjugáltjai. A $t = 0$-ba eltolt jel együtthatóinak abszolút értéke nem változik meg, csak a fázisa.

b) A jel effektív értéke a definíció alapján egyszerűen számítható. A valódi effektívérték-mérő műszer ezt a mért értéket jelzi is ki:

$$U_{\mathrm{ki,eff}} = U_{\mathrm{eff}} = U_p \sqrt{\frac{\tau}{T}} = 1.3416 \text{ V}.$$

c) Az aluláteresztő szűrőt tartalmazó effektívérték-mérő csak az áteresztősávba eső komponenseket méri meg. Mivel $f = 2$ kHz, a 0, 2 és 4 kHz-es komponens effektív értékét kell négyzetesen összegezni, azaz:

$$U_{\mathrm{m}} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2}} = 1.1843 \text{ V}.$$

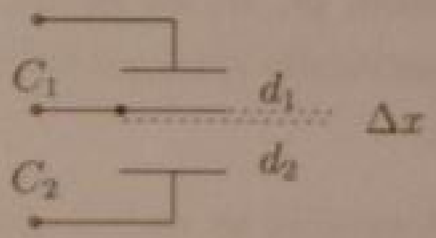
4.32. A 4.31. példa gondolatmenetét itt is felhasználhatjuk. A háromszögjel Fourier-sora csak páratlan harmonikusokat tartalmaz, amelyek $1/k^2$ szerint csökkennek. Egy $f = 3$ kHz-es háromszögjel 10 kHz-ig csak az alapharmonikust és a 9 kHz-es komponenst tartalmazza. Ha az alapharmonikus amplitúdója 1 V, akkor a 9 kHz-esé 1/9 V. Ezek alapján a mért érték:

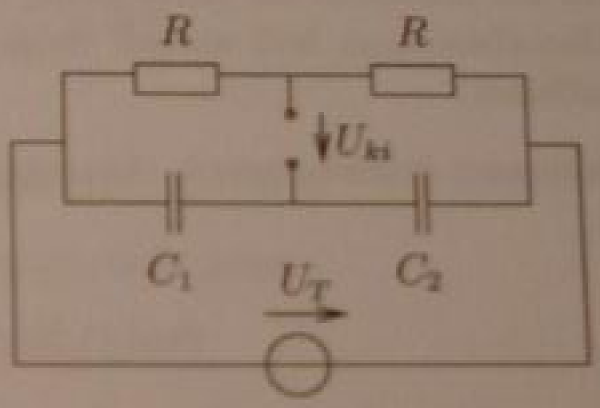
$$U_{\mathrm{m}} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} \text{ V} = 1.0062 \text{ V}.$$

5. Mérőkapcsolások

5.1. Bevezető feladatok

5.1. A differenciálkialakítású síkkondenzátor-pár és a hídkapcsolás rajza a következő ábrán látható:





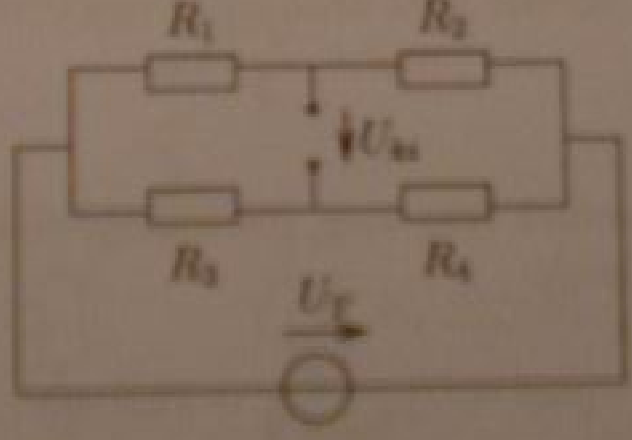
Az összefüggések:

$$C_1 = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d_1},\ \ C_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d_2},\ \ d_1 + d_2 = d,\ \ d_1 - d_2 = 2\Delta x.$$

A kimenőfeszültség:

$$\begin{aligned} U_{ki} &= U_T\left[\frac{1}{2} - \frac{1/j\omega C_2}{1/j\omega C_1 + 1/j\omega C_2}\right] = \\ &= U_T\left[\frac{1}{2} - \frac{d_2}{d_1 + d_2}\right] = \frac{U_T}{2}\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} = U_T\frac{\Delta x}{d} = 5\ \text{mV}. \end{aligned}$$

5.2. A feladat kapcsán áttekintjük a rezisztív hídkapcsolások alapeseteit. Maga a kapcsolás az alábbi ábrán látható.



Rendszerint a hídkapcsolás ellenállásai egyenlő névleges értékűek. A kapcsolás viselkedése különböző aszerint, hogy hány érzékelő elem van a hídban, azok változása milyen előjelű, illetve a táplálás feszültség-vagy áramgenerátoros. Néhány esetet az alábbiakban tekintünk át.

1. Ha csak egyetlen ellenállás nő, a többi változatlan, az érzékelő ellenállás bármelyik lehet.
2. Ha két ellenállás együttesen nő vagy csökken, akkor azok lehetnek R_1 és R_4 vagy R_2 és R_3.
3. Ha egy ellenállás nő, egy pedig csökken, akkor azok lehetnek R_1 és R_2 vagy R_3 és R_4.
4. Ha két ellenállás nő, kettő pedig csökken, akkor az „átlósan szemben" lévő ellenállásoknak kell azonos módon változni, pl. R_1 és R_4 nő, R_2 és R_3 csökken.

A híd kimeneti feszültségének abszolút értéke:

1.

$$|u_{ki}| = U_T \frac{h_R}{4+2h_R} \simeq \frac{U_T}{4} h_R;$$

2.

$$|u_{ki}| = U_T \frac{h_R}{h_R+2} \simeq \frac{U_T}{2} h_R;$$

3.

$$|u_{ki}| = \frac{U_T}{2} h_R;$$

4.

$$|u_{ki}| = U_T h_R.$$

ahol $h_R = \Delta R/R$, R az ellenállás névleges értéke. Az első két esetben a kimeneti feszültség az ellenállásváltozás nemlineáris függvénye. Áramgenerátoros táplálás esetén a 2. esetben lineáris a híd. Ekkor a kimeneti feszültség abszolút értéke:

$$|u_{ki}| = \frac{I_T R}{2} h_R,$$

ahol I_T az tápáram.

Példánk a fenti 2. esetnek felel meg, feszültséggenerátoros táplálással. Mivel $\Delta R = 1\ \Omega$, $h_R = 0.01$, tehát:

$$|u_{ki}| = U_T \frac{h_R}{h_R+2} = 24.9 \text{ mV}.$$

Amennyiben a hőmérők $2 \times 1\ \Omega$ ellenállású vezetékkel csatlakoznak a hídhoz, az ellenállásváltozás $h'_R = 0.03$, azaz:

$$|u'_{ki}| = U_T \frac{h'_R}{h'_R+2} = 73.9 \text{ mV}.$$

A rendszeres hiba a híd kimenőfeszültségének az a része, amely a hozzávezetékeken eső feszültségnek tulajdonítható. A rendszeres hiba tehát:

$$h_r = \frac{u'_{ki} - u_{ki}}{u_{ki}} = 1.97 = 197\%.$$

5.3. Legyen az osztó felső és alsó tagjának ellenállása, illetve kapacitása rendre R_1, C_1, R_2, C_2. A példa szerint $R_2 = 100$ kΩ, továbbá kompenzált esetben az osztásarány:

$$a = \frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.1.$$

Az osztó felső tagjának ellenállása:

$$R_1 = 900 \text{ k}\Omega.$$

Kompenzált esetben az időállandók megegyeznek, azaz:

$$R_1C_1 = R_2C_2.$$

Tehát az osztó felső tagjával párhuzamosan kapcsolódó kapacitás:

$$C_1 = \frac{R_2C_2}{R_1} = \frac{100}{9} \text{ pF} \approx 11.1 \text{ pF}.$$

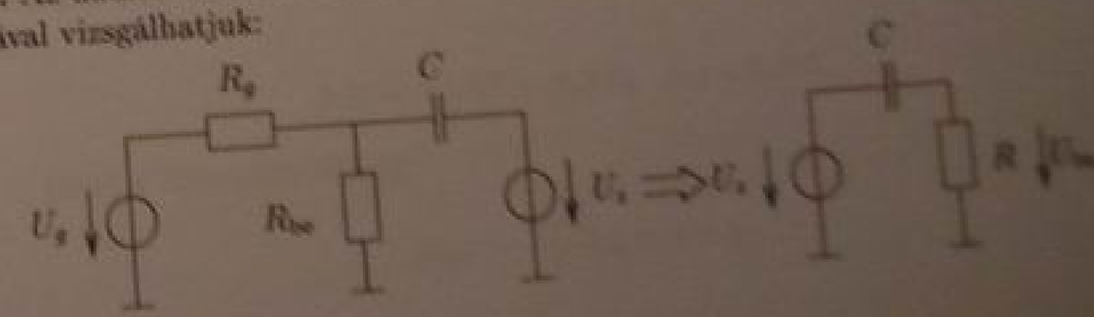
5.4. Az oszcilloszkóp bemenetére egy párhuzamos RC-tagot kell sorosan kötni (R_s, C_s). Így egy, az előző példa megoldásában tárgyalt osztó jön létre. Az osztásarány itt is $a = 0.1$, ezért:

$$R_s = 9R_{be} = 9 \text{ M}\Omega.$$

Az alakhű átvitel feltétele, hogy az osztó kompenzált legyen, azaz az időállandók megegyezzenek. Tehát:

$$C_s = \frac{R_{be}C_{be}}{R_s} = 4.44 \text{ pF}.$$

5.5. Az additív zavarfeszültséget az alábbi ábra szerint, a jelforrás dezaktiválásával vizsgálhatjuk:



Az ábrán $R = R_g \times R_{be} = 500\ \mathrm{k\Omega}$. Ekkor a kérdéses zavarfeszültség:

$$|U_{be,z}| = \left|U_z \frac{R}{R + 1/j\omega C}\right| = \left|U_z \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\right| \approx |U_z|\omega RC = 108\ \mathrm{mV}.$$

A nevező frekvenciafüggő tagját ugyanis 50 Hz-en elhanyagolhatjuk.

5.6. A szorzó kimenetén megjelenő feszültség időfüggvénye:

$$u_{ki}(t) = kU_{be,p}^2 \sin^2 \omega t = k\frac{U_{be,p}^2}{2}(1 - \cos 2\omega t) = 5(1 - \cos 2\omega t)\ \mathrm{V}.$$

Az egyszerű, az abszolút középérték, valamint az effektív érték az előző fejezetben megismert számítási módszerekkel (lásd pl. 4.10. feladat):

$$\begin{aligned} U_0 &= 5\ \mathrm{V}, \\ U_{abs} &= 5\ \mathrm{V}, \\ U_{eff} &= \sqrt{5^2 + 5^2/2}\ \mathrm{V} = 6.124\ \mathrm{V}. \end{aligned}$$

5.7. A feszültségváltó két szekunder tekercse két galvanikusan elválasztott feszültségforrást jelent. A két forrás feszültsége között annyi a kapcsolat, hogy – a parazita hatások (kapacitások, veszteségek) elhanyagolásával – egymással fázisban vagy ellenfázisban vannak. A feladat szövege rögzítette, hogy a két feszültség fázisban van, hiszen egyébként a 300-as kapcsok összekötése után a 0-s és a 330-as kapocs között nem 330 V, hanem 270 V feszültség lenne. A példában megadott feszültségeket úgy lehetett előállítani, hogy a két forrás feszültségét előjelesen összeadtuk. Ügyelni kellett azonban arra, hogy a két feszültséget feltétlenül a két tekercsről vegyük, különben rövidzár alakul ki. Egy-egy feszültség előállítása többféleképpen is lehetséges, az alábbiakban egy-egy lehetséges megoldást közlünk:

a) 3 V: '127'–'400' összekötés, a kívánt feszültség a '110' és '380' kapcsokról vehető le;

b) 5 V: '120'–'355' összekötés, a kívánt feszültség a '100' és '330' kapcsokról vehető le;

c) 15 V: '110'–'355' összekötés, a kívánt feszültség a '100' és '330' kapcsokról vehető le.

5.2. Gyakorló feladatok

5.8.

a) Példánk az 5.2. feladat megoldásában bemutatott 1. esetnek felel meg, feszültséggenerátoros táplálással. A híd többi ellenállása célszerűen $R = 100\ \Omega$, ezzel a kimenőfeszültség 20 °C-on nulla.

b) Mivel

$$\frac{U_T}{R} = I_T = 2I_H \rightarrow U_T = 1\ \mathrm{V},$$

ahol I_H a hőmérő árama. Mivel 20 °C-on a hőmérő ellenállása is R, ezért a két hídágban azonos áram folyik.

c)

$$\Delta R = R\alpha\Delta T = 0.4\ \Omega,\quad h_R = 0.004.$$

Ezzel a kimenőfeszültség:

$$|u_{ki}| = U_T \frac{h_R}{4 + 2h_R} = 0.998\ \mathrm{mV}.$$

d) A híd kimenőfeszültsége enyhén nemlineáris függvénye az ellenállás-változásnak, ezért a megfeleltetés csak közelítő lehet. Pl. az 5.2. példában bemutatott lineáris közelítést felhasználva az erősítés:

$$A_U = 10^4.$$

5.9.

a) Példánk az 5.2. feladat megoldásában bemutatott 2. esetnek felel meg. A híd többi ellenállása célszerűen $R = 100\ \Omega$, ezzel a kimenőfeszültség 25 °C-on nulla. A linearitás érdekében kedvezőbb az áramgenerátoros táplálás.

b) A hídágak áramának összege folyik a generátoron, ezért:

$$I_T = 2\frac{U_H}{R} = 20\ \mathrm{mA},$$

ahol $U_H = 1\ \mathrm{V}$ a hőmérőkön külön-külön eső feszültség.

c)

$$\Delta R = R\alpha\Delta T = 0.3\ \Omega,\quad h_R = 0.003.$$

Ezzel a kimenőfeszültség:

$$|u_{ki}| = \frac{I_T R}{2} h_R = 3\ \mathrm{mV}.$$

d) A kimenőfeszültség itt az ellenállás-változás lineáris függvénye, és

$$|u_{ki}| = 5\ \text{mV},\ \text{ha}\ T = 0\ °\text{C vagy}\ T = 50\ °\text{C}.$$

Ebből:

$$A_U = 2000.$$

5.10.

a) Példánk az 5.2. feladat megoldásában bemutatott 1. esetnek felel meg. A híd többi ellenállása célszerűen $R = 200\ \Omega$, ezzel a kimenőfeszültség terheletlen esetben nulla.

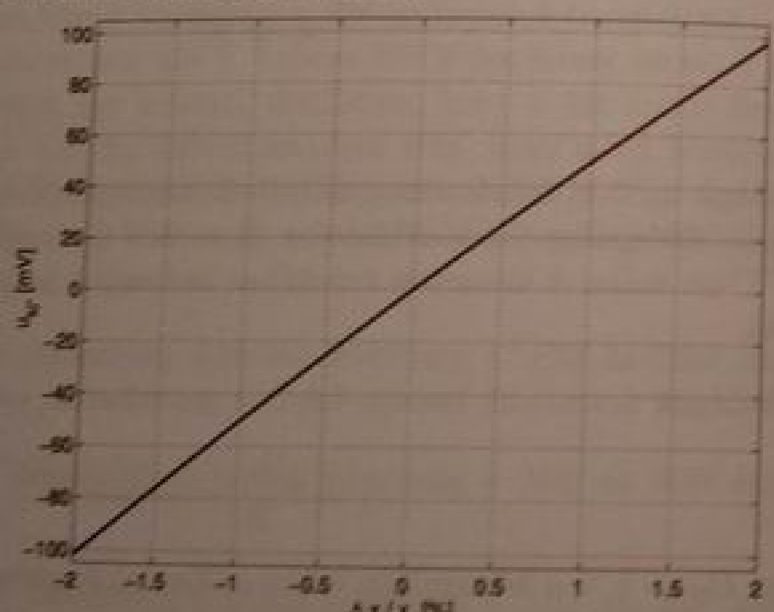
b) Mivel $h_R = 2\Delta x/x$, a kimenőfeszültség kifejezése:

$$u_{ki} = U_T \frac{h_R}{4 + 2h_R} = \frac{U_T}{2} \frac{\Delta x/x}{1 + \Delta x/x}.$$

A kimenőfeszültség 5 pontban kiértékelve:

$\Delta x/x$	u_{ki} [mV]
-2%	-102
-1%	-50.5
0	0
1%	49.5
2%	98

A karakterisztika az alábbi ábrán látható:



c) A lineáristól való legnagyobb eltérés a karakterisztika végén mutatkozik, ahol ez 2 mV, tehát a relatív és az abszolút linearitási hiba:

$$h_{lin} = 2\ \text{mV},\quad h_{lin,rel} = 2\%.$$

5.11.

a) Példánk az 5.2. feladat megoldásában bemutatott 3. esetnek felel meg. A híd többi ellenállása célszerűen $R = 400\ \Omega$, ezzel a kimenőfeszültség terheletlen esetben nulla.

b)

$$|u_{ki}| = \frac{U_T}{2} h_R = 10\ \text{mV}.$$

c) A legrosszabb esetet akkor kapjuk, ha az ellenállások azonos hídágon belül ellentétes irányban térnek el a névleges értéktől, továbbá a kimenet két pontjának a potenciálja is ellentétesen változik, tehát lényegében a 4. eset áll elő, azzal a különbséggel, hogy itt nem minden ellenállás változása ugyanakkora. A híd kimenő feszültsége:

$$|U_0| = \frac{U_T}{2}(h_{R,I} + h_{R,II}) = 35\ \text{mV},$$

ahol $h_{R,I}$ és $h_{R,II}$ a nyúlásmérő és a közönséges ellenállások megváltozását jelöli. A mérés hibája ezek után:

$$h = \frac{|U_0|}{|u_{ki}|} = 350\%.$$

5.12.

a) Példánk az 5.2. feladat megoldásában bemutatott 2. esetnek felel meg, áramgenerátoros táplálással. A híd többi ellenállása célszerűen $R = 400\ \Omega$, ezzel a kimenőfeszültség terheletlen esetben nulla.

b)

$$|u_{ki}| = \frac{I_T R}{2} h_R = 8\ \text{mV}.$$

c) Az 5.11. feladatban bemutatott megfontolással:

$$U_0 \cong \frac{I_T R}{2}(h_{R,I} + h_{R,II}) = 24\ \text{mV}.$$

Az egyenlőség azért közelítő, mert a két hídág eredő ellenállása a tűrések miatt nem egyenlő, de ezzel nem foglalkozunk, hiszen a „hiba hibája". A mérés relatív hibája:

$$h = \frac{|U_0|}{|u_{ki}|} = 300\%.$$

5.13.

a) Példánk az 5.2. feladat megoldásában bemutatott 1. esetnek felel meg. Ekkor a kimenőfeszültség:

$$|u_{ki}| \cong \frac{U_T}{4} h_R = \frac{U_T}{4} k \frac{\Delta l}{l}.$$

b) Ebből a méretváltozás lehetséges értékei:

$$\frac{\Delta l}{l} = \pm \frac{4|u_{ki}|}{kU_T} = \pm 1.207 \cdot 10^{-3}.$$

5.14. Trigonometrikus átalakításokkal, a 4.10. és 5.6. feladatok megoldását is felhasználva:

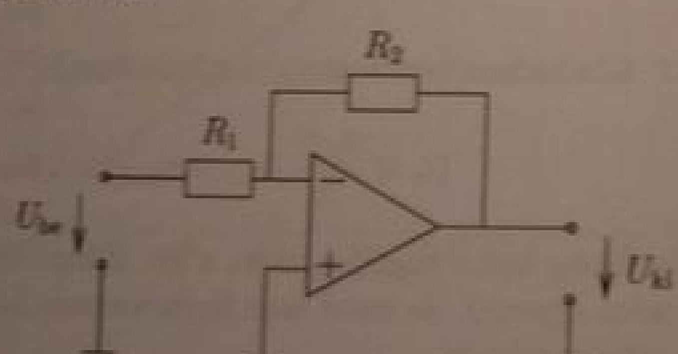
$$\begin{aligned} U_0 &= 0 \text{ V}, \\ U_{abs} &= \frac{10}{\pi} \text{ V} = 3.183 \text{ V}, \\ U_{eff} &= \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ V} = 3.536 \text{ V}. \end{aligned}$$

5.15. Trigonometrikus átalakításokkal, a 4.10. és 5.6. feladatok megoldását is felhasználva:

$$\begin{aligned} U_0 &= 0 \text{ V}, \\ U_{eff} &= \sqrt{2\left(\frac{0.5}{\sqrt{2}}\right)^2} \text{ V} = 0.5 \text{ V}. \end{aligned}$$

5.16.

a) A kapcsolási rajz az alábbi:



Az erősítés és rendszeres hibája:

$$A = -\frac{R_2}{R_1} = -5.1, \quad h_r = +2\%.$$

b) Az R_3 ellenállás bekapcsolásával a visszacsatoló ellenállás értéke:

$$R_2' = R_2 \times R_3 = 5.005 \text{ k}\Omega.$$

Az erősítés és a rendszeres hiba új értéke:

$$A' = -5.0055, \quad h_r' = 0.11\%.$$

c) A véletlen hibák számításához érdemes kiindulni a következőképpen:

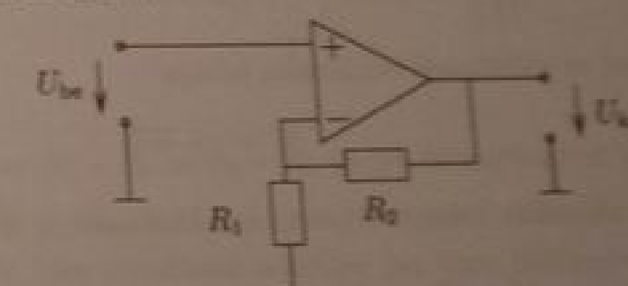
$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2'}{R_2'}.$$

R_2' hibája pedig R_2 és R_3 segítségével könnyen kifejezhető. Így a hiba a legrosszabb esetben:

$$\frac{\Delta A}{A} = h_r' + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_3}{R_2 + R_3}\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{R_2}{R_2 + R_3}\frac{\Delta R_3}{R_3} = 0.4\%.$$

5.17.

a) A kapcsolási rajz az alábbi:



Az erősítés és rendszeres hibája:

$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 10.1, \quad h_r = +1\%.$$

b) Az R_3 és R_4 ellenállás alkalmazásával a visszacsatoló ellenállás értéke:

$$R_2' = R_3 + R_4 = 9 \text{ k}\Omega.$$

Az erősítés és a rendszeres hiba új értéke:

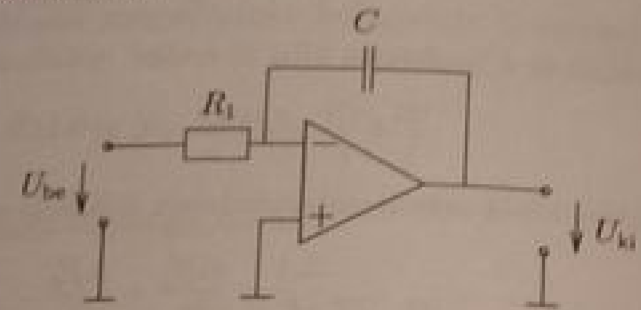
$$A' = 10, \quad h_r' = 0.$$

c) A véletlen hibák számítása az előző feladatban bemutatott gondolatmenet alkalmazható. Így a hiba a legrosszabb esetben:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{R_2'}{R_1 + R_2'}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_3}{R_3 + R_4}\frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{R_4}{R_3 + R_4}\frac{\Delta R_4}{R_4}\right) = 0.27\%$$

5.18.

a) A kapcsolási rajz az alábbi:



Az átviteli függvény és az időállandó kifejezése:

$$W(s) = -\frac{1}{sR_1C}, \quad \tau = R_1C.$$

Az egységnyi erősítésből kifejezhető az időállandó kívánt értéke, az alkatrészek értékéből pedig a valódi értéke:

$$\tau_0 = \frac{1}{2\pi f_1} = 1.592 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 15.92\ \mu\text{s}, \quad \tau = R_1C = 15\ \mu\text{s}.$$

Ezekkel az időállandó rendszeres hibája:

$$h_\tau = -5.75\%.$$

b) Az R_2 ellenállás bekapcsolásával az időállandó új értéke és rendszeres hibája:

$$\tau' = (R_1 + R_2)C = 15.91\ \mu\text{s}, \quad h'_\tau = -0.035\%.$$

c) Az előző két feladatban bemutatott gondolatmenet alapján a hiba számítható:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = h'_\tau + \frac{\Delta C}{C} + \frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{\Delta R_2}{R_2} = 2.035\%.$$

5.19. A kompenzátor a kompenzáló feszültséget úgy állítja be, hogy a komparátorra a kvantálási lépcsőnek megfelelő

$$\Delta U_{max} = \frac{U_{max}}{N}$$

feszültség jusson. Mivel a legfelső digiten csak 0 vagy 1 állhat, N értéke

$$N = 2 \cdot 10^{d-1},$$

ahol d a kijelzett digitek száma. Ennek következtében a bemeneten folyó áram

$$I_{max} = \frac{\Delta U_{max}}{R}$$

nagyságú, ahol R a komparátor bemenő ellenállása. A műszer bemenő ellenállása a mérendő feszültség (U_m) és a bemeneten folyó áram hányadosa:

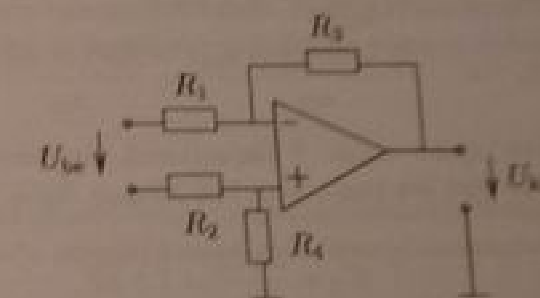
$$R_{be,min} = R\frac{U_m}{\Delta U_{max}} = NR\frac{U_m}{U_{max}}.$$

Amennyiben a kompenzátor pontosan az U_m feszültséget állítja elő, a bemenő ellenállás végtelen. A bemenő ellenállás teljes specifikációja:

$$R_{be} = [R_{be,min} \ldots \infty) = [2\ \text{G}\Omega\,\frac{U_m}{20\ \text{V}} \ldots \infty)$$

5.20.

a) A kapcsolás a következő ábrán látható:



Természetesen az $R_1 - R_3$ és $R_2 - R_4$ párok felcserélésével is helyes megoldáshoz jutunk.

b) Az erősítő közös jelre vonatkozó erősítése (az ábra jelöléseivel):

$$A_c = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_1(R_2 + R_4)}.$$

Egyetlen ellenállás konkrét értékét a névleges érték segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$R_i = R_{i,n}(1 \pm h),$$

ahol h a névleges értéktől való relatív eltérés maximuma. Ezt a fenti egyenletbe helyettesítve, és a worst case összegzést alkalmazva:

$$A_c \cong \frac{R_1R_4(1+h)^2 - R_2R_3(1-h)^2}{R_1(R_2+R_4)} = \frac{R_4}{R_2+R_4}4h.$$

A fenti egyenletben elhanyagoltuk a nevező hibafüggését, továbbá kihasználtuk, hogy $R_1R_4 \cong R_2R_3$. A közösjelelnyomás definíció szerint:

$$E = \frac{|A_s|}{|A_c|} = \frac{R_3}{R_1}\frac{R_2 + R_4}{R_4 4h} = 12625 \cong 82\ \text{dB}.$$

Numerikusan ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a felcserélt ellenállásokkal dolgozunk.

5.21. A 3 ellenállásból álló osztó 3 sorbakapcsolt ellenállást jelent, amelyekkel egyenként egy-egy kondenzátor kapcsolódik párhuzamosan. Ha az osztó kompenzált, az osztásarány csak az ellenállások arányától függ. Ha a bemenő feszültség U_1, a kimenő feszültségek pedig rendre U_2 és U_3, akkor az osztásarányok:

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} = 0.2, \\ a_{13} &= \frac{U_3}{U_1} = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} = 0.04, \\ a_{23} &= \frac{U_2}{U_3} = \frac{R_3}{R_2+R_3} = 0.2. \end{aligned}$$

A példában a_{12} és a_{13} volt adott. Fentiekből:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{R_3(1-a_{23})}{a_{23}} = 4\ \mathrm{k\Omega}, \\ R_1 &= \frac{(R_2+R_3)(1-a_{12})}{a_{12}} = \frac{R_3(1-a_{12})}{a_{13}} = 20\ \mathrm{k\Omega}, \end{aligned}$$

ahol R_3 az osztó legalsó tagja. A kapacitások megkonstruálásánál abból lehet kiindulni, hogy az alsó két tagra fenn kell állni az $R_2C_2 = R_3C_3$ összefüggésnek, így:

$$C_2 = \frac{R_3C_3}{R_2} = 7.5\ \mathrm{pF}.$$

A legfelső tag számára az alsó két tag eredője mint bemenő impedancia „látszik", ezért $R_1C_1 = R_eC_e$, ahol $R_e = R_3/a_{23}$, $C_e = a_{23}C_3$. Ezeket összevetve:

$$R_1C_1 = R_2C_2 = R_3C_3.$$

Tehát:

$$C_1 = \frac{R_3C_3}{R_1} = 1.5\ \mathrm{pF}.$$

5.22.

a) A veszteséges kondenzátor párhuzamos helyettesítőképét számíthatjuk ki, az $f = 50$ Hz-en mért veszteségi tényező segítségével. A párhuzamos ellenállás értéke:

$$R_p = \frac{1}{DC2\pi f}.$$

A megvalósított integrátor átviteli függvénye a következő:

$$W(s) = -\frac{R_p}{R}\frac{1}{1+sR_pC}.$$

$s = j\omega$ helyettesítéssel:

$$W(j\omega) = -\frac{R_p}{R}\frac{1}{1+j\omega R_pC} = \begin{cases} -\frac{R_p}{R} & \text{, ha } \omega = 0 \text{ (DC)} \\ -\frac{1}{j\omega RC} & \text{, ha } \omega \gg \frac{1}{R_pC} \end{cases}.$$

A DC erősítés abszolút értéke és a töréspont frekvencia tehát:

$$|W(0)| = \frac{R_p}{R} = 884.2, \quad f_e = \frac{1}{j2\pi RC} = 1\ \mathrm{Hz}.$$

b) Az, hogy a két szint egyenlőségét 0.1 dB bizonytalansággal ismerjük, azt jelenti, hogy az átviteli függvény egy konkrét értékét (jelen esetben az 1-et) ilyen bizonytalansággal tudjuk megmérni. Mivel:

$$W = \frac{1}{2\pi\tau f},$$

ahol $W = |W(j\omega)|$, $\tau = RC$, $f \gg 1/(2\pi R_pC)$. Az időállandót konstansnak feltételezve látszik, hogy W mérésének bizonytalansága megegyezik az egységnyi erősítéshez tartozó frekvencia meghatározásának bizonytalanságával. Mivel azonban az egységnyi erősítéshez tartozó frekvencián:

$$\tau = \frac{1}{2\pi f},$$

az előző indoklással az időállandó meghatározásának bizonytalansága megegyezik a frekvencia meghatározásának bizonytalanságával. Végső soron tehát:

$$\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right| = \left|\frac{\Delta W}{W}\right| \approx 1.15\%.$$

5.3. Összetett feladatok

5.23.

a) Ha a bemenetre kapcsolt jelek frekvenciája f_1 és f_2, a kimeneten megjelenik:

$$f_1 = 100\ \mathrm{Hz}, \quad f_2 = 300\ \mathrm{Hz}, \quad f_3 = f_1 + f_2 = 400\ \mathrm{Hz}, \quad f_4 = f_2 - f_1 = 200\ \mathrm{Hz}$$

frekvenciájú komponens.

b) A szűrők olyan amplitúdókarakterisztikával rendelkezzenek, hogy mindegyik csak egyetlen komponenst engedjen át a négy közül. Valóságos szűrők esetén ez azt jelenti, hogy egy adott frekvenciához tartozó szűrőnek a többi frekvencián adott hibahatárnál nagyobb elnyomást kell mutatnia.

c) Mivel $T_4 = 1/f_4 = 5$ ms, a teljes képernyőn $t = 2T_4 = 10$ ms alatt kell a sugárnak végigfutnia. A teljes képernyő 10 cm széles, ezért a vízszintes eltérítési sebesség:

$$v_x = 1\ \mathrm{ms/cm}.$$

d) A jel amplitúdója (csúcsértéke):

$$U_{p,4} = k\frac{U_{p,1}U_{p,2}}{2} = 10 \text{ V}.$$

Ebből a jel „magassága”, azaz csúcstól csúcsig mért nagysága a képernyőn:

$$y = \frac{2U_{p,4}}{\nu_y} = 4 \text{ cm}.$$

e) Ebben az esetben $T_3 = 1/f_3 = 2.5$ ms. Ha az érzékenység $\nu_x = 1.25$ ms/cm, akkor 10 cm befutása $t = 12.5$ ms alatt történik. Ekkor:

$$N = \frac{t}{T_4} = 5$$

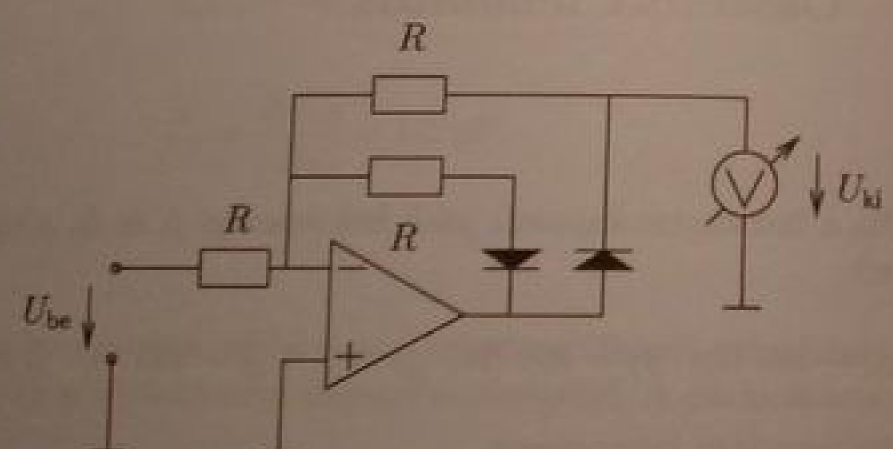
periódust látunk a képernyőn.

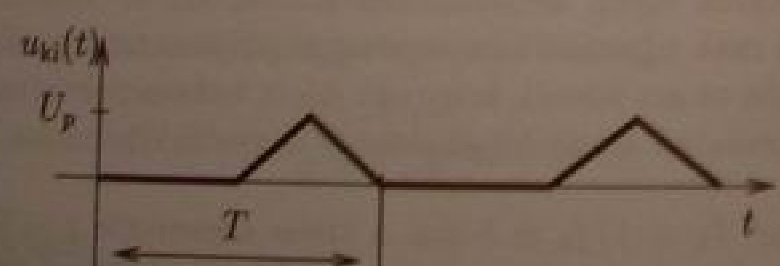
f) Mivel a csúcsérték itt is $U_{p,3} = 10$ V, a keresett érzékenység:

$$\nu_y = \frac{2U_{p,3}}{y} = 2.5 \text{ V/cm}.$$

5.24.

a) A kapcsolási rajz és a Deprez-műszer által mért jelalak az alábbi ábrán látható.





b) Először ki kell számítani a mért jel abszolút középértékét, amely a háromszögjel abszolút középértékének fele:

$$U_{abs} = \frac{U_p}{4} = 0.25 \text{ V}.$$

A kijelzett érték:

$$U_{ki} = 0.25 \text{ V}.$$

c) Az eredő mérési hibában egyszeres súllyal szerepel a két ellenállás hibája, illetve az osztálypontosságból adódó hiba. Ez utóbbi értéke:

$$h = \text{op}\frac{U_{max}}{U_{ki}} = 2\%.$$

Az eredő mérési hiba, $k = 2$ kiterjesztési tényezővel, az ellenállások és a műszer hibájának egyenletes eloszlását feltételezve:

$$\frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + h^2} = 2.83\%.$$

5.25.

a) Példánk az 5.2. feladat megoldásában bemutatott 4. esetnek felel meg.

b) Ekkor a kimenőfeszültség, amely az erősítő szimmetrikus bemenőfeszültsége lesz:

$$|u_s| = U_T h_R = 10 \text{ mV}.$$

c) Az erősítő közös bemenőfeszültsége a tápfeszültség fele ($U_c = U_T/2$), tekintve, hogy a híd ellenállásai azonos névleges értékűek. Az erősítő kimenőfeszültsége a szimmetrikus és a közös bemenet erősítéséből származik:

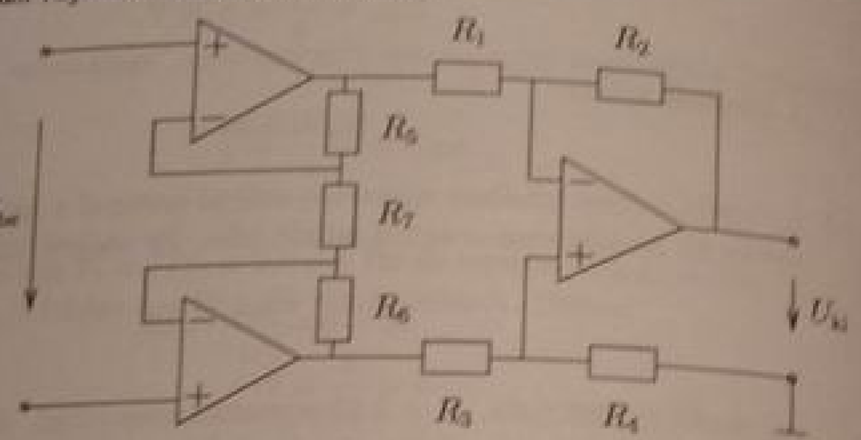
$$\begin{aligned} |u_{ki,s}| &= A_s|u_s| = 1 \text{ V}, \\ |u_{ki,c}| &= A_c|u_c| = \frac{A_s}{E}|u_c| = 0.1581 \text{ V}. \end{aligned}$$

Ennek alapján a közösjel okozta relatív mérési hiba:

$$h = \frac{|u_{ki,c}|}{|u_{ki,s}|} = 15.81\%.$$

5.26.

a) A kapcsolási rajz az alábbi ábrán látható.



Az elrendezés egyértelmű, az ellenállások értékei:

$$R_1 = R_3 = 5\ \mathrm{k\Omega},\quad R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = 25\ \mathrm{k\Omega},\quad R_7 = 5.55\ \mathrm{k\Omega}.$$

b) A szimmetrikus erősítés az ellenállásokkal kifejezve:

$$A_s = -\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_5}{R_7}\right) = -50.045,$$

a rendszeres hiba tehát:

$$h_r = 0.09\%.$$

c) A közösjelelnyomás kiszámításához először a második fokozat (differenciaerősítő) közösjelelnyomását kell meghatározni. Az erősítő közös jelre vonatkozó erősítése:

$$A_{c2} = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_1(R_3 + R_4)}. \tag{14}$$

Példánkban $R_1 = R_3 = R$, $R_2 = R_4 = 5R$, névleges értékeket tekintve. Egyetlen ellenállás konkrét értékét a névleges érték segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$R_i = R(1 \pm h),$$

ahol h a névleges értéktől való relatív eltérés maximuma. Ezt a (14) egyenletbe helyettesítve, és a worst case összegzést alkalmazva:

$$A_{c2} \cong \frac{5R^2(1+h)^2 - 5R^2(1-h)^2}{6R^2} = \frac{5R^2(4h)}{6R^2} = \frac{10}{3}h.$$

Mivel az első fokozat közös erősítése $A_{c1} = 1$, $A_c = A_{c2}$. A közösjelelnyomás tehát:

$$E = \frac{A_s}{A_c} = 0.3A_s\frac{1}{h} = 75000 = 97.5\ \mathrm{dB}.$$

5.27. A kapcsolás egyes ellenállásai az előző feladat ábráján találhatókkal könnyen azonosíthatók. A bemeneti fokozat 1 kiloohmos ellenállásai csak védelmi funkciót látnak el, az erősítés meghatározásában nincs szerepük.

a) Az egyes kivezetések összeköttetését az alábbi táblázat foglalja össze:

erősítés	összekötések		
10	4-5	11-14-15	
100	4-8	10-15	11-14
1000	4-8	9-10-15	11-14

A bemenetet a 16-os és a 3-as kivezetésre kell kötni, a kimenet az 1-es és a földre kötött 18-as kivezetés között van.

b) Az előző példában megismert gondolatmenettel, minthogy az ellenállások a differenciaerősítőben megegyeznek:

$$E = \frac{A_s}{A_c} = \frac{A_s}{2h} \approx \begin{cases} 68\ \mathrm{dB}, & \text{ha } A_s = 10 \\ 88\ \mathrm{dB}, & \text{ha } A_s = 100 \\ 108\ \mathrm{dB}, & \text{ha } A_s = 1000 \end{cases}.$$

5.28. A bemeneti közös feszültség azt jelenti, hogy mindkét bemenetre ugyanaz az U_c feszültség kapcsolódik. A szimmetrikus átvitel jó közelítéssel egységnyi, így a közösjelelnyomás a közösjel-erősítés reciproka. A közös jel hatására a kimeneten megjelenő feszültség:

$$\begin{aligned} U_m &= U_c\left[\frac{\frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} - \frac{\frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}\right] = \\ &= U_c\left[\frac{1}{1 + sR_1C_1} - \frac{1}{1 + sR_2C_2}\right]. \end{aligned}$$

A közösjelelnyomás tehát:

$$E = \frac{U_c}{U_m} = \frac{1}{\left[\frac{1}{1+sR_1C_1} - \frac{1}{1+sR_2C_2}\right]} = \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{s(\tau_2 - \tau_1)}, \tag{15}$$

ahol $\tau_1 = R_1C_1$ és $\tau_2 = R_2C_2$. Az időállandók eltérése az R és C paraméterek bizonytalanságából adódik, az időállandók névleges értéke megegyezik. Ezért a (15) egyenlet átírható a következő alakba:

$$E \cong \frac{(1+s\tau)^2}{s(\tau_2 - \tau_1)}, \tag{16}$$

ahol $\tau = RC$. Az időállandó bizonytalansága az ellenállás és a kapacitás bizonytalanságával kifejezve:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta C}{C}.$$

A worst case hibaösszegzésnek az felel meg, hogy a (16) kifejezés nevezőjében τ_2-t növeljük, τ_1-et pedig csökkentjük. s helyébe rögtön $j\omega$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy:

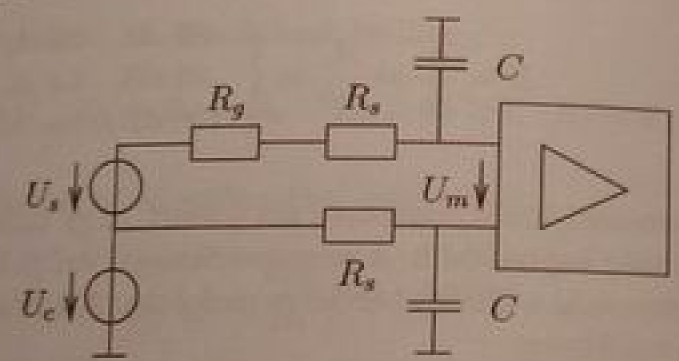
$$E \cong \frac{(1+j\omega\tau)^2}{2j\omega\Delta\tau} = \frac{(1+j\omega\tau)^2}{2\tau j\omega\frac{\Delta\tau}{\tau}}.$$

Felismerve, hogy a megadott frekvencián $\omega\tau \ll 1$, írhatjuk, hogy:

$$|E| \cong \frac{1}{2\tau\omega\frac{\Delta\tau}{\tau}} = \frac{1}{2RC\omega\frac{\Delta\tau}{\tau}} = \frac{1}{4RC\omega h} = \frac{1}{8RC\pi f h} = 3.98\cdot 10^6 = 132\ \text{dB}.$$

5.29.

a) Az elrendezés rajza az alábbi ábrán látható:



Az előerősítő kimentén megjelenő hasznos, szimmetrikus jelet jelöli U_s, a közös jelet pedig U_c. Itt az előerősítő generátor, amelynek kimeneti impedanciáját R_g jelöli. A második erősítő bemenetén megjelenő jel U_m.

b) Adott frekvenciájú közös jel hatására a voltmérőn megjelenő feszültség:

$$\begin{aligned} U_m &= U_c\left[\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_g+R_s+\frac{1}{j\omega C}} - \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_s+\frac{1}{j\omega C}}\right] = \\ &= -U_c\frac{j\omega C R_g}{1+j\omega C(R_s+2R_g)} \cong -j\omega C R_g U_c. \end{aligned}$$

A közös nevezőre hozás során elhanyagoltuk az ω^2-es tagot. Mivel két független közös feszültségünk van, továbbá azok effektív értéke adott, a második erősítő bemenetén megjelenő feszültség effektív értéke:

$$U_{be} = \sqrt{|U_{m,1}|^2 + |U_{m,2}|^2} = 2.442\ \text{mV}.$$

5.30.

a) Az RC-tag mint szűrő beállási idejének meghatározásához szükség van az időállandóra, amely:

$$T = RC = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi f_c},$$

ahol f_c a töréspont frekvencia. Ha ε-nal jelöljük a hibát, amennyire az exponenciálisan beálló szűrőkimenet a végértéket megközelítette, akkor:

$$1 - e^{-\frac{t}{T}} = 1 - \varepsilon,$$

amiből a beállási idő, az időállandó kifejezését is behelyettesítve:

$$t = -\frac{1}{2\pi f_c}\ln\varepsilon = 168.7\ \text{ms}.$$

b) A fázisérzékeny egyenirányító szorzójának kimenetén megjelenő időfüggvény:

$$U(t) = \frac{U_x U_r}{2}[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)],$$

amelynek DC-, és csillapított AC-komponense kerül az AD-átalakítóra. A csillapítás az RC-tag átviteli függvényének átvitele $f = 100$ Hz frekvencián:

$$|W(s)| = \left|\frac{1}{1+sRC}\right| = \left.\frac{1}{\sqrt{1+f^2/f_c^2}}\right|_{f=100\ \text{Hz}} = w_{100},$$

ahol az $s = j2\pi f$ helyettesítést alkalmaztuk. A szukcesszív approximációs AD-átalakító a jel pillanatértékét méri, a legkedvezőtlenebb az az eset, amikor a DC-komponens mellett az AC-komponens csúcsértékét veszi fel. Ezzel a relatív hiba kifejezése:

$$h_1 = \frac{\frac{U_x U_r}{2}w_{100}}{\frac{U_x U_r}{2}\cos\varphi} = \frac{w_{100}}{\cos\varphi} = 0.30\%.$$

c) A dual-slope AD-átalakító kiszűri azokat a szinuszos zavarjeleket, amelyekre igaz, hogy:

$$T_i = kT,$$

ahol T_i az integrálási idő, T a szinuszos zavarjel periódusideje, k pedig egész szám. A példában megadott integrálási időkre ez igaz, ezért a hiba a második esetben, egyéb szempontból ideális átalakítót feltételezve:

$$h_2 = 0.$$

5.31.

a) A csúcsérték mérésében hibát okoz a kondenzátor kisülése, illetve a dióda nyitófeszültsége. A kondenzátor feszültsége a kisülés ideje alatt az alábbi:

$$u_C(t) = U_p e^{-t/RC} \approx U_p \left(1 - \frac{t}{RC}\right).$$

A közelítés $t \ll RC$-re igaz. A csúcsegyenirányító helyes beállítása esetén azonban $T \ll RC$, azaz a periódusidő jóval kisebb az időállandónál, és a kondenzátor feltöltődik, mielőtt a közelítés hibája elfogadhatatlanul nagy lenne. A kisülés ideje alatt a kondenzátor feszültségcsökkenése lineárisnak tekinthető, a műszer által mért egyenkompones ezért a csúcsérték és a töltés előtti kondenzátorfeszültség átlaga. Írható tehát, hogy:

$$U_p \left(1 - \frac{T}{RC}\right) = U_p - 2\Delta U.$$

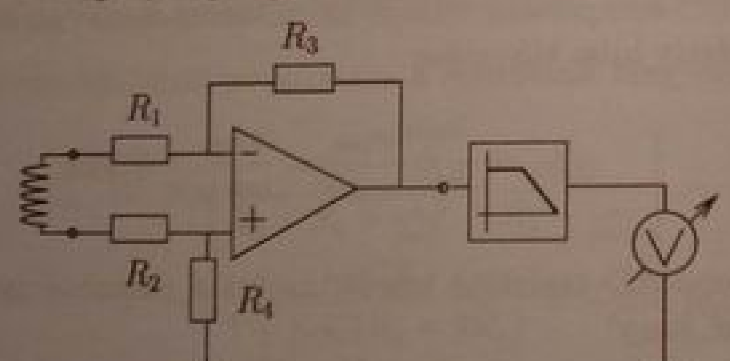
Így a csúcsértékmérés relatív hibája, a diódán eső feszültséget is beleszámítva:

$$\frac{\Delta U}{U} \cong \frac{1}{2RCf} + \frac{U_d}{U_m} = 8.22\%.$$

Mivel mindkét hiba csökkenti a mért feszültséget, ezért összeadódnak.

b) Ha a frekvencia k-szorosára csökken, ugyanakkora hibához az időállandót k-szorosára kell növelni. Ezért a kondenzátor értékét – változatlan ellenállás mellett – k-szorosára kell növelni.

5.32. A mérőműszer vázlata az alábbi ábrán látható. A mérőtekercs feszültsége egy differenciaerősítő bemenetére kerül, az erősített feszültséget pedig egy aluláteresztő szűrővel szűrjük, majd egy voltmérőre vezetjük.



a) Az indukált feszültség effektív értéke:

$$U_i = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} B\,A\,N\,f \cong 4.44\,B\,A\,N\,f = 22.21 \text{ mV}.$$

Zajmentes esetben a voltmérő a teljes indukált és erősített feszültséget méri, azaz:

$$U_1 = A_s U_i = 100\,U_i = 2.221 \text{ V}.$$

b) Zaj esetén az erősítő a zajt is erősíti A_s-szeresére, az aluláteresztő szűrő azonban teljesítményét lecsökkenti:

$$U_n^{2\prime} = \frac{f_c}{f_B} U_n^2, \quad U_n' = \sqrt{\frac{f_c}{f_B}} U_n.$$

A mért feszültség a két, egymástól független komponens effektív értékének az eredője, amit négyzetes összegzéssel számíthatunk ki:

$$U_2 = \sqrt{A_s^2 U_i^2 + A_s^2 U_n^{2\prime}} = A_s \sqrt{U_i^2 + \frac{f_c}{f_B} U_n^2} = 2.230 \text{ V}.$$

6. Idő- és frekvenciamérés

6.1. Bevezető feladatok

6.1. Az ismeretlen $f_{x,max}$ frekvencia $N = 10^5$ léptetést eredményez $t = 10$ ms alatt:

$$\frac{N}{f_{x,max}} = t.$$

Ebből:

$$f_{x,max} = 10^7 \text{ Hz} = 10 \text{ MHz}.$$

6.2. Célszerű relatív hibákkal számolni, így kevesebb átalakítást kell végezni. A frekvenciamérés megkívánt pontossága:

$$h_0 = \frac{\Delta f_x}{f_x} = 2 \cdot 10^{-4},$$

ahol $f_x = 50$ Hz, $\Delta f_x = 0.01$ Hz. Mivel a frekvencia a periódusidő reciproka, írható, hogy:

$$\left|\frac{\Delta f_x}{f_x}\right| = \left|\frac{\Delta T_x}{T_x}\right|. \tag{17}$$

a) Mivel a mérendő jel zajmentes, továbbá az órajelgenerátor hibáját elhanyagoljuk, az első kérdésben a mérési hiba a kvantálási hibával egyezik meg:

$$h_1 = \frac{1}{N} = \frac{f_x}{f_0} = 5 \cdot 10^{-5},$$

ahol N a számláló állása, f_0 pedig az órajelgenerátor frekvenciája. Mivel $h_1 < h_0$, a kívánt pontosság egyetlen periódus mérésével is teljesíthető.

b) Ha a mérendő jel zajos, a kvantálási hibához hozzáadódik a triggerhiba. Így a hiba a második kérdésben:

$$h_2 = h_1 + \frac{U_{z,p}}{\pi U_{x,p}} = 9.60 \cdot 10^{-5}.$$

c) Amennyiben átlag-periódusidőt mérünk, mind a kvantálási hiba, mind pedig a triggerhiba a mért periódusok számával arányosan csökken. A mért periódusok száma tehát:

$$n = \left[\frac{h_t}{h_q} + 1\right] = 48,$$

ahol $[.]$ egészrészképzést jelent. Mivel sok periódust kell átlagolni, a „+1" jelentősége kicsi, akár el is hagyható. A mérési idő ezek után a periódusidő és a mért periódusok számának szorzata:

$$t_m = n T_x = 0.96\ \mathrm{s} \approx 1\ \mathrm{s}.$$

6.3.

a) Először fejezzünk ki egy alapszöget:

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{b}{a} = 1.312 = 75.16°, \tag{18}$$

ahol φ_0 egy, az ellipszis alapján számítható szögérték, amellyel a fázistolás:

$$\varphi = \begin{cases} \pm\varphi_0 & \text{, ha a nagytengely az 1. és a 3. síknegyedben van} \\ \pi \pm \varphi_0 & \text{, ha a nagytengely a 2. és a 4. síknegyedben van} \end{cases}$$

b) A hibakomponensek az (18) összefüggés vizsgálatával:

$$\Delta\varphi_0|_b = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\frac{\Delta b}{b},$$

$$\Delta\varphi_0|_a = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\frac{\Delta a}{a},$$

ahol $r = b/a$.

A leolvasáskor elkövetett hibák véletlenszerűek, tetszőleges előjelűek, és általában egymástól függetlenek. Az oszcilloszkópos mérés miatt a hibára vonatkozóan csak becslést tudunk adni, ezért a korábbi hibaszámítások megfontolásait is figyelembe véve (lásd pl. 3.16., 4.19. feladat) worst case összegzést célszerű alkalmazni.

$$\Delta\varphi_0 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\left[\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right] = 0.1510 \approx 8.65°.$$

A fenti hibaszámítás alkalmazható mindaddig, amíg $r < 1$. Amennyiben $r \approx 1$, az eredmények hibásak lesznek. Ez egyrészt azért van, mert $|\varphi_0| \leq \pi/2$, de a hibaintervallum lehetővé tenne $\pi/2$-nél nagyobb szöget is; másrészt mert $r \approx 1$ esetén nem igaz a hibák függetlensége, azok egyre inkább összefüggenek, ahogyan $r \to 1$. Praktikusan annyit tehetünk, hogy a hibaintervallumot korlátozzuk úgy, hogy $|\varphi_0| \leq \pi/2$ legyen.

Megjegyzés. A fenti hibakifejezés érdekessége, hogy abszolút hibát ad meg, de relatív hibák alapján, és a szorzótényező is dimenzió nélküli. Ez azzal a veszéllyel jár, hogy a végeredményt is százalékosan adjuk meg, ami helytelen. Az eredményt valójában radiánban kapjuk meg, ami dimenzió nélküli szám.

6.2. Gyakorló feladatok

6.4. A példa első két kérdése megoldható a 6.2. feladat megoldása alapján:

a) Egy periódus mérése esetén a hiba:

$$h_1 = \frac{1}{N} = \frac{f}{f_0} = 1\%.$$

b) Átlagperiódusidő-mérés során a hiba n-ed részére csökken, azaz:

$$h_2 = \frac{h_1}{n},$$

ahol n a mért periódusok száma. Mivel a példában h_2 adott,

$$n = \frac{h_1}{h_2} = 100.$$

c) A hiba további csökkentése statisztikai átlagolással lehetséges, ebben az esetben:

$$h_3 = \frac{h_2}{\sqrt{k}},$$

ahol k az átlagolások száma. Mivel a példában h_3 volt adott,

$$k = \frac{h_2^2}{h_3^2} = 100.$$

d) Az előző képlet alkalmazható itt is, ebben az esetben a kiindulási hiba h_1, az eredmény h_2, így:

$$m = \frac{h_1^2}{h_2^2} = 10000.$$

A kvantálásból adódó hiba egyenletes eloszlású. Mivel sok független változót átlagolunk, az eredő eloszlás normális lesz.

6.5. A 6.2. példa megoldását itt is felhasználhatjuk.

a) A hiba worst case összegzéssel:

$$h_1 = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{N} \cong \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{f_0 t_m} = 1.1 \cdot 10^{-3}.$$

Az előírt relatív hiba $2 \cdot 10^{-4}$, ezért a frekvencia megmérhető a kívánt pontossággal.

b) A hiba kifejezése, az átlagolt periódusok számát a mérési idővel kifejezve:

$$h_2 = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{f_0 t_m} + \frac{U_{z,p}}{\pi U_{x,p}}\frac{1}{t_m f_x}.$$

Ha $t_m = 1$ s, $h_2 = 1.93 \cdot 10^{-4}$, tehát $t_m = 1$ s mérési időt kell kiválasztani.

6.6. Az aktuális hangsebességet egyszerűen számíthatjuk:

$$v = \frac{s}{t},$$

ahol s a hang által megtett út, t pedig a megtételéhez szükséges idő. A távolságmérés hibája adott, az időmérés hibáját pedig a következőképpen lehet meghatározni. t megbecsülhető a hangsebesség ismert értékéből:

$$\hat{v} = 340\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

amely több környezeti feltételtől, elsősorban a hőmérséklettől függ. Ennek hibája azonban csak a „hiba hibája" lesz, így precíz ismeretére nincs szükség. Ezzel:

$$t = \frac{s}{\hat{v}}.$$

Δt a mintavételi frekvenciából számítható ki. A mikrofonból vett szinuszjel késleltetése meghatározható pl. a nullátmenetek vizsgálatával. Az időmérés legkisebb egysége a mintavételi időköz, tehát:

$$\Delta t = \frac{1}{f_s},$$

ahol f_s a mintavételi frekvencia. Korábbi feladatok (pl. 4.19.) alapján:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} = 0.71\%.$$

Megjegyzés. Mivel tudjuk, hogy a jel 1 kHz frekvenciájú szinuszjel, a mintavételi tételt betartottuk, a jel időfüggvénye tetszőleges pontossággal helyreállítható. Azaz jelfeldolgozási eszközökkel elvileg nulla hibával meghatározható a késleltetés.

6.7. Az órajel hibáját elhanyagolva a hiba mindkét esetben:

$$h = \frac{1}{N}.$$

A hiba előírt értékét figyelembe véve:

$$N > 10^4.$$

A mérési idő frekvencia- és periódusidő-mérés esetében rendre:

$$N = t_m f_x \rightarrow t_m > 10\ \mathrm{s},$$
$$N = t_m f_0 \rightarrow t_m > 0.1\ \mathrm{ms}.$$

A fenti egyenletekben t_m a mérési idő, f_x a mérendő jel frekvenciája, f_0 pedig az órajel frekvenciája.

6.8. A megoldás során kihasználjuk, hogy a ténylegesen mérési idő és a műszeren beállított mérési idő jó közelítéssel megegyezik. Így a hiba:

$$h = \frac{1}{f_0 t_m} = 10^{-7}.$$

6.9. Az előző példában bemutatott közelítéssel:

$$h = \frac{1}{f_0 t_m} \rightarrow t_m = \frac{1}{f_0 h} = 0.01\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{ms}.$$

6.3. Összetett feladatok

6.10.

a) Az 1% relatív hiba 30 Hz abszolút hibát jelent. Ennyi kell legyen a DFT felbontása, azaz $\Delta f = 30$ Hz. Mivel:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N},$$

ahol f_s a mintavételi frekvencia. A szükséges mintaszám:

$$N = \frac{f_s}{\Delta f} \approx 267.$$

b) A mérési idő a mintavételi időköz N-szerese, azaz

$$t_m = N\frac{1}{f_s} \cong 33\ \mathrm{ms}.$$

c) A 6.5. példa megoldását felhasználva:

$$h = \frac{U_{z,p}}{\pi U_{x,p}}\frac{1}{t_m f_s} \cong 2.23 \cdot 10^{-4}.$$

6.11.

a) A háromféle mérési mód csak a kvantálási hibában különbözik egymástól, így csak azt számítjuk ki.
Frekvenciamérés esetén a mérési idő, illetve a számláló állása:

$$t_m = \frac{n_f}{f_0},\quad N_f = \frac{f_x}{f_0}n_f,$$

ahol f_0 az órajel, f_x a mérendő frekvencia, n_f az órajel leosztása. A számláló állása a mérési idővel:

$$N_f = f_x t_m.$$

Periódusidő, átlag-periódusidő mérése esetén a mérési idő, illetve a számláló állása:

$$t_m = \frac{n_t}{f_x}, \quad N_t = \frac{f_0}{f_x} n_t,$$

ahol f_0 az órajel, f_x a mérendő frekvencia, n_t a mérendő jel leosztása. A számláló állása a mérési idővel:

$$N_t = f_0 t_m.$$

Az az üzemmód pontosabb, amelyben adott mérési idő alatt több impulzus számlálására kerül sor. Mivel $f_0 > f_x$, célszerű periódusidő-mérést választani.

b) A hiba, az órajel hibáját is figyelembe véve:

$$h_1 = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{N} \cong \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{f_0 t_m} = 5.01 \cdot 10^{-4}.$$

c)

$$h_2 = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{N} \cong \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{f_0 t'_m} = 6 \cdot 10^{-6}.$$

A mérési hiba a második esetben nagyon kicsiny. Ekkor már nem reális feltevés, hogy a jel zajmentesnek tekinthető. További probléma, hogy a mérési intervallumba a jel 10000 periódusa esik, így elképzelhető, hogy közben frekvenciája is megváltozik a hibának megfelelő nagyságrendben, tehát a jel frekvenciáját konstansnak feltételező eljárás hamis eredményt ad. Röviden azt mondhatjuk, hogy a mérendő jel frekvenciastabilitása nagy valószínűséggel nem olyan jó, mint amilyen pontos a mérés.

6.12.

a) A frekvenciamérés hibája megegyezik a periódusidő-mérés hibájával (lásd 6.2., 6.5. példák):

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} \cong \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{t_m f_0} = 3.02 \cdot 10^{-5}.$$

b) A fázismérés hibájának kifejezéséhez írjuk fel először a fázis kiszámítására szolgáló összefüggést:

$$\varphi = 2\pi \frac{\tau}{T_x} = 2\pi\tau f_x. \tag{19}$$

Ebből a fázismérés hibája:

$$\Delta\varphi = \varphi \left[\frac{\Delta(f_x)'}{f_x} + \frac{\Delta\tau'}{\tau} \right].$$

A $\Delta(f_x)'$ és $\Delta\tau'$ jelölés magyarázata a következő: A műszer órajele mind τ, mind pedig T_x mérésében ugyanolyan előjelű és nagyságú hibát okoz (feltéve, hogy a frekvenciája stabil), így a (19)-ben szereplő hányadosképzés során kiesik. Ugyanakkor τ és T_x mérésének vannak független hibakomponensei, ezek szerepelnek a fenti képletben. Minthogy ezek a hibakomponensek nem egyeznek meg τ és T_x önálló mérésének hibájával, megkülönböztetésül vesszővel jelöltük őket. Erre a véletlen komponensre nézve természetesen igaz (17).
A mérési idő alatt a τ intervallumot éppen $n = [t_m f_x] \cong t_m f_x$-szer mérjük meg, ahogyan T_x-et is. Viszont a τ intervallumok nem folytonosan követik egymást, így – feltételezve, hogy f_x és f_0 nem szinkronizált – n független mérésünk van, azaz a hiba nem a periódusméréshez hasonlóan n-edrészére, hanem csak $\sqrt{n}$-edrészére csökken az átlagolás során. Így τ mérésének hibája:

$$\frac{\Delta\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{t_m f_x}} \frac{1}{\tau f_0}.$$

A fázismérés hibája tehát:

$$\Delta\varphi = \varphi \left[\frac{1}{t_m f_0} + \frac{1}{\sqrt{t_m f_x}} \frac{1}{\tau f_0} \right] = 1.379 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 7.903 \cdot 10^{-4}\,^\circ.$$

c) Kézenfekvő gondolat, hogy a mérés hibája csökkenthető, ha a mérendő intervallumot növeljük, ahogyan a példa javasolja. Ezek a módszerek lecsökkentik a mérés relatív hibáját, de az abszolút hibát nem. A fázismérés abszolút hibája – a mérendő intervallumot most t-vel jelölve és a (19) összefüggést is behelyettesítve:

$$\Delta\varphi = 2\pi t f_x \left[\frac{1}{t_m f_0} + \frac{1}{\sqrt{t_m f_x}} \frac{1}{t f_0} \right].$$

Látszik, hogy az intervallum méréséből adódó hibakomponens független t-től, míg a frekvencia méréséből adódó hibakomponens kismértékben nő. Így a fázismérés pontossága a javasolt módszerrel nem növekszik.

6.13. A feladat nem specifikálja, hogy az RC-tag felül- vagy aluláteresztő. Ez azonban a megoldás szempontjából közömbös, hasonló eljárás adható mindkét esetben. Két megoldást mutatunk be: egy időtartománybelit és egy frekvenciatartománybelit.

a) (1) Az időtartományban a gerjesztés négyszögjel, a kimenetet oszcilloszkópon figyeljük meg.

(2) A gerjesztés szinuszos jel, a kimenetet effektívérték-mérővel figyeljük meg.

b) (1) A négyszögjel frekvenciáját úgy kell beállítani, hogy $T/2 \gg \tau$. Az RC-tag kimenete DC gerjesztésre adott válaszhoz hasonlóan exponenciálisan áll be:

$$u_L(t) = U_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad u_H(t) = U_H e^{-t/\tau},$$

ahol az L és H index rendre alul- és felüláteresztő RC-tagra utal. Ezek kezdeti meredeksége (az idő szerinti derivált $t = 0$-ban):

$$m_L = \frac{U_L}{\tau}, \quad m_H = -\frac{U_H}{\tau}.$$

Ha a jelváltozás éppen a kezdeti meredekség lenne, az állandósult állapotot (U_L-t, illetve a zérust) éppen $t = \tau$ idő múlva érnék el. A mérés során tehát érintőt kell illeszteni az oszcilloszkóp képernyőjén megjelenő görbéhez, és megmérni azt az időt, amennyi alatt az érintő az állandósult állapothoz tartozó szintet eléri. Ez az idő éppen az időállandó.

(2) A mérés során meg kell keresni az ún. 3 dB-es pontot, azaz azt a frekvenciát, amelyen az átvitel az áteresztőtartományhoz képest 3 dB-t csökken. A referenciaszint (amihez képest a csökkenést tekintjük) meghatározásához a legjobb módszer az, ha a frekvenciát nagy lépésekben változtatva megbecsüljük a 3 dB-es pontot, majd ehhez képest egy-két nagyságrenddel kisebb vagy nagyobb frekvenciát állítunk be rendre alul-és felüláteresztő RC-tag esetén. A 3 dB-es ponthoz tartozó frekvenciát f_c-vel jelölve:

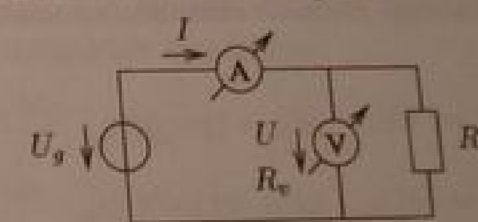
$$\tau = \frac{1}{2\pi f_c}.$$

Megjegyzés. Az első módszer igen pontatlan, inkább csak tájékozódó mérésre alkalmas.

7. Impedancia- és teljesítménymérés

7.1. Bevezető feladatok

7.1. A voltmérő belső ellenállása az alábbi kapcsolás szerint okoz hibát:



Ilyenkor ugyanis az ampermérő nemcsak a fogyasztón, hanem a voltmérő belső ellenállásán folyó áramot is méri. A mért és a fogyasztón valóban disszipálódó teljesítmény:

$$P_m = UI = 1\text{ W}, \quad P_h = UI - \frac{U^2}{R_v} = 990\text{ mW}.$$

A mérés rendszeres hibája:

$$\Delta P = P_m - P_h = \frac{U^2}{R_v} = 10\text{ mW}.$$

A fogyasztó ellenállása:

$$R = \frac{U^2}{P_h} = 101.0\ \Omega.$$

7.2. A hasznos teljesítmény kiszámításához az áram effektív értéke szükséges. Az összes disszipálódott teljesítmény a különböző frekvenciákhoz tartozó teljesítmények összege, azaz:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = \left(I_0^2 + \frac{I_{AC,p}^2}{2}\right) R = 150\text{ mW}.$$

7.3. Hasznos teljesítmény csak az R ellenálláson disszipálódik, ezért:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = 100 \text{ mW}.$$

7.4. Az ellenállás kifejezése:

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N},$$

ahol R_N a normálellenállás, U_N és U_x rendre a rajta és a mérendő ellenálláson eső feszültség. Mivel ugyanazt a voltmérőt használjuk, a műszer hibái a két mérés során azonosak. A példában szereplő két hibafajtára ezek nagysága és előjele megegyezik, ezért előjeles összegzést alkalmazhatunk. A fenti egyenlet alapján:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + \frac{\Delta U_x}{U_x} - \frac{\Delta U_N}{U_N}. \tag{20}$$

a) A voltmérők által mért érték, az abszolút és a relatív mérési hiba a következő:

$$\begin{aligned} U_{x,m} &= kU_x, \ \ \Delta U_x = (k-1)U_x, \ \ \frac{\Delta U_x}{U_x} = k-1; \\ U_{N,m} &= kU_N, \ \ \Delta U_N = (k-1)U_N, \ \ \frac{\Delta U_N}{U_N} = k-1, \end{aligned}$$

ugyanis k helyes értéke egységnyi. A hibakomponenseket a (20) egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_N}{R_N}.$$

b) A voltmérők által mért érték, az abszolút és a relatív mérési hiba a következő:

$$\begin{aligned} U_{x,m} &= U_x + U_0, \ \ \Delta U_x = U_0, \ \ \frac{\Delta U_x}{U_x} = \frac{U_0}{U_x}; \\ U_{N,m} &= U_N + U_0, \ \ \Delta U_N = U_0, \ \ \frac{\Delta U_N}{U_N} = \frac{U_0}{U_N}, \end{aligned}$$

ahol U_0 az ofszethiba. A hibakomponenseket a (20) egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + U_0 \left[\frac{1}{U_x} - \frac{1}{U_N} \right].$$

Megjegyzés. A nullponthiba hatása annál kisebb, minél kisebb az eltérés U_x és U_N között. Ebből következik, hogy a feszültség-összehasonlításra visszavezetett ellenállásmérés esetén célszerű az $R_x \approx R_N$ beállításra törekedni. A hibaszámítási megfontolásokkal kapcsolatban lásd még: 2.23. példa.

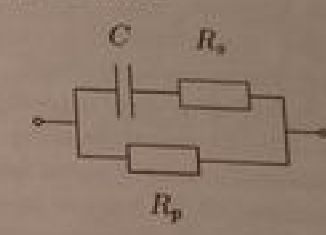
7.5. A soros ohmmérő hibája minimális, ha $R_s = R_x$, tehát

$$R_s = R_x = 1 \text{ k}\Omega.$$

Ekkor a hiba:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = 4\,\text{op} = 2\%.$$

7.6. A kondenzátor modellje az alábbi:



A kapacitás a példában megadott érték: $C = 100$ nF. A megadott adatok alapján a kondenzátor veszteségeiben a kisebb frekvencián a párhuzamos vezetés, a nagyobb frekvencián a soros ellenállás dominál, így a két veszteségi tényezőt külön-külön az ábrán látható két ágra felírva:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\omega R_p C}, \\ D_2 &= \omega R_s C, \end{aligned}$$

azaz az ellenállások:

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{1}{\omega D_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 D_1 C} = 1.592 \text{ M}\Omega, \\ R_s &= \frac{D_2}{\omega C} = \frac{D_2}{2\pi f_2 C} = 21.22 \text{ m}\Omega. \end{aligned}$$

7.7. A kiegyenlítés feltétele általánosan:

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4},$$

ahol példánkban $Z_1 = Z_x$. Az egyes hídkapcsolások vizsgálatánál az impedanciákat az elemi kétpólusokkal kell felírni.

a) A kiegyenlítés feltétele:

$$\frac{1}{R_3(G_x + 1/j\omega L_x)} = \frac{R_2}{R_4 + 1/j\omega C_4}.$$

Ebből a mérendő impedancia elemei:

$$G_x = \frac{R_4}{R_2 R_3} = 100 \ \mu\text{S}, \ \ (R_x = 10 \text{ k}\Omega), \ \ L_x = C_4 R_2 R_3 = 100 \text{ mH}.$$

b) $\omega = 2000$ 1/s esetén a mérendő impedancia elemei az alábbiak:

$$G_{x,2} = \frac{R_4}{R_2R_3} = 25\ \mu\text{S}, \quad L_{x,2} = C_4R_2R_3 = 100\ \text{mH}.$$

Az egyidőállandós passzív kétpólusok soros vagy párhuzamos, induktív vagy kapacitív elemek lehetnek, tehát összesen négyféle helyettesítőkép létezik. Ha ezen modellek valamelyike jól modellez egy valóságos immitanciát, akkor paraméterei frekvenciafüggetlenek. Ha a reaktáns elem kiválasztása rossz, negatív induktivitás vagy kapacitás adódik. Mivel jelen esetben $L_x = L_{x,2} > 0$, az induktív helyettesítőkép megfelelő. Mivel azonban $G_{x,2} = G_x/4$, megvizsgálandó, hogy a soros helyettesítőkép nem jobb-e. Ennek elemeit úgy számíthatjuk ki, hogy a jelenleg adott elemekkel és a soros kép elemeivel is felírjuk a mérendő impedanciát:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Y_x} &= Z_x,\\ \frac{1}{G_x + 1/j\omega L_x} &= R_s + j\omega L_s.\end{aligned}$$

Némi számolás után:

$$\begin{aligned}R_{s,1} &= \frac{\omega_1^2 G_x L_x^2}{1+\omega_1^2 G_x^2 L_x^2} = 0.9999\ \Omega, \quad R_{s,2} = 0.9996\ \Omega;\\ L_{s,1} &= \frac{L_x}{1+\omega_1^2 G_x^2 L_x^2} = 99.99\ \text{mH}, \quad L_{s,2} = 99.96\ \text{mH}.\end{aligned}$$

Mivel $R_{s,1} \cong R_{s,2}$ és $L_{s,1} \cong L_{s,2} \cong L_x$, a soros modell a vizsgált frekvenciák környezetében jobb modell, mint a párhuzamos.

c) A kapcsolási érzékenység

$$H = \frac{\Delta U_0/U_g}{\Delta Z_x/Z_x}$$

alakban írható, ahol ΔU_0 a híd kimenőfeszültségének kismértékű megváltozása a kiegyenlített állapot környezetében, U_g a tápfeszültség. A hídban elhelyezkedő impedanciák segítségével:

$$H = \frac{F_0}{(1+F_0)^2}, \quad F_0 = \frac{Z_2}{Z_x} = \frac{Z_4}{Z_3}.$$

Ha $Z_2/Z_x = 1 + j$, akkor

$$H = 0.28 + j0.04.$$

Megjegyzés. A feladat csak annyiban igényli a Hay-híd ismeretét, hogy ellenőrizhessük, miszerint Z_2/Z_1 felveheti-e a megadott értéket.

7.8. A jósági tényező a meddő és a hatásos teljesítmény hányadosa:

$$Q = \frac{P_m}{P_h} = \frac{I^2\omega L_s}{I^2 R_s} = \frac{\omega L_s}{R_s},$$

ahol L_s és R_s a soros RL-tag két eleme, I pedig a rajtuk átfolyó áram. A veszteségi tényező és a disszipációs faktor megegyezik:

$$D = \text{tg}\delta = \frac{1}{Q} = \frac{R_s}{\omega L_s}.$$

A helyettesítőképek kiszámításánál úgy járhatunk el, hogy a kívánt kép impedanciáját (vagy admittanciáját) egyenlővé tesszük a keresett kép impedanciájával (vagy admittanciájával), és a reális, illetve képzetes mennyiségek egyenlősége alapján kifejezzük a keresett kép elemeit. A soros RL-tag impedanciája, ill. admittanciája:

$$Z_{L,s} = R_s + j\omega L_s, \quad Y_{L,s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} = \frac{1}{R_s}\frac{1 - j\omega L_s/R_s}{1+\omega^2 L_s^2/R_s^2}.$$

A párhuzamos RL-tag admittanciája alapján:

$$\begin{aligned}Y_{L,s} &= Y_{L,p} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p};\\ R_p &= R_s\left(1 + \omega^2\frac{L_s^2}{R_s^2}\right) = R_s(1+Q^2),\\ L_p &= L_s\frac{1+\omega^2 L_s^2/R_s^2}{\omega^2 L_s^2/R_s^2} = L_s\frac{1+Q^2}{Q^2} = L_s(1+D^2).\end{aligned}$$

Jól látszik, hogy kis veszteségű (nagy jóságú) tekercs esetében $L_p \approx L_s$. A soros RC-tag impedanciája alapján:

$$\begin{aligned}Z_{L,s} &= Z_{C,s} = R_{C,s} + \frac{1}{j\omega C_s};\\ R_{C,s} &= R_s,\\ C_s &= -\frac{1}{\omega^2 L_s}.\end{aligned}$$

A kapacitás tehát negatív. A párhuzamos RC-tag admittanciája alapján:

$$\begin{aligned}Y_{L,s} &= Y_{C,p} = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p;\\ R_p &= R_s\left(1 + \omega^2\frac{L_s^2}{R_s^2}\right) = R_s(1+Q^2),\\ C_p &= -\frac{L_s}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}.\end{aligned}$$

A kapacitás itt is negatív, és kis veszteségű (nagy jóságú) tekercs esetében $C_p \approx C_s$.

7.9. A veszteségi tényező az impedancia elemeivel felírva:

$$D = \frac{P_h}{P_m} = \frac{I^2 R_{C,s}}{I^2/\omega C_s} = \omega R_{C,s}C_s.$$

Az impedancia, a fenti összefüggést is behelyettesítve:

$$Z_{C,s} = R_{C,s} + \frac{1}{j\omega C_s} = R_{C,s}\left(1+\frac{1}{jD}\right) = \frac{1}{j\omega C_s}(1+jD).$$

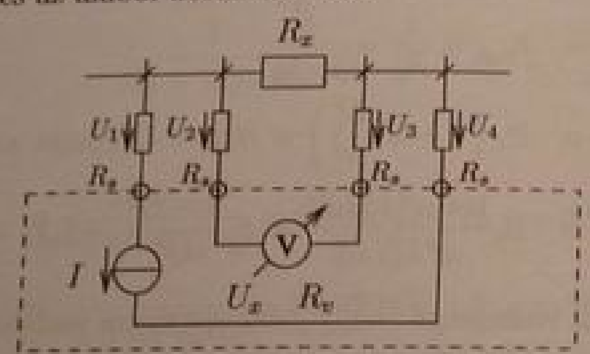
Mivel:

$$Z_{L,s} = R_{L,s} + j\omega L_s,$$

a $Z_{C,s} = Z_{L,s}$ egyenlőség alapján:

$$\begin{aligned} R_{L,s} &= R_{C,s}\frac{D}{\omega C_s} = 10\ \mu\Omega, \\ L_s &= -\frac{R_{C,s}}{\omega D} = -\frac{1}{\omega^2 C_s} = 2.536\ \text{nH}. \end{aligned}$$

7.10. Az elrendezés az alábbi ábrán látható:

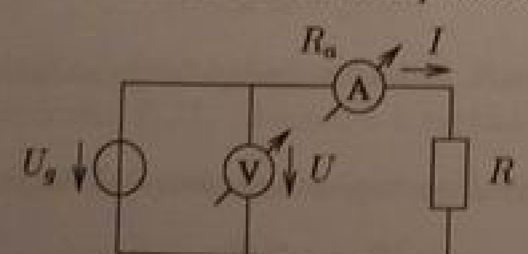


Az ábra jelöléseivel:

$$\begin{aligned} U_1 = U_4 &= IR_s = 10\ \text{mV}, \\ U_2 = U_3 &= \frac{U_x}{R_v}R_s = \frac{IR_x}{R_v}R_s = 100\ \text{nV}. \end{aligned}$$

7.2. Gyakorló feladatok

7.11. Az ampermérő belső ellenállása az alábbi kapcsolás szerint okoz hibát:



Ilyenkor ugyanis a voltmérő nemcsak a fogyasztón, hanem az ampermérő belső ellenállásán eső feszültséget is méri. A mért és a fogyasztón valóban disszipálódó teljesítmény:

$$P_m = UI = 10\ \text{W}, \quad P_h = UI - I^2R_a = 9.5\ \text{W}.$$

A mérés rendszeres hibája:

$$\Delta P = P_m - P_h = I^2R_a = 0.5\ \text{W}.$$

A fogyasztó ellenállása:

$$R = \frac{P_h}{I^2} = 9.5\ \Omega.$$

7.12. A példa a 7.4. feladat mintájára oldható meg. Az ellenállás kifejezése:

$$R_x = R_N\frac{I_N}{I_x},$$

ahol R_N a normálellenállás, I_N és I_x rendre a rajta és a mérendő ellenálláson folyó áram.

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + \frac{\Delta I_N}{I_N} - \frac{\Delta I_x}{I_x}. \tag{21}$$

a) Az ampermérők relatív mérési hibái a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I_x}{I_x} &= k-1, \\ \frac{\Delta I_N}{I_N} &= k-1. \end{aligned}$$

A hibakomponenseket a (21) egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_N}{R_N}.$$

b) Az ampermérők relatív mérési hibái a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I_x}{I_x} &= \frac{I_0}{I_x}; \\ \frac{\Delta I_N}{I_N} &= \frac{I_0}{I_N}, \end{aligned}$$

ahol I_0 az ofszethiba. A hibakomponenseket a (21) egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + I_0\left[\frac{1}{I_N} - \frac{1}{I_x}\right].$$

7.13. A párhuzamos ohmmérő hibája minimális, ha $R_s = R$, ekkor a hiba az osztálypontosság négyszerese, azaz:

$$R_s = R = 1\ \text{k}\Omega, \quad h = 4\,\text{op} = 2\%.$$

7.14. 4 vezetékes mérés esetén a mérővezetékek nem okoznak hibát. Ezen a frekvencián a szórt kapacitások hatásával sem kell számolni, ezért a hiba csak a feszültség- és árammérés hibájától függ:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 1\%.$$

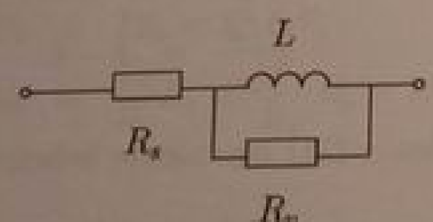
7.15. Ebben a mérésben a mérővezetékek rendszeres hibát okoznak, a 3. vezeték nem küszöböli ki a hibát. A legkedvezőtlenebb esetben a rendszeres hiba előjelével egyezik meg a véletlen hibák előjele is:

$$\frac{\Delta R}{R} = h_r + \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = \frac{2R_s}{R} + \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 3\%.$$

7.16. Az 5 vezetékes mérés – elvileg – minden zavaró hatást kiküszöböl. Ez a példában adott frekvencián a gyakorlatban is jól teljesül. Így a mérési hiba:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 1\%.$$

7.17. A mért vasmagos induktivitás modellje az alábbi ábrán látható:



ahol R_s a rézveszteséget, R_v pedig a vasveszteséget reprezentálja, L az induktivitás. A soros ohmmérővel egyenáramú mérést végzünk, így a példában megadott R_s közvetlenül a rézveszteséget adja:

$$R_s = 0.5\ \Omega.$$

A soros helyettesítőkép elemei a fenti ábrán látható impedancia valós és képzetes részének megfeleltetésével írhatók fel:

$$R_h = R_s + \frac{\omega^2 L^2 R_v}{\omega^2 L^2 + R_v^2},$$

$$L_h = \frac{L R_v^2}{\omega^2 L^2 + R_v^2}.$$

Ezekből a kérdéses paraméterek kifejezhetők:

$$R_v = R'_h \frac{r^2 + \omega^2}{r^2} = 999.5\ \Omega,$$

$$L = \frac{r R_v}{\omega^2} = 20.00\ \text{mH};$$

ahol:

$$r = \frac{R'_h}{L_h};\ R'_h = R_h - R_s.$$

7.18. A hibát az okozza, hogy az árammérő nem a mérendő ellenálláson folyó teljes I_x áramot méri, hanem annak egy része az egyik $R_f = 1$ kΩ-os ellenálláson elfolyik. Az okozott hiba:

$$h = \frac{\Delta I}{I_x} = \frac{\frac{R_a}{R_f + R_a} I_x}{I_x} \approx \frac{R_a}{R_f} = 0.1\%.$$

7.19. Nem érdemes 4 vezetékes mérést végezni, ha a vezetékek okozta hiba az egyéb hibákhoz képest elhanyagolható:

$$\frac{2R_s}{R_x} \ll h_m,$$

ahol R_s az egyes vezetékek ellenállása, R_x a mérendő ellenállás és h_m a műszer hibája. Ennek alapján:

$$R_x \gg \frac{2R_s}{h_m} = 1\ \text{k}\Omega$$

esetén nem érdemes a 4 vezetékes mérést alkalmazni. A „≫" mértéke nem egzakt, kb. egy nagyságrend különbséget jelent. Ez azt jelenti, hogy érdemes a 4 vezetékes mérést alkalmazni, ha a mérendő ellenállás

$$R_x < 10\ \text{k}\Omega.$$

7.20. A veszteségi tényező:

$$D = \omega R_s C_s = 6.28 \cdot 10^{-4}.$$

A helyettesítőképek:

$$Y_{C,p} = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p, \quad Y_{C,s} = j\omega C_s \frac{1 - j\omega R_s C_s}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2}.$$

Ebből:

$$C_p = C_s \frac{1}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2} = C_s \frac{1}{1 + D^2} \cong 100\ \text{nF}.$$

7.21.

a) A hasznos teljesítmény (P) és $\cos\varphi$ értéke:

$$P=\frac{U_G^2-U_Z^2-U_R^2}{2R}=163.6\ \mathrm{mW},\quad \cos\varphi=\frac{U_G^2-U_Z^2-U_R^2}{2U_ZU_R}=0.4863.$$

b) Az osztálypontosság segítségével kifejezhetők a feszültségmérés során elkövetett relatív hibák:

$$h_G=\frac{U_{\max}}{U_G}\,\mathrm{op},\quad h_Z=\frac{U_{\max}}{U_Z}\,\mathrm{op},\quad h_R=\frac{U_{\max}}{U_R}\,\mathrm{op}.$$

P mérése relatív hibájának relatív érzékenységei a következők:

$$c_G=\frac{2U_G^2}{U_G^2-U_Z^2-U_R^2},\quad c_Z=\frac{2U_Z^2}{U_G^2-U_Z^2-U_R^2},\quad c_R=\frac{2U_R^2}{U_G^2-U_Z^2-U_R^2}.$$

Ezzel a teljesítménymérés hibája, a voltmérők hibájának egyenletes eloszlását feltételezve, $k=2$ kiterjesztési tényezővel:

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{c_G^2h_G^2+c_Z^2h_Z^2+c_R^2h_R^2}=4.56\%.$$

$\cos\varphi$ mérése abszolút hibájának relatív érzékenységei a következők:

$$q_G=\frac{U_G^2}{U_ZU_R},\quad q_Z=\frac{U_R^2-U_G^2-U_Z^2}{2U_ZU_R},\quad q_R=\frac{U_Z^2-U_G^2-U_R^2}{2U_ZU_R}.$$

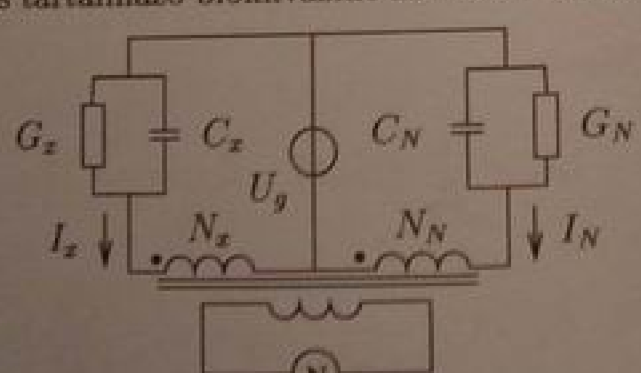
Jól látható, hogy a kifejezések nem minden esetben hasonló alakúak. Ezzel $\cos\varphi$ mérésének hibája, a voltmérők hibájának egyenletes eloszlását feltételezve, $k=2$ kiterjesztési tényezővel:

$$\Delta\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{q_G^2h_G^2+q_Z^2h_Z^2+q_R^2h_R^2}=0.03053.$$

c) A mérés nem specifikálja φ előjelét, ezért a mérési eredmények alapján nem lehet megállapítani, hogy a terhelés induktív vagy kapacitív.

7.22.

a) Az áramirányokat is tartalmazó blokkvázlat az alábbi ábrán látható.



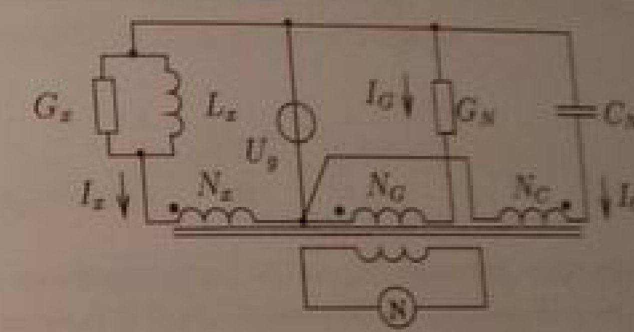
A kiegyenlítés feltétele:

$$\begin{aligned} N_xI_x &= N_NI_N,\\ N_x(G_x+j\omega C_x) &= N_N(G_N+j\omega C_N).\end{aligned}$$

Ebből a mérendő impedancia elemei:

$$G_x=\frac{N_N}{N_x}G_N=0.1\ \mathrm{mS},\quad C_x=\frac{N_N}{N_x}C_N=10\ \mathrm{nF}.$$

b) A blokkvázlat az alábbi ábrán látható.



A kiegyenlítés feltétele ebben az esetben:

$$\begin{aligned} N_xI_x &= N_GI_R-N_CI_C,\\ N_x(G_x+1/j\omega L_x) &= N_GG_N-N_Cj\omega C_N.\end{aligned}$$

Ebből a mérendő impedancia elemei:

$$G_x=\frac{N_G}{N_x}G_N,\quad L_x=\frac{N_x}{N_C}\frac{1}{C_N\omega^2}.$$

7.23.

a) Az impedancia abszolút értéke és fázisa:

$$|Z|=\frac{U_x}{U_N}R_N=97.50\ \Omega,\quad \varphi=\arccos\frac{U_g^2-U_x^2-U_N^2}{2U_xU_N}=1.5406=88.25^\circ.$$

b) $|Z|$ hibájának becslésénél csak a kvantálási hibára van információnk. Ezt felhasználva a hiba:

$$\frac{\Delta|Z|}{|Z|}=\frac{\Delta R_N}{R_N}+\frac{\Delta U_x}{U_x}+\frac{\Delta U_N}{U_N}=0.01\%+\frac{1}{7053}+\frac{1}{6877}=3.87\cdot10^{-4}\approx0.04\%.$$

c) Mivel $\cos\varphi$ kifejezésében különbségek szerepelnek, $\cos\varphi\approx0$, azaz $\varphi\approx90^\circ$ esetén az eljárás nagyon érzékeny lesz a feszültségmérés hibájára. Mivel példánkban ez az eset állt elő, az impedancia abszolút értékének mérése pontosabb.

7.24.

a) A kiegyenlítés feltétele:

$$\frac{Z_x}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4},$$

$$\frac{R_x + j\omega L_x}{R_3} = R_2(G_4 + j\omega C_4).$$

Ebből a mérendő impedancia elemei:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} = 1\ \Omega, \quad L_x = R_2 R_3 C_4 = 5\ \text{mH}.$$

b)

$$Q = \frac{2\pi f L_x}{R_x} = 5.$$

c) A kondenzátor veszteségi tényezőjét legegyszerűbben úgy vehetjük figyelembe, hogy a párhuzamos helyettesítőképet alkalmazzuk:

$$R_p = \frac{1}{D_4 2\pi f C_4} = 1\ \text{M}\Omega, \quad G_p = D_4 2\pi f C_4 = 1\ \mu\text{S}.$$

Ez az ellenállás R_4-gyel párhuzamosan kapcsolódik. Kiegyenlítés esetén a hídról leolvasott ellenállás R_4 lesz, a valódi kiegyenlítő ellenállás viszont a két ellenállás párhuzamos eredője, azaz R_4-nél kisebb érték. Eszerint a hiba pozitív előjelű. Az eredő ellenállás:

$$G_4' = G_4 + G_p = 101\ \mu\text{S}, \quad R_4' = \frac{1}{G_4 + G_p} \cong 9901\ \Omega.$$

A hiba pedig:

$$h = \frac{R_4 - R_4'}{R_4} = \frac{G_p}{G_4 + G_p} = 0.99\%.$$

7.25.

a) A kiegyenlítés feltétele:

$$\frac{Z_N}{Z_x} = \frac{Z_4}{Z_3},$$

$$j\omega C_N(R_x + 1/j\omega C_x) = (j\omega C_4 + G_4)R_3.$$

Ebből a mérendő impedancia elemei:

$$R_x = \frac{C_4 R_3}{C_N} = 100.9\ \Omega, \quad C_x = \frac{C_4}{G_4 R_3} = 110.0\ \text{nF}.$$

b) A veszteségi tényező:

$$\mathrm{tg}\delta = \omega R_x C_x = \omega R_4 C_4 = 0.011.$$

c) Szigetelésvizsgálat során a vizsgált anyagot kondenzátor fegyverzetei közé helyezik. Minél jobb szigetelő egy anyag, annál nagyobb feszültséget visel el átütés nélkül. A mérés során a kondenzátor helyettesítőképét egyre nagyobb feszültség mellett mérik meg. Lineáris rendszer esetén a helyettesítőkép elemei feszültségfüggetlenek, de az átütési feszültséghez közeledve az ún. könyökfeszültség elérésekor a veszteségi tényező emelkedni kezd. A könyökfeszültségből következtetni lehet az átütési feszültségre, így az anyag károsodása nélkül lehet vizsgálatot végezni.

7.26.

a) A híd kimenőfeszültsége:

$$U_0 = U_g \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} = U_g \frac{Z_2 R - Z_x R}{(Z_x + Z_2)2R} = \frac{U_g}{2}\frac{Z_2 - Z_x}{Z_2 + Z_x}.$$

A keresett impedancia:

$$Z_x = Z_2 \frac{U_g - 2U_0}{U_g + 2U_0} = [31.45 + j23.59]\ \text{k}\Omega = 39.31 \cdot e^{j(-36.88^\circ)}\ \text{k}\Omega.$$

Z_x kiszámításához szükséges volt Z_2 megadása:

$$Z_2 = R_2 \times \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}.$$

b) Ha úgy tekintenők, hogy a híd kiegyenlített, az azt jelentené, hogy $Z_x = Z_2$. Az abszolút és a relatív hiba abszolút értéke:

$$|\Delta Z_x| = \left| Z_2 \left(\frac{U_g - 2U_0}{U_g + 2U_0} - 1 \right) \right| = \left| -\frac{4U_0 Z_2}{U_g + 2U_0} \right| \cong \left| \frac{4U_0}{U_g} \right| |Z_2| = 841.4\ \Omega,$$

$$\left| \frac{\Delta Z_x}{Z_x} \right| = \left| -\frac{4U_0 Z_2}{U_g + 2U_0} \frac{1}{Z_2} \frac{U_g + 2U_0}{U_g - 2U_0} \right| = \left| -\frac{4U_0 Z_2}{U_g - 2U_0} \right| \cong \left| \frac{4U_0}{U_g} \right| = 2.16\%.$$

A közelítések azért jogosak, mert $U_0 \ll U_g$.

c) U_0 mérésére vektorvoltmérőt kell alkalmazni, mert Z_x kifejezéséhez szükség van U_0 fázisára is. A fázismérés többféleképpen lehetséges: (a) oszcilloszkóppal, pl. Lissajous-ábrával, vagy időintervallum-méréssel; (b) digitálisan, kétcsatornás AD-átalakítással; (c) fázisérzékeny egyenirányítóval.

7.3. Összetett feladatok

7.27. A 7.24. példa alapján a mérendő impedancia elemei:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}, \quad L_x = R_2 R_3 C_4.$$

A hőmérséklet-változás hatására az egyes ellenállások megváltozása azonos előjelű és azonos arányú:

$$\frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_3}{R_3} = \frac{\Delta R_4}{R_4} = \alpha \Delta T = 1\%.$$

A hiba jellege miatt előjeles összegzést alkalmazhatunk, így R_x és L_x relatív megváltozása:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R_x}{R_x} &= \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} = 1\%, \\ \frac{\Delta L_x}{L_x} &= \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} = 2\%. \end{aligned}$$

7.28.

a) Feszültség-összehasonlítás esetén:

$$|Z_x| = \frac{U_x}{U_N} R_N = 41\ \Omega.$$

b) Az impedanciát felírhatjuk a mért abszolút értékkel és fázissal, valamint a helyettesítőkép elemeivel. Ezeket egymással egyenlővé téve kifejezhetők a kérdéses elemek.

$$Z_x = |Z_x|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R_x + j\omega L_x.$$

Ebből:

$$\begin{aligned} R_x &= |Z_x|\cos\varphi = 9\ \Omega, \\ L_x &= |Z_x|\frac{\sin\varphi}{\omega} = 40\ \text{mH}. \end{aligned}$$

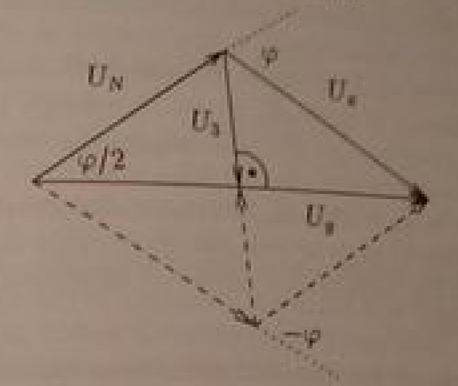
c) A példa szövege szerint a fázismérés hibáját elhanyagolhatjuk. Ebben az esetben $\sin\varphi$ is pontos, így írható, hogy:

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta |Z_x|}{|Z_x|}.$$

Ez pedig a legkedvezőtlenebb esetben:

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + \frac{\Delta U_x}{U_x} + \frac{\Delta U_N}{U_N} = 0.5\%.$$

7.29. A feszültségvektorok az alábbi ábrán láthatók.



Az alsó hídágban lévő két egyenlő ellenállás miatt U_3 alsó pontja $U_g/2$-nél van, továbbá kiegyenlített állapotban a vektorok alkotta háromszög egyenlő szárú, ezért:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{U_3}{U_N}.$$

Figyeljük meg, hogy az ábra tükrözhető az U_g egyenesre, ebben az esetben a mért impedancia fázistolása ellenkező előjelű, azaz a mérés alapján nem dönthető el, hogy az impedancia induktív vagy kapacitív.

a) Az impedancia abszolút értéke és fázisa:

$$\begin{aligned} |Z_x| &= R_N = 49.94\ \Omega, \\ \varphi &= \pm 2 \arcsin\frac{U_3}{U_N} = \pm 1.5210 = \pm 87.15^\circ. \end{aligned}$$

b) Az impedanciát felírhatjuk a mért abszolút értékkel és fázissal, valamint a helyettesítőkép elemeivel. Ezeket egymással egyenlővé téve kifejezhetők a kérdéses elemek.

$$\begin{aligned} Z_x &= R_N(\cos\varphi_0 \pm j\sin\varphi_0); \\ Y_x &= \frac{1}{R_N}(\cos\varphi_0 \mp j\sin\varphi_0), \\ Y_C &= \frac{1}{R_p} + j\omega C, \end{aligned}$$

ahol $\varphi_0 = |\varphi|$. Ebből:

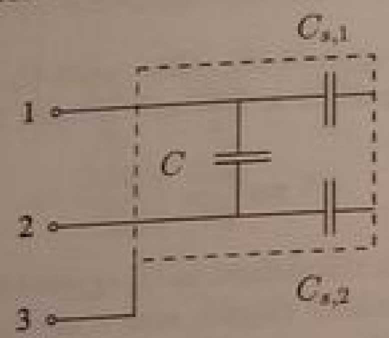
$$\begin{aligned} R_p &= \frac{R_N}{\cos\varphi_0} = 1.003\ \text{M}\Omega, \\ C &= \frac{1}{R_N \omega}\sin\varphi_0 \cong 10\ \text{nF}. \end{aligned}$$

c) Ha elvégezzük a hibaanalízist, csak a fázismérés hatását vizsgálva, az alábbiakat kapjuk:

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = \mathrm{tg}\varphi_0 \Delta\varphi_0,$$
$$\frac{\Delta C}{C} = \mathrm{ctg}\varphi_0 \Delta\varphi_0.$$

Látható, hogy ha $\varphi_0 \approx 90°$, R_p érzékeny a fázismérés hibájára, C viszont nem. Mivel példánkban ez az eset állt elő, továbbá R_N egyenlő mértékben járul hozzá mindkét komponens mérésének hibájához, ebben az esetben C mérése pontosabb.

7.30. A fémdobozba szerelt kondenzátor modellje az alábbi ábrán látható:



ahol C a mérendő kapacitás, $C_{s,1}$ és $C_{s,2}$ pedig a szórt kapacitások.

a) A szórt kapacitások (a példában $C_{s,1} = C_{s,2} = C_s = 100$ pF) soros eredője a mérendő kapacitással párhuzamosan kapcsolódik. Az eredő kapacitás:

$$C_e = C + \frac{C_s}{2},$$

azaz az '1' és '2' kapcsok közötti mérés relatív hibája:

$$h = \frac{C + C_s/2 - C}{C} = \frac{C_s}{2C} = 2.5\%.$$

b) A szórt kapacitások okozta mérési hiba 3 vezetékes méréssel küszöbölhető ki. Ekkor a műszer 'G' pontját a '3' jelű kivezetéshez kell kötni.

c) A szórt kapacitások megmérése izgalmas kérdés. Az alábbiakban 3 lehetőséget tekintünk át.

1. Megtehetjük, hogy a 2, illetve a 3 vezetékes mérés eredményét felhasználva a:

$$C_s = 2(C_e - C)$$

összefüggést használjuk. Ez azonban méréstechnikailag igen kedvezőtlen (differenciaképzés), ugyanis C_s C-hez képest igen kicsiny, így az eltérések esetleg éppen a kapacitásmérő hibájának nagyságrendjébe esnek.

2. Megtehetjük, hogy a 3 vezetékes mérést most úgy alkalmazzuk, hogy a szórt kapacitásokat mérjük, és a kiküszöbölt impedanciák között ott lesz C is. Pl. az '1' és '3' pontok között mérve, 'G'-t '2'-höz kapcsolva $C_{s,1}$-et mérjük. Ez kedvezőbb az előzőnél, de nem szabad elfeledkezni arról, hogy ilyenkor C áramát iktatjuk ki a mérésből a 3 vezetékes méréssel, amely lényegesen nagyobb lesz, mint C_s árama, így a vezetékek soros ellenállásán eső feszültség hibát okozhat. Ebben az esetben célszerű 5 vezetékes mérést alkalmazni.

3. A „nagy C, kis C_s" problémája úgy oldható meg, hogy C kivezetéseit rövidre zárjuk, és ezen pont, valamint a '3' kivezetés között mérjük a kapacitást. Ebben az esetben akár 2 vezetékes méréssel is eredményre jutunk. A módszernek két hátránya van: 1. nem lehet megmérni $C_{s,1}$-et és $C_{s,2}$-t külön-külön; 2. a mérés érzékeny lesz a fémdoboz és a föld közötti kapacitásra, függően attól, hogy maga a műszer hogyan van földelve, illetve ő maga a föld felé milyen szórt kapacitásokkal rendelkezik.

7.31. A koaxiális kábel mint elosztott paraméterű hálózat hullámimpedanciája az alábbi:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}},$$

ahol R', L', G', C' rendre a vezeték hosszegységre eső soros ellenállása, induktivitása, párhuzamos vezetése, kapacitása. A hullámimpedancia – egyes speciális esetektől eltekintve – csak úgy lehet valós és frekvenciafüggetlen, ha $R' = G' = 0$ (veszteségmentes kábel). Ebben az esetben írható, hogy:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}},$$

ahol L és C a vezeték teljes kapacitása, illetve induktivitása, amiből a kérdéses induktivitás:

$$L = CZ_0^2.$$

7.32.

a) Az átviteli függvény:

$$W(s) = \frac{U_{ki}(s)}{U_{be}(s)} = \frac{sRC}{1 + 3sRC + s^2R^2C^2},$$

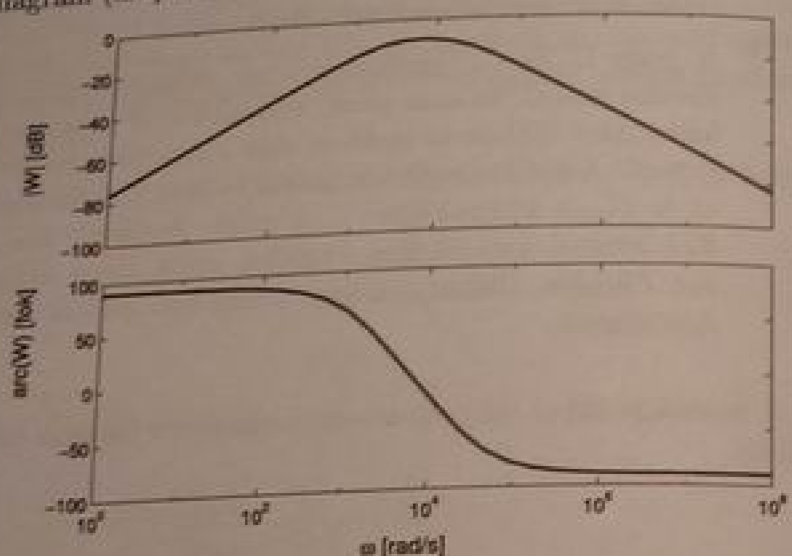
illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega 3RC - \omega^2 R^2 C^2}.$$

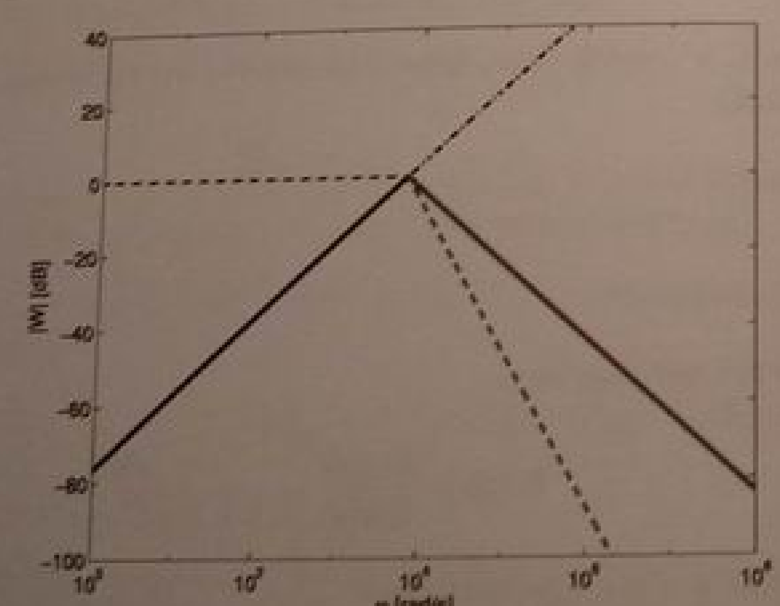
A rezonanciafrekvencia értékét a fenti egyenlet alapján lehet felírni, hiszen ott jól látszik, hogy a számláló a frekvenciától függetlenül tiszta képzetes, tehát $W(j\omega)$ akkor valós, ha a nevező valós része zérus, azaz:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 1064 \text{ Hz}.$$

A Bode-diagram (amplitúdó és fázis) a következő ábrán látható:



A számítógépes programmal történő ábrázolásnál tanulságosabb az amplitúdókarakterisztika aszimptotáinak felrajzolása. A Bode-diagram ilyen módon történő szerkesztésének ismerete nem is az analízis, mint inkább a szintézis szempontjából lényeges. Az amplitúdókarakterisztika aszimptotikus diagramja tehát az alábbi ábrán látható:



A pontozott vonal a számláló amplitúdómenete, a szaggatott a nevezőé.

A teljes átvitel aszimptotáit folytonos vonal jelöli. Az átvitel értéke a rezonanciafrekvencián 1/3, ami kb. −9.5 dB.

b) Amennyiben az ellenállások és a kondenzátorok értékei (páronként) nem egyeznek meg, az átviteli függvény a következő lesz:

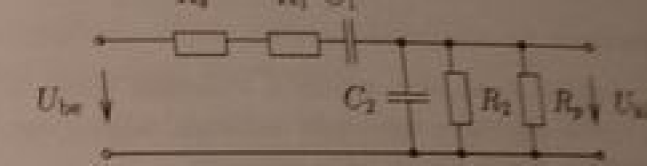
$$W'(s) = \frac{sR_2C_1}{1 + s[R_2C_1 + R_1C_1 + R_2C_2] + s^2R_1C_1R_2C_2}.$$

A rezonanciafrekvencia ekkor:

$$f_0' = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1C_1R_2C_2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_1\tau_2}}, \qquad (22)$$

azaz a rezonanciafrekvenciát a két időállandó mértani közepe határozza meg.

A kondenzátorok veszteségi tényezőit legegyszerűbben így vehetjük figyelembe, hogy C_1 esetében soros, míg C_2 esetében párhuzamos helyettesítő képet alkalmazunk:



A soros és a párhuzamos ellenállás értékei a következők:

$$R_s = \frac{D}{\omega C_1}, \quad R_p = \frac{1}{D\omega C_2},$$

ahol D jelöli a veszteségi tényezőt. A kondenzátorok a névleges értékükkel szerepelhetnek, mivel a veszteségi ellenállások maguk is hiba jellegű elemek, így nincs szükségünk a kondenzátorok pontos értékére. A fenti modell alapján felírható a rezonancia-körfrekvencia:

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{(R_1 + R_s)(R_2 \times R_p)C_1C_2}} = \sqrt{\frac{D\omega_0'^2R_2C_2 + \omega_0'}{\omega_0'R_1R_2C_1C_2 + DR_2C_2}}.$$

Ebből ω_0'-t kifejezve a rezonanciafrekvencia értékére az (22) kifejezést kapjuk, azaz D kiesett!

A rezonanciafrekvencia legnagyobb mértékben akkor tér el a névlegestől, ha minden elem azonos irányban változik, azaz:

$$R_1 = R(1 \pm h) \quad , \quad C_1 = C(1 \pm h);$$
$$R_2 = R(1 \pm h) \quad , \quad C_2 = C(1 \pm h);$$

ahol h a példában megadott tűrés. Ebből (22) segítségével kifejezhető a tűréseknek megfelelő minimális és maximális frekvencia:

$$f_0' = 1038 \ldots 1091 \text{ Hz}.$$

7.33.

a) A mérendő impedancia:

$$|Z_x| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 188.5\ \Omega, \quad \varphi = \arctan\frac{\omega L}{R} = 1.565 = 89.70^\circ.$$

A feszültség-összehasonlítás módszerét alkalmazva:

$$|Z_x| = R_N \frac{U_x}{U_N}, \quad \varphi = \angle(\bar{U}_x, \bar{U}_N),$$

ahol U_x, U_N a mérendő, illetve a normálellenálláson eső feszültség effektív értéke, a felülvonás pedig azt jelenti, hogy a két feszültséget vektorként kell értelmezni.

b) Az előző egyenlet alapján az impedancia abszolút értéke mérésének hibája (worst case összegzéssel):

$$\frac{\Delta|Z_x|}{|Z_x|} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + \frac{\Delta U_x}{U_x} + \frac{\Delta U_N}{U_N}. \tag{23}$$

A kvantálás zajmodellje szerint a kvantálás során a jelhez hozzáadódik egy, a jeltől független, egyenletes eloszlású, fehér spektrumú zaj, amelynek varianciája, illetve effektívérték-négyzete:

$$U_k^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{1}{12}\frac{\mathrm{FS}^2}{2^{2b}},$$

ahol FS az AD-átalakító átalakítási tartománya, b a bitszám. A mért effektívérték-négyzet tehát a két mért feszültségre:

$$U_x'^2 = U_x^2 + U_k^2, \quad U_N'^2 = U_N^2 + U_k^2.$$

Ebből az effektívérték-mérés hibája, a 8.19. példa megoldásában közölt átalakítással:

$$\frac{\Delta U_x}{U_x} = \frac{1}{2}\frac{U_k^2}{U_x^2}, \quad \frac{\Delta U_N}{U_N} = \frac{1}{2}\frac{U_k^2}{U_N^2}. \tag{24}$$

A hiba számszerű meghatározásához szükség volt U_x és U_N kifejezésére:

$$U_x = \frac{U_{g,p}}{\sqrt{2}}\left|\frac{Z_x}{Z_x + R_N}\right| = 0.6233\ \mathrm{V},$$
$$U_N = \frac{U_{g,p}}{\sqrt{2}}\left|\frac{R_N}{Z_x + R_N}\right| = 0.3307\ \mathrm{V},$$

ahol $U_{g,p}$ a gerjesztő feszültség csúcsértéke. Ezeket behelyettesítve a (24) majd a (23) egyenletbe, megkapjuk $|Z_x|$ mérésének hibáját:

$$\frac{\Delta|Z_x|}{|Z_x|} = 1.168 \cdot 10^{-4}.$$

c) A fázismérés hibája a fentieknél jóval egyszerűbben számítható. A két feszültség közötti fázistolás ugyanis:

$$\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T} = 2\pi f \tau,$$

ahol T és f a mérendő jelek periódusideje, illetve frekvenciája. A mérés hibáját meghatározza a felbontás, amely abból ered, hogy a nullátmenetek helyét csak a mintavételi időköznek megfelelő felbontással ismerjük. Így a fázismérés hibája:

$$\Delta\varphi = 2\pi f \Delta\tau = 2\pi\frac{f}{f_s} = 0.0377 = 2.16^\circ,$$

ahol f_s a mintavételi frekvencia.

7.34.

a) A feszültség-összehasonlítás módszerét alkalmazva:

$$|Z_x| = R_N\frac{U_x}{U_N} = 196.9\ \Omega,$$

ahol U_x, U_N a mérendő, illetve a normálellenálláson eső feszültség effektív értéke. Z_x jelöli a mérendő impedanciát:

$$Z_x = |Z_x|e^{j\varphi} = |Z_x|(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

ahol φ a példában adott fázistolás. Ezt a veszteséges kondenzátor párhuzamos helyettesítőképével egyenlővé téve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_p} + j\omega C &= \frac{1}{|Z_x|}e^{j(-\varphi)} = \frac{1}{|Z_x|}(\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi)) = \\ &= \frac{1}{|Z_x|}(\cos\varphi - j\sin\varphi). \end{aligned}$$

Ezzel a mért kapacitás és veszteségi ellenállás:

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{|Z_x|}{\cos\varphi} = 1415\ \Omega, \\ C &= -\frac{1}{|Z_x|\omega}\sin\varphi = 2.001\ \mu\mathrm{F}. \end{aligned}$$

(Mivel $\varphi < 0$, $\sin\varphi < 0$, a kapacitásra pozitív érték adódik.)

b) Az impedancia abszolút értéke mérésének hibája (worst case összegzéssel):

$$\frac{\Delta|Z_x|}{|Z_x|} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + \frac{\Delta U_x}{U_x} + \frac{\Delta U_N}{U_N}.$$

Mivel $\varphi \approx \pi/2$, a szinuszfüggvény meredeksége közel zérus, ezért a fázismérés hibája elhanyagolható mértékben befolyásolja C mérését, ezért a fenti egyenletbe helyettesítve írható, hogy:

$$\frac{\Delta C}{C} \cong \frac{\Delta|Z_x|}{|Z_x|} = 0.11\%.$$

c) A fázisérzékeny egyenirányító szorzójának kimenetén megjelenő időfüggvény, folytonos időben felírva:

$$x(t) = c\frac{U_z U_N}{2}[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)],$$

ahol $c = 1$ 1/V. A kétszeres frekvenciájú tagot az exponenciális átlagoló csillapítja. Az exponenciális átlagoló diszkrét idő-, illetve frekvenciatartománybeli leírása a következő:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k) + \alpha[x(k) - y(k)], \\ W(z) &= \frac{\alpha}{z - (1-\alpha)} = \frac{\alpha z^{-1}}{1 - (1-\alpha)z^{-1}}. \end{aligned}$$

Ennek a rendszernek az átvitelét a:

$$z = e^{j\vartheta} = e^{j2\pi f_x/f_s}$$

helyettesítéssel vizsgálhatjuk, ahol f_x a vizsgálandó frekvencia, f_s pedig a mintavételi frekvencia. Jelen esetben a DC átvitel egységnyi, $f_x = 2f$. Így a diszkrét rendszer kimenetén megjelenő jel a következő:

$$y(k) = c\frac{U_z U_N}{2}\left[\cos\varphi - W(2f)\cos(4\pi\frac{f}{f_s}k + \psi)\right],$$

ahol:

$$W(2f) = |W(z = e^{j2\pi 2f/f_s})|.$$

Itt $\psi \neq \varphi$, hiszen az átlagolónak is van fázistolása. Ez azonban lényegtelen, hiszen a példa szerint véletlenszerűen veszünk mintát a kimenetből, és a legrosszabb esettel kell számolnunk, azaz éppen akkor veszünk mintát, amikor $|\cos(4\pi\frac{f}{f_s}k+\psi)| = 1$. $\cos\varphi$ becslőjét az alábbi módon számíthatjuk:

$$\widehat{\cos}\varphi = y'(k) = \frac{2y(k)}{cU_z U_N}.$$

Az $y'(k)$ jelölés csak egyszerűsítés. A fentiek alapján:

$$\Delta y'(k) = W(2f).$$

A fázismérés hibája, mivel $\varphi = \arccos y'(k)$:

$$\Delta\varphi = \left|-\frac{1}{\sqrt{1 - y'^2(k)}}\Delta y'(k)\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{1 - y'^2(k)}}W(2f)\right|.$$

Mivel a feladat szövege szerint $\varphi \approx 90°$, azaz $\cos\varphi = y'(k) \approx 0$, a gyökös kifejezés közel egységnyi, így a hiba becslője:

$$\Delta\varphi \approx W(2f) = 1.703 \cdot 10^{-3} = 0.0976°.$$

7.35. A 7.25. feladat ábráját és megoldását felhasználva a szabad paraméterek:

$$R_3,\ R_4,\ C_N,\ C_4.$$

Ezek közül célszerűen kettőt kiválasztunk a kiegyenlítés céljára, további kettőt pedig lerögzítünk. Az egyes esetek a következők:

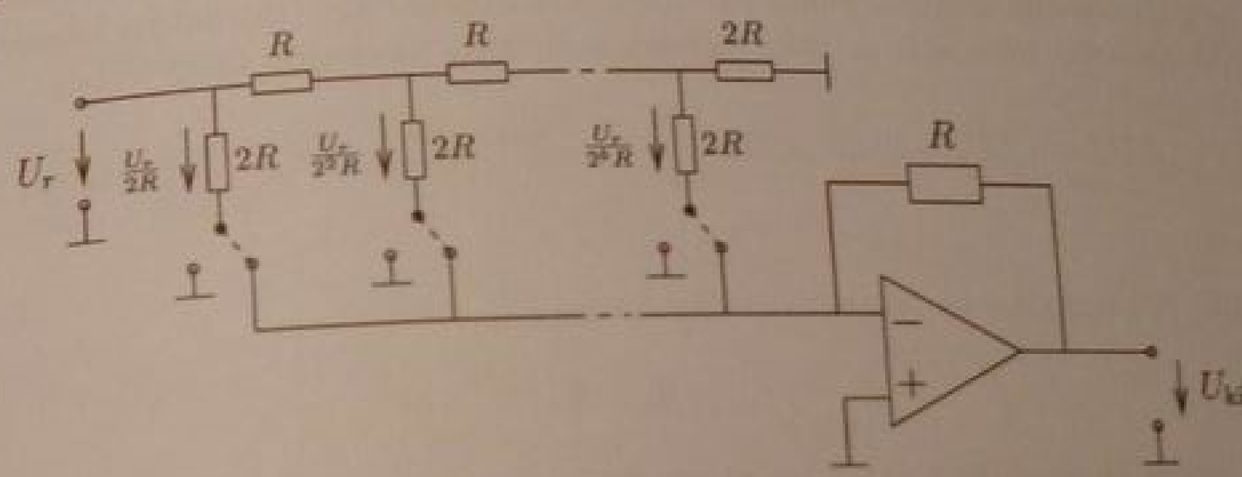
1. R_3, R_4: elvileg lehetséges, először $R_3 \to R_x$, majd $R_4 \to C_x$;
2. R_3, C_N: alkalmatlan;
3. R_3, C_4: elvileg lehetséges, először $R_3 \to C_x$, majd $C_4 \to R_x$;
4. R_4, C_N: elvileg lehetséges, először $C_N \to R_x$, majd $R_4 \to C_x$;
5. R_4, C_4: elvileg lehetséges, tetszőleges sorrend;
6. C_N, C_4: elvileg lehetséges, először $C_N \to C_x$, majd $C_4 \to R_x$.

A fenti felsorolásban az „$R_3 \to R_x$” jelölés azt jelenti, hogy az elsőként megjelölt elem állításával a másodikat határozzuk meg.

8. AD- és DA-átalakítók

8.1. Bevezető feladatok

8.1. Az $R-2R$ létra segítségével felépített DA-átalakító az alábbi ábrán látható:



A referenciából jövő áram minden egyes csomóponton feleződik, mivel minden egyes csomópontból a kapcsolók felé és a hálózat további része felé ugyanakkora, $2R$ ellenállás „látszik". A kapcsolók állásuktól függetlenül földpotenciálon vannak. Így az egyes szinteken kapcsolóállástól függetlenül az ábrán jelölt áram folyik. A maximális áram az első, a minimális az utolsón folyik. Az adatokat behelyettesítve:

$$I_{\max} = \frac{U_r}{2R} = 0.5\ \mathrm{mA}, \quad I_{\min} = \frac{U_r}{2^b R} = 0.977\ \mu\mathrm{A}.$$

8.2. A feladat megoldásához először azt kell tisztázni, hogy az AD-átalakító (ADC) által szolgáltatott szám (bitek) hogyan reprezentálják az átalakított analóg feszültséget. Másképpen fogalmazva az a kérdés, hogy ha az ADC segítségével voltmérőt szeretnénk készíteni, hogyan fejezhető ki a mért feszültség. Ha az ADC kimenetét mint egész számot tekintjük, ennek, és a teljes átalakítási tartománynak (2^b) aránya az, amit mint információt az ADC szolgáltat. A mért feszültség becslője tehát:

$$U_m = U_r r, \quad r = \frac{k}{2^b} \cong \frac{U_x}{U_r},$$

ahol r a mért arány, k pedig az ADC által szolgáltatott szám. A fenti egyenletet a szokásos módon vizsgálva fejezhetők ki a hibák. A referenciafeszültség relatív hibája adott, kérdés, mekkora az r arány hibája. Az arány hibája a kvantálásból adódik. Nem kerekítő karakterisztikát feltételezve:

$$\Delta r = 2^{-b}, \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{k} \cong \frac{U_r}{U_x} 2^{-b}.$$

Ezzel először a relatív hibát kifejezve:

$$\frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{\Delta U_r}{U_r} + \frac{\Delta r}{r} = h_r + \frac{U_r}{U_x} 2^{-b} = 0.21\%.$$

Jól látszik, hogy a relatív hiba akkor minimális, ha $U_x = U_r$, továbbá ha még $h_r = 0$ is teljesül, az átalakítás relatív hibája a bitszám alapján megadható. Ezt az egyenlőséget fordítva is felhasználhatjuk, mert ezek szerint a referenciafeszültség (full scale) átalakításakor adódó relatív hibából kiszámítható a bitszám. Az abszolút hiba akár az előző egyenletből, akár az eredeti kifejezésből:

$$\Delta U_m = r\Delta U_r + U_r \Delta r = U_x \frac{\Delta U_r}{U_r} + U_r 2^{-b} = U_x h_r + U_r 2^{-b} = 0.32 \text{ mV}.$$

8.3. A kvantálási zaj várható értéke zérus:

$$\mu_q = 0.$$

A szórás és az effektív érték megegyezik:

$$\sigma_q = n_{q,\text{RMS}} = \sqrt{\frac{q^2}{12}},$$

ahol q a kvantálási lépcső:

$$q = \frac{2A}{2^b} = \frac{A}{2^{b-1}}.$$

Ezzel a szórás, illetve az effektív érték:

$$\sigma_q = n_{q,\text{RMS}} = \frac{A}{2^b\sqrt{3}}.$$

8.4. A teljes átalakítási tartomány (full scale):

$$\text{FS} = 10 \text{ V}.$$

Az előző példa megoldását felhasználva az effektív érték:

$$n_{q,\text{RMS}} = \sqrt{\frac{q^2}{12}} = \frac{\text{FS}}{2^b}\frac{1}{\sqrt{12}} \cong 2.8 \text{ mV}.$$

8.5. A jel-zaj viszony:

$$\text{SNR} = 10\lg\frac{P_x}{P_n} = 20\lg\frac{x_{\text{RMS}}}{\sigma_q},$$

ahol az előző példák alapján:

$$\sigma_q = \frac{\text{FS}}{2^b}\frac{1}{\sqrt{12}} \cong 2.8 \text{ mV}.$$

a) A szinuszjel effektív értéke alapján:

$$x_{\text{RMS}} = 5/\sqrt{2} \text{ V}, \quad \text{SNR} \cong 62 \text{ dB}.$$

A szinuszjel itt teljesen kivezérli az AD-átalakítót, így az is írható, hogy

$$x_{\text{RMS}} = \frac{\text{FS}}{2\sqrt{2}}.$$

Ekkor a jel-zaj viszony független a full scale számszerű értékétől. Erre az esetre érvényes a következő közelítő összefüggés:

$$\text{SNR} = 6.02b + 1.76 \text{ dB}.$$

b) A szinuszjel effektív értéke alapján:

$$x_{\text{RMS}} = 2/\sqrt{2} \text{ V}, \quad \text{SNR} \cong 54 \text{ dB}.$$

c) A Gauss-zaj mint jel effektív értéke szintén a szórásával egyenlő, ezért:

$$x_{\text{RMS}} = 1 \text{ V}, \quad \text{SNR} \cong 51 \text{ dB}.$$

d) Az előző pont alapján:

$$x_{\text{RMS}} = 20 \text{ mV}, \quad \text{SNR} \cong 17 \text{ dB}.$$

8.6. A dual-slope AD-átalakító az AC zavarfeszültségeket akkor nyomja el, ha az integrálási idő a zavar periódusidejének egész számú többszöröse. Több frekvencia esetén a periódusidők legkisebb közös többszöröse, illetve annak egész számú többszörösei felelnek meg a célnak. A svájci vasúton az integrálási idő célszerű értéke

$$T_1 = k\frac{1}{f_1} = k \cdot 60 \text{ ms},$$

ahol k egész szám. Magyarországon az integrálási idő célszerű értéke

$$T_2 = l\frac{1}{f_2} = l \cdot 20 \text{ ms},$$

ahol l egész szám. Mivel $T_1 = 3T_2$, nem kell megváltoztatni az integrálási időt.

8.7. $f_1 = 50$ Hz esetén az előző példa megoldása alapján:

$$T_1 = k\frac{1}{f_1} = k \cdot 20 \text{ ms},$$

azaz $T_1 = 20$ ms választandó ki ($k = 1$). $f_2 = 60$ Hz esetén

$$T_2 = l\frac{1}{f_2} = l \cdot 16\ 2/3 \text{ ms},$$

azaz $T_2 = 50$ ms választandó ki ($l = 3$).

8.8. A dual-slope AD-átalakító a bemenetére kapcsolt U egyenfeszültséget a következőképpen méri:

$$U = \frac{T_x}{T}U_r,$$

ahol U_r a referenciafeszültség abszolút értéke, T az integrálási idő, T_x pedig a „visszaintegrálás" ideje. Ennek alapján a feszültségmérés relatív hibája a legkedvezőtlenebb esetben:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta U_r}{U_r} + \frac{\Delta T_x}{T_x} + \frac{\Delta T}{T}.$$

a) Eszerint az időmérés hibáját figyelmen kívül hagyjuk, így a fenti kifejezés a következőképpen egyszerűsödik:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta U_r}{U_r}.$$

Az átalakítás abszolút hibája, amennyiben az a felbontással megegyezik:

$$\Delta U = \frac{\text{FS}}{2^b},$$

ahol b a bitek száma. Ez azt jelenti, hogy a relatív hiba nagysága függ az átalakítandó jeltől. U_r szükséges pontossága relatív hibájának minimumát jelenti. Ez akkor áll fenn, ha:

$$U = \text{FS}.$$

Ennek alapján a szükséges pontosság:

$$\frac{\Delta U_r}{U_r} < \frac{\text{FS}}{2^b} = 9.54 \cdot 10^{-7} \approx 1 \text{ ppm}.$$

b) A 8.6. példa megoldása alapján a szükséges integrálási idő a periódusidők legkisebb közös többszöröse, azaz:

$$T = 100 \text{ ms}.$$

c) Az időmérés hibája a referenciafeszültség pontosságához hasonló megfontolásokkal:

$$\frac{\Delta T_x}{T_x} < \frac{\text{FS}}{2^b} = 9.54 \cdot 10^{-7} \approx 1 \text{ ppm}.$$

A két hiba összeadódása esetén a mérés pontossága kisebb lehet a felbontásnál. Erre az esetre a két hiba összegét lehet tekinteni:

$$\left|\frac{\Delta U_r}{U_r}\right| + \left|\frac{\Delta T_x}{T_x}\right| < \frac{\text{FS}}{2^b} \approx 1 \text{ ppm}$$

8.2. Gyakorló feladatok

8.9. A példa a blokkvázlat ismeretében könnyen megoldható. Ott, ahol egy műveletvégzés előtt több úton is érkezik jel, a műveletet csak a legutolsó jel megérkezése után lehet elvégezni. Így az átalakítási idő:

$$t = t(\text{S/H}) + t(\text{A/D[MSB]}) + t(\text{D/A}) + t(\text{A/D[LSB]}) + t(\text{SUM}) = 100 \text{ ns}.$$

8.10. Mivel a kvantálási zaj varianciája

$$\sigma_1^2 = \frac{q_1^2}{12},$$

$\sigma_2^2 = \sigma_1^2/4$ úgy érhető el, ha $q_2 = q_1/2$, azaz:

$$b_2 = b_1 + 1,$$

tehát a bitek számát 1-gyel kell növelni.

8.11. A 8.5. példa megoldását felhasználva a jel és a zaj teljesítménye:

$$P_x = \frac{\text{FS}^2}{128}, \quad P_n = \frac{\text{FS}^2}{2^{32}}\frac{1}{12}.$$

Ebből:

$$\text{SNR} = 10\lg\frac{P_x}{P_n} \cong 86 \text{ dB}.$$

A feladat bizonyos szempontból egyszerűbben megoldható, ha ismerjük a jel-zaj viszonyra vonatkozó $\text{SNR} = 6.02b + 1.76$ dB képletet (8.5. példa). Mivel a példa szerint a jel csak a full scale negyedét tölti ki, a szinuszjel felbontása két bittel kevesebb. A képletbe $b = 14$-et helyettesítve a számítással nyert eredményt kapjuk.

8.12. Az előző példa megoldását felhasználva:

$$b \cong 10.$$

8.13. A 8.3. és 8.4. példa megoldását felhasználva:

$$b \cong 10.$$

8.14.

a) Pl. a 8.5. feladat alapján:

$$\text{SNR}_1 \cong 48 \text{ dB}.$$

b) Ebben az esetben a jelre szuperponálódó zaj és a kvantálási zaj teljesítménye összeadódik:

$$P_n = P_q + \frac{P_x}{10^5}$$

ahol P_q a kvantálási zaj, P_x a jel teljesítménye, amit 10^5-nel osztva megkapjuk az azt eredetileg is terhelő zaj teljesítményét. Így a jel-zaj viszony ebben az esetben:

$$\mathrm{SNR}_2 \cong 45.9\ \mathrm{dB}.$$

8.15. A 8.6. példa megoldása alapján a szükséges integrálási idő a periódusidők legkisebb közös többszöröse, azaz:

$$T = 100\ \mathrm{ms}.$$

8.16. A dual-slope AD-átalakító átviteli függvényének abszolút értéke a következő:

$$|H(f)| = \left|\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right|.$$

A példában adott $f_1 = 60$ Hz, $f_2 = 400$ Hz és $f_3 = 810$ Hz frekvenciára az átvitel rendre

$$|H(f_1)| = 0.1559, \quad |H(f_2)| = 0, \quad |H(f_3)| = 0.01155.$$

A sorrend tehát: f_2, f_3, f_1.

8.3. Összetett feladatok

8.17. Soros ohmmérő esetében a keresett ellenállás:

$$R_x = R_s\left(\frac{I_m}{I} - 1\right),$$

ahol R_s a soros elenállás, I_m a maximális áram rövidzár mérésekor, I pedig az R_x mérésekor mért áram. Az AD-átalakító a soros ellenállás feszültségét méri, ezért a fenti összefüggés a következőképpen módosul:

$$R_x = R_s\left(\frac{U_m}{U} - 1\right), \qquad (25)$$

ahol most U_m a maximális feszültség rövidzár mérésekor, U pedig az R_x mérésekor mért feszültség. Az AD-átalakító a fenti arány reciprokát méri:

$$\frac{U}{U_m} = \frac{k}{2^b},$$

ahol b a bitszám, és $k = 0 \ldots 2^b - 1$.

a) A legnagyobb (nem végtelen) ellenállás mérésekor $k = 1$, így a (25) egyenlet a következő alakot ölti:

$$R_x = R_s\left(2^b - 1\right) = 8.19\ \mathrm{M\Omega}.$$

b) A legkisebb (nem nulla) ellenállás mérésekor $k = 2^b - 1$, így a (25) egyenlet így írható:

$$R_x = R_s\left(\frac{2^b}{2^b - 1} - 1\right) = 0.4884\ \Omega.$$

c) A mérés hibájához szükségünk lesz a feszültség mérésének relatív hibájára. Ez a 8.2. feladat megoldása kapcsán már ismert:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{1}{k}.$$

A (25) egyenletet analizálva és a feszültségmérés relatív hibájára rendezve azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{1}{U_m/U - 1}\frac{U_m}{U}\frac{\Delta U}{U}. \qquad (26)$$

Ismert R_x esetén:

$$U = \frac{R_s U_m}{R_x + R_s}, \quad \frac{U_m}{U} = \frac{R_x + R_s}{R_s} = r.$$

Az AD-átalakító által mért érték a fentiekből:

$$k = \frac{2^b}{r}.$$

A fentieket behelyettesítve a (26) egyenletbe, a hiba a következő:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{1}{r-1}\frac{r}{k} = 0.142\%.$$

8.18.

a) Az AD-átalakító teljes tartománya FS = 4 V. Ezzel a kvantálási lépcső:

$$q = \frac{\mathrm{FS}}{2^b}.$$

A voltmérő kijelzőjén az utolsó értékes digit az, amelyre:

$$q > 10^{-k}.$$

k megadja a tizedespont utáni digitek számát, ehhez még hozzá kell adni az előtte álló számjegyek számát, ami most 1, hiszen a méréshatár ±2 V. Így a kijelzendő digitek száma:

$$D = k + 1 = 6.$$

Mivel az adott feladatban (és sok esetben a valóságban is) a legfelső digit csak 0 vagy 1 lehet, ezért szokás azt 1/2 digitnek nevezni, tehát a műszer valójában csak 5.5 digites.

b) A műszer mért értékre vonatkoztatott relatív hibája az átalakító erősítés-hibája:

$$h_m = h_g = 0.02\%.$$

A műszer végértékre vonatkoztatott hibája az ofszetfeszültségből és az integrális nemlinearitásból adódik, a két hibát worst case összegzéssel összegezve:

$$h_v = \frac{1}{U_{\max}}(U_0 + \mathrm{INL}q) = 8.66 \cdot 10^{-5},$$

ahol $U_{\max} = 2$ V.

8.19.

a) A kvantálási zaj varianciája, illetve effektívérték-négyzete:

$$U_k^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{1}{12}\frac{\mathrm{FS}^2}{2^{2b}}$$

ahol FS az AD-átalakító átalakítási tartománya, b a bitszám. A mért effektívérték-négyzet tehát:

$$U_m^2 = U_x^2 + U_k^2.$$

A hiba kiszámításához írjuk fel először a mért feszültség négyzetének hibáját:

$$U_m^2 - U_x^2 = U_k^2,$$

majd a két négyzet különbségét írjuk fel szorzatalakban:

$$\begin{aligned}
(U_m + U_x)(U_m - U_x) &= U_k^2, \\
2U_x(U_m - U_x) &\cong U_k^2, \\
U_m - U_x &\cong \frac{U_k^2}{2U_x}.
\end{aligned}$$

A relatív hiba tehát:

$$h_1 = \frac{U_m - U_x}{U_x} = \frac{U_k^2}{2U_x^2} = 0.916\%.$$

b) Az erősített feszültség

$$U_{x,2} = AU_x,$$

ahol A az erősítés. A mért feszültség relatív hibája:

$$h_2 = \frac{\Delta U_{x,2}}{U_{x,2}} = \frac{U_k^2}{2U_{x,2}^2} + \frac{\Delta A}{A} = 0.209\%.$$

ahol az első tag a kvantálásból adódó hiba, az előző feladatnak megfelelően, a második tag pedig az erősítés hibája. Tehát sikerült javítani a mérés pontosságát.

8.20.

a) A mérés során csak a jel szinuszos AC komponensét mérjük, amely:

$$U_s(t) = U_{s,p}\cos\omega t$$

időfüggvényű jel, effektív értéke:

$$U_s = \frac{U_{s,p}}{\sqrt{2}}.$$

A relatív hiba az előző feladatban szereplő számítással:

$$h = \frac{U_k^2}{2U_s^2} = \frac{1}{12}\frac{U_r^2}{2^{2b}}\frac{1}{2U_s^2} = 7.95 \cdot 10^{-6} = 7.95 \text{ ppm}.$$

b) Jelöljük a kvantálási lépcsőt q-val. Ez megegyezik az átalakítási szintek közötti feszültség névleges értékével:

$$q = W(k)_{\mathrm{nom}} = \frac{U_r}{2^b}, \tag{27}$$

ahol $W(k)_{\mathrm{nom}}$ jelöli a kérdéses névleges feszültséget. Flash-konverterre írható továbbá, hogy:

$$W(k) = I_r R_k = U_r \frac{R_k}{R_e},$$

ahol R_e jelöli a referenciaosztó eredő ellenállását. Ismét adott egy összefüggés, amelyet klasszikus módon vizsgálhatunk, a kifejezés deriválásával és a relatív hibák behelyettesítésével:

$$\Delta W(k) = U_r \frac{R_k}{R_e}\left(\frac{\Delta R_e}{R_e} + \frac{\Delta R_k}{R_k}\right).$$

A hibaösszegzéshez worst case összegzést használtunk. A (27) egyenletet is felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$\Delta W(k) = \frac{U_r}{2^b}\left(\frac{\Delta R_e}{R_e} + \frac{\Delta R_k}{R_k}\right) \cong \frac{U_r}{2^b} 2 \frac{\Delta R_k}{R_k}.$$

A fenti közelítés oka a következő. Mivel az ellenállások sorosan kapcsolódnak, az eredő ellenállás relatív megváltozása megegyezik az egyes ellenállások relatív megváltozásával. Viszont, a deriválásból és szemléletesen is adódik, hogy R_e növekedése $W(k)$ csökkenését eredményezi, változatlan R_k mellett, és fordítva. A worst case összegzés tehát R_e és R_k ellenkező előjelű változását feltételezi, amely lehetetlen, hiszen R_k eleme R_e-nek. Mivel azonban az ellenállások száma nagy, egyetlen R_k súlya kicsiny, ezért a közelítés elfogadható. Valójában R_e hibája egy kicsit kisebb, de ezt elhanyagoljuk.

Ezek után kifejezhető a differenciális nemlinearitás is. Mivel a fenti levezetés tetszőleges szinten ugyanazt az eredményt adja, a k index elhagyható:

$$\mathrm{DNL} = \frac{W_{\mathrm{nom}} + \Delta W - q}{q} = \frac{\Delta W}{q} \cong \frac{U_r}{2^b}\frac{2\Delta R_k/R_k}{U_r/2^b} = 2\frac{\Delta R_k}{R_k} = 0.004$$

8.21.

a) Dual-slope AD-átalakító esetére a mért feszültség kifejezése:

$$U_m = U_r \frac{T_x}{T}, \tag{28}$$

ahol T az integrálási idő, T_x pedig a visszaintegrálás ideje. Ha T_x-et az órajel periódusainak számával mérjük, a mért érték a következő:

$$N = \frac{T_x}{t_0} = f_0 T_x,$$

ahol t_0 az órajel periódusideje, f_0 a frekvenciája. A felbontáshoz úgy juthatunk el, hogy kiszámítjuk, az AD-átalakító a teljes U_r tartományt hány részre osztja. Ehhez ki kell számítani, hogy U_r-et mérve mit mutat a számláló:

$$N_{\max} = \frac{T}{t_0} = f_0 T,$$

ugyanis ebben az esetben a két időtartam megegyezik. Ebből a bitszám:

$$b = \lfloor \log_2(N_{\max}) \rfloor = \lfloor \log_2(f_0 T) \rfloor = 18.$$

ahol $\lfloor . \rfloor$ egészrészképzést jelent.

b) A pontosság kifejezéséhez el kell végezni a (28) kifejezés hibaanalízisét. A relatív hiba a következő:

$$\frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{\Delta U_r}{U_r} + \frac{\Delta T_x}{T_x} + \frac{\Delta T}{T}.$$

Az összeg harmadik tagja zérus, mert a feladat szerint az integrálási idő az órajel periódusidejének egész számú többszöröse. A hiba akkor minimális, ha $U_x = U_r$, ekkor:

$$\left.\frac{\Delta U_m}{U_m}\right|_{\min} = \frac{\Delta U_r}{U_r} + \frac{1}{f_0 T},$$

ugyanis az időmérés relatív hibája a számláló (jelen esetben: maximális) értékének reciproka. A referencia hibájával terhelt AD-átalakító pontossága tehát:

$$b' = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\Delta U_m}{U_m} \right)^{-1} \right\rfloor = 13.$$

8.22. Az eredő variancia a jelet terhelő zaj és a kvantálási zaj varianciájának összege:

$$\sigma_x^2 = \sigma_1^2 + \sigma_q^2,$$

ahol

$$\sigma_1 = 10\ \text{mV}, \quad \sigma_q = \frac{\text{FS}}{2^b} \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

N független eredményt átlagolva:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}.$$

A 95%-os konfidenciaszinthez $\pm 2\sigma$ szélességű intervallum tartozik, azaz:

$$\sigma = 1\ \text{mV}.$$

Fentiekből:

$$N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2} \approx 100.$$

8.23. A megadott adatok alapján:

$$f_s > 10\ \text{kHz}, \quad b > 11\ \text{bit}.$$

Az ismert típusok közül:

1. A dual-slope átalakító túl lassú;
2. A flash-konverter és többfokozatú változatai feleslegesen gyorsak, és valószínűleg a drágábbak közé tartoznak;
3. A szukcesszív approximációs átalakító tűnik a legjobbnak, mert elég gyors és mérsékelt ár mellett elég pontos is;
4. A $\Sigma - \Delta$ átalakító is jó választás, de a feladattól is függ, alkalmazható-e (pl. nem alkalmazható, ha a jel eloszlását akarjuk mérni, vagy ha nagy késleltetés nem megengedett). Általában a megkívántnál nagyobb felbontást biztosít, szintén magasabb ár mellett.

9. Jelfeldolgozás I.

9.1. Bevezető feladatok

9.1. Legyen a mért jel periódusideje T. Ekkor 10 cm megtételéhez $t_0 = 5T = 100\ \mu s$ idő szükséges. A keresett frekvencia:

$$f = \frac{1}{T} = 50\ \text{kHz}.$$

A vízszintes eltérítés feszültségtartománya 10 cm · 20 V/cm = 200 V. A $C = 10$ nF-os kondenzátort ennek a feszültségnek századrészére, $U = 2$ V-ra töltjük. A töltés ideje $t_0 = 100\ \mu s$. A keresett áram:

$$I = \frac{CU}{t_0} = 0.2\ \text{mA}.$$

9.2. A két csatorna közötti váltás periódusideje:

$$T_{\text{chopper}} = \frac{1}{f_{\text{chopper}}} = 10\ \mu s.$$

1000 vonaldarab megjelenítése $1000 \cdot 10\ \mu s = 10$ ms időtartamnak felel meg. A háromszögjelből 3 periódus 10 ms, tehát a frekvenciája:

$$f_1 = \frac{3}{10\ \text{ms}} = 300\ \text{Hz}.$$

A négyszögjelből 5.5 periódus 10 ms, tehát a frekvenciája:

$$f_2 = \frac{5.5}{10\ \text{ms}} = 550\ \text{Hz}.$$

9.3. A blokkvázlat az alábbi ábrán látható.

Az első oszcillátor frekvenciája állandó, a második hangolható:

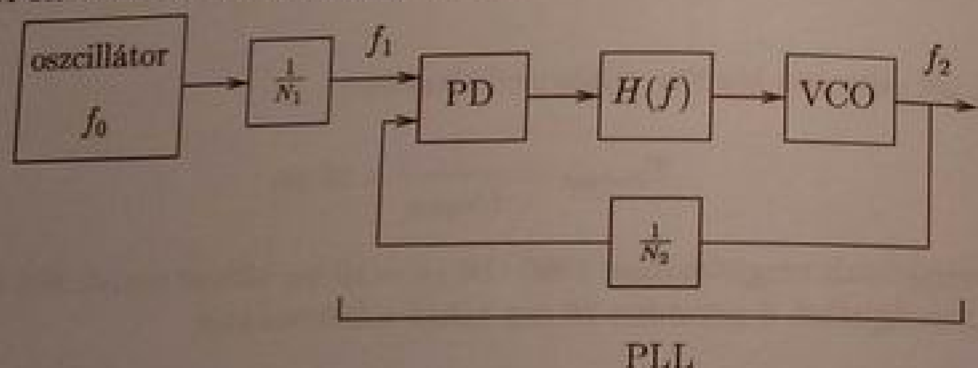
$$f_1 = 100 \text{ kHz}, \quad f_2 = 80 \ldots 99.98 \text{ kHz}.$$

A keverő kimenetén megjelenő frekvenciakomponensek:

$$f_1, \ f_2, \ f_1 + f_2, \ f_1 - f_2.$$

Az aluláteresztő szűrőt úgy kell specifikálni, hogy az $f_1 - f_2$ frekvencián áten-gedjen, a többi frekvencián viszont elnyomjon, legalább $60 \ldots 80$ dB-lel.

9.4. A blokkvázlat az alábbi ábrán látható.



A blokkvázlatban az N_1-gyel, illetve N_2-vel való osztás a jel frekvenciájának osztását jelenti. Ha $N_1 = 10$, akkor:

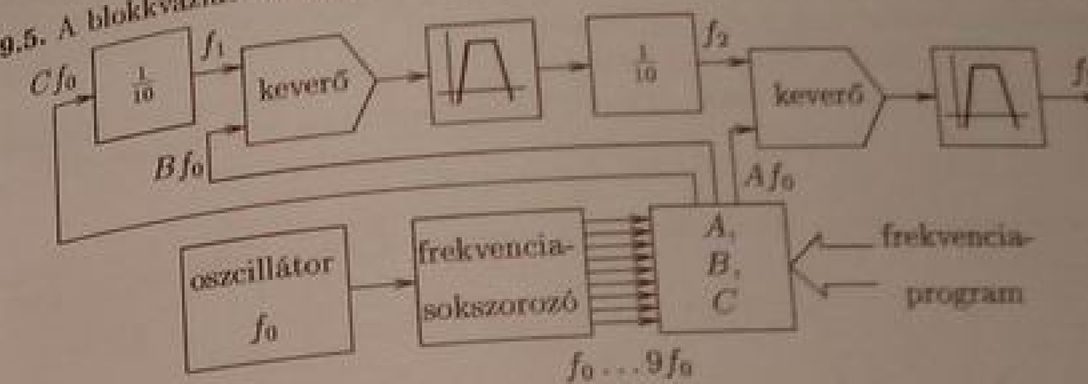
$$f_1 = f_0 / N_1 = 100 \text{ kHz}.$$

A PLL állandósult állapotban biztosítja, hogy:

$$f_2 = f_1 / N_2 = 19.9 \text{ MHz},$$

ha $N_2 = 199$.

9.5. A blokkvázlat az alábbi ábrán látható.



A szorzók kimenetén az összeg- és a különbségi frekvenciák jelennek meg. A sávszűrők specifikációja olyan, hogy az összegfrekvenciát engedik át. Az ábrán feltüntetett frekvenciák az alábbiak:

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.1 C f_0, \\ f_2 &= (0.1 B + 0.01 C) f_0. \end{aligned}$$

A kimeneten megjelenő frekvencia ekkor:

$$f_{ki} = (A + 0.1 B + 0.01 C) f_0 = 5.55 \text{ MHz},$$

ha $A = B = C = 5$.

9.6. A mintavételi időköz:

$$\Delta t = \frac{10 \cdot 50 \ \mu\text{s}}{500} = 1 \ \mu\text{s}.$$

Ebből a mintavételi frekvencia:

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = 1 \text{ MHz}.$$

Szinuszjel esetén nem vesszük észre a jel időbeli „megfordulását", ezért a

$$k f_s \pm f_0$$

jeleket mintavételezve (k egész szám, f_0 a szinuszjel frekvenciája) f_0 frekvenciát kapunk. Tehát a lehetséges frekvencia:

$$f_0 = 10 \text{ kHz}, \ 990 \text{ kHz}, \ 1010 \text{ kHz}, \ 1990 \text{ kHz}, \ 2010 \text{ kHz}, \ \ldots$$

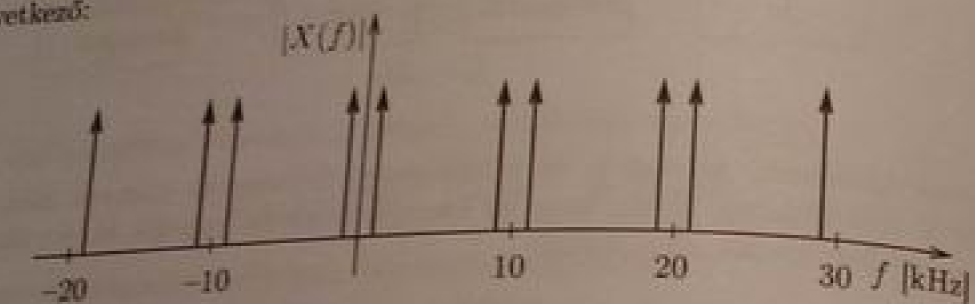
egészen az oszcilloszkóp sávszélességének néhányszorosáig (amíg a bemenet aluláteresztő jellegű karakterisztikája a bemenőjelet nem nyomja el).

9.7. A függvény, illetve a függvényérték különféle lehet attól függően, hogy milyen spektrumról van szó (teljesítményspektrum, teljesítménysűrűség-spektrum stb.). A spektrum általában komplex, ábrázolni általában ennek abszolút értékét szokás. Amennyiben a fázis szerepe fontos, erre külön kitérünk. Ezek alapján itt és a további példákban az adott frekvenciapozícióban csak egy nyíllal szimbolizáljuk a jelenlévő spektrumkomponenst.

Egy f_0 frekvenciájú szinuszjel komplex spektruma a $-f_0$ és f_0 frekvenciákon tartalmaz spektrumvonalakat. Mintavételezés esetén ez a spektrum ismétlődik a

$$\pm k f_s, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

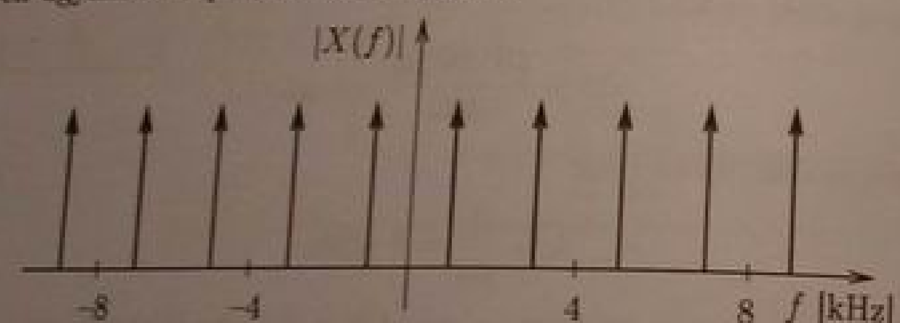
frekvenciákkal eltolva. Ennek alapján a spektrum kérdéses tartományban a következő:



Tehát spektrumkomponensek jelennek meg az alábbi frekvenciákon:

$$-19,\ -11,\ -9,\ -1,\ 1,\ 9,\ 11,\ 19,\ 21,\ 29 \text{ kHz}.$$

9.8. Az előző feladat megoldását követve mind $f_1 = 1$ kHz, mind $f_2 = 3$ kHz esetében ugyanazt a spektrumképet kapjuk:



Tehát spektrumkomponensek jelennek meg az alábbi frekvenciákon:

$$-9,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9 \text{ kHz}.$$

9.9. A mintavételezés miatt:

$$X(f) = X(f \pm k f_s), \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

továbbá valós jelre:

$$X(f) = X^*(-f),$$

ahol a csillag a komplex konjugáltat jelöli. Ezeket felhasználva:

$$X(f_0) = X(f_0 - f_s) = X^*(f_s - f_0).$$

Ezért:

$$X(f_s - f_0) = X^*(f_0).$$

9.10. Mivel sztochasztikus jelekre a spektrum az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja, amely minden valós jelre valós, ezért az előző feladat alapösszefüggései módosulnak:

$$S(f) = S(f \pm k f_s), \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \quad S(f) = S(-f).$$

Ebben az esetben tehát:

$$S(f_0) = S(f_0 - f_s) = S(f_s - f_0),$$

azaz:

$$S(f_s - f_0) = S(f_0).$$

9.11. A diszkrét Fourier-transzformált (DFT) $N = 8$-ra:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}, \quad k = 0, \ldots, 7.$$

Ezt felhasználva:

$$X(0) = \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{0} = 8,$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j2\pi\frac{n}{8}} = 0.$$

Ez utóbbi azért zérus, mert egységgyököket összegzünk. Ehhez hasonlóan:

$$X(2) = X(3) = \ldots = X(7) = 0.$$

Az inverz diszkrét Fourier-transzformált (IDFT) $N = 8$-ra:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi\frac{nk}{N}}, \quad n = 0, \ldots, 7.$$

A számítás hasonlóan végezhető el, mint DFT esetében, azaz:

$$x(0) = 1, \quad x(1) = x(2) = \ldots = x(7) = 0.$$

A számításnál figyelembe vettük az $1/N$-es szorzót.

9.12. A k. pont az $f = k/N \cdot f_s$ frekvencián becsli a spektrumot $f = 0$ és $f = (N-1)/N \cdot f_s$ között.

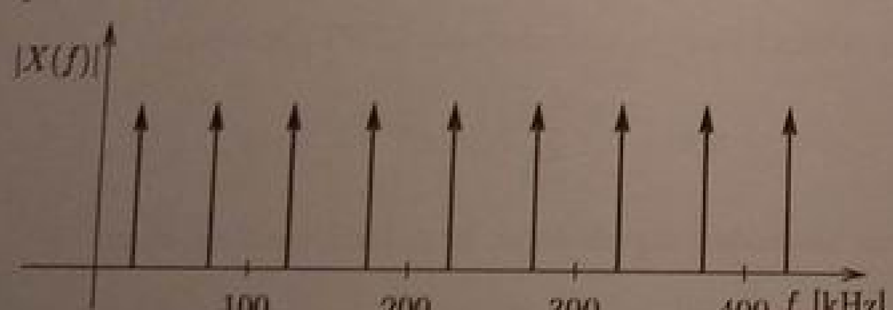
9.13. Mivel:
$$X(k) = X^*(-k), \quad X(k) = X(k+N),$$
írható, hogy:
$$X(k) = X^*(N-k).$$

9.14. Írjuk fel a szinuszjelet az alábbi formában:
$$x(t) = A\sin 2\pi f t = \frac{A}{2j}\left(e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}\right).$$
Mivel
$$f = \frac{f_s}{N},$$
ezért a DFT 9.11. példában leírt definícióját felhasználva:
$$|X(k)| = \begin{cases} N\,A/2, & \text{ha } k = 1,\ 1023, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

9.2. Gyakorló feladatok

9.15. A kvantálás miatt:
$$f_m = \frac{1}{T_m \pm T_0} \cong \frac{1}{T_m}\left(1 \pm \frac{T_0}{T_m}\right) = 100\ \text{Hz} \pm 0.01\%,$$
ahol f_m és T_m a mért frekvencia és periódusidő, T_0 pedig az órajel periódusideje. A lehetséges alulmintavételezés miatt a frekvencia:
$$f = kf_s \pm f_m, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

9.16. A spektrum a következő:



Tehát spektrumkomponensek jelennek meg az alábbi frekvenciákon:
$$25,\ 75,\ 125,\ 175,\ 225,\ \ldots\ \text{kHz}.$$

A spektrumvonalak abszolút értéke megegyezik. Mivel egy periódusból csak 4 mintát veszünk, a spektrumkép alapján a jelet nem tudjuk egy szinuszjeltől megkülönböztetni.

9.17.

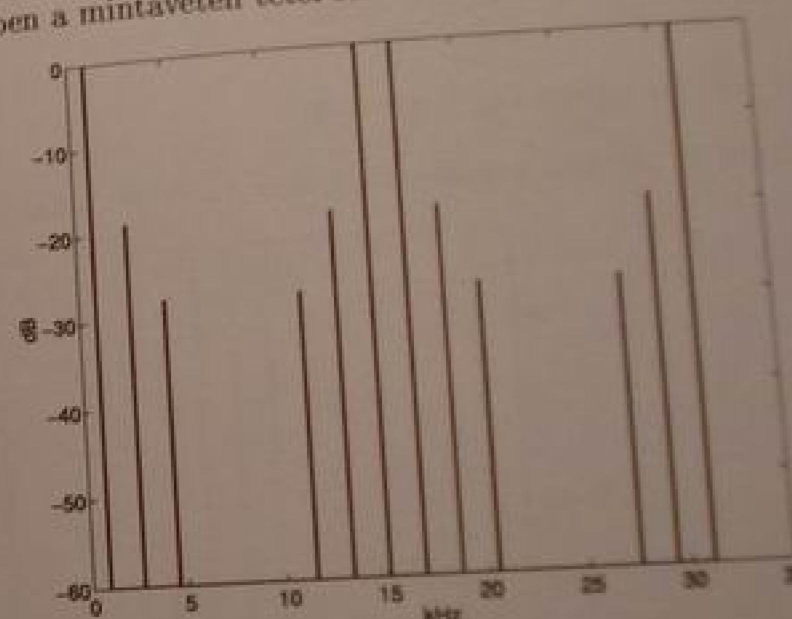
a) Az ismétlődés alapján:
$$f_s = 10\ \text{kHz}.$$

b)
$$f_0 = kf_s \pm f_m = k\,10 \pm 2\ \text{kHz}, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

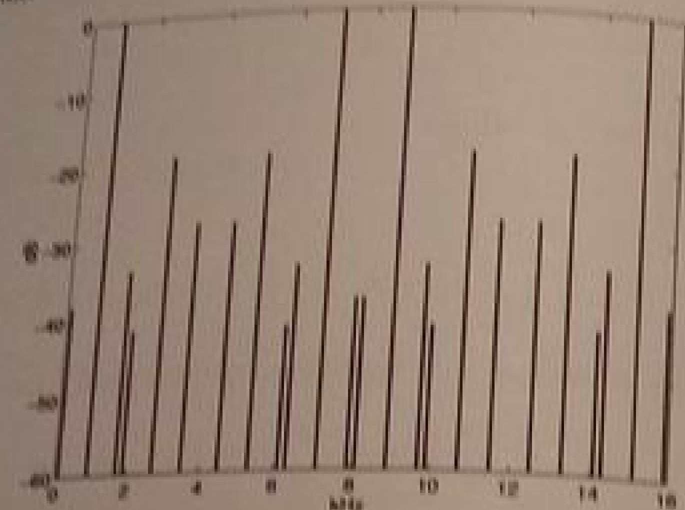
9.18. Mivel a háromszögjel periodikus, spektruma a Fourier-sora:
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{8}{\pi^2}\left[\sin\omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t - + \ldots\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)\omega t. \end{aligned}$$

A végtelen sort az aluláteresztő szűrő csonkolja, így csak véges számú komponenst mintavételezünk. Az alábbi esetekben az egyes komponenseket célszerűen dB-skálán ábrázoltuk, a referenciaszintet az alapharmonikus amplitúdójához illesztve.

a) Ebben az esetben a mintavételi tétel feltételét betartjuk.



b) Amennyiben a mintavételi tétel feltételét nem tartjuk be, a komponensek átlapolódnak.

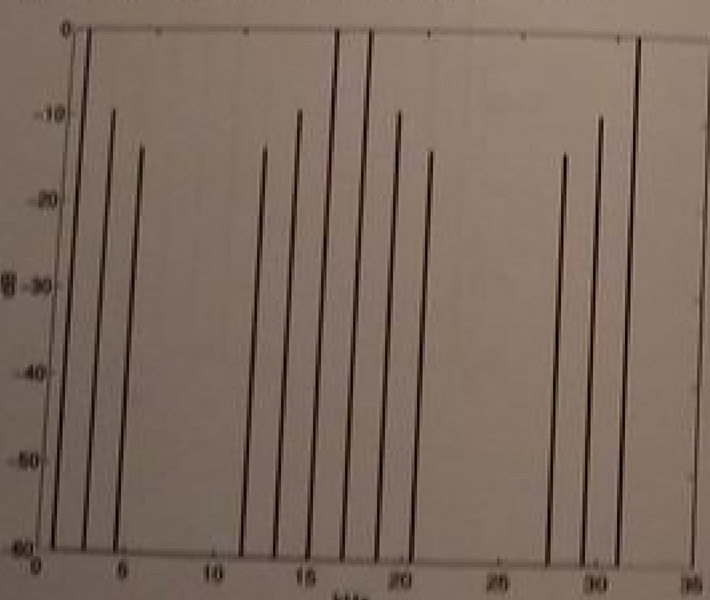


9.19. Mivel a négyszögjel periodikus, spektruma a Fourier-sora:

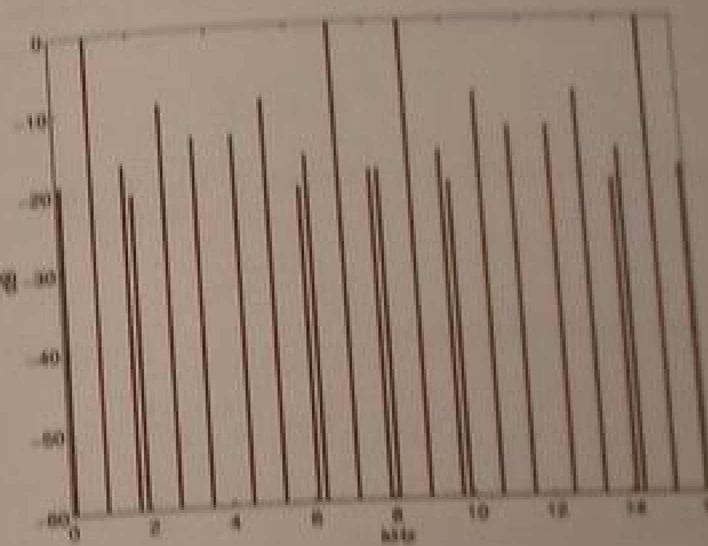
$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \dots\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\omega t.$$

Az előző példa megfontolásait követve:

a) Ebben az esetben a mintavételi tétel feltételét betartjuk.



b) Amennyiben a mintavételi tétel feltételét nem tartjuk be, a komponensek átlapolódnak.



9.20.

a)

$$f_s > 2\max(f_1, f_2).$$

b)

$$x(t) = \frac{A_1A_2}{2}\left(\sin 2\pi(f_1+f_2)t + \sin 2\pi(f_1-f_2)t\right).$$

Figyelembe véve, hogy $f_1 = 2f_2$:

$$f_s > 2\max(f_1+f_2, |f_1-f_2|) = 6f_2.$$

c) Mivel a jel nem sávkorlátozott (Fourier-transzformáltja $\mathrm{sinc}(x)$ jellegű), mintáiból nem állítható vissza hibamentesen.

d) Az 1.14. példa alapján a jel sávkorlátja $B = 1/2T$, tehát:

$$f_s > \frac{1}{T}.$$

9.21.

$$x^2(t) = A^2\sin^2 2\pi f_0 t = \frac{A^2}{2}(1-\cos 4\pi f_0 t).$$

A jel sávkorlátja $B = 2f_0$, tehát az alábbi mintavételi frekvencia szükséges:

$$f_s > 4f_0.$$

9.22. A mintavételi frekvencia $f_s = 16$ Hz. Ha a keréknek egyetlen küllője lenne, a mintavételi tétel betartása azt jelentené, hogy az n fordulatszámra fenn kell álljon az

$$n < \frac{f_s}{2}$$

összefüggés. Ha K küllője van a keréknek, a feltétel úgy módosul, hogy:

$$n < \frac{f_s}{2K}.$$

A kerék látszólag előre forog, ha:

$$\frac{2kf_s}{2K} < n < \frac{(2k+1)f_s}{2K},$$

ahol k tetszőleges egész szám. Mivel a sebesség $v = nd\pi$, a fenti feltétel a sebességgel a következőképpen írható fel:

$$\frac{2kf_s}{2K}d\pi < v < \frac{(2k+1)f_s}{2K}d\pi,$$

azaz:

$$2k \cdot 2.011\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} < v < (2k+1) \cdot 2.011\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

9.23. A jel frekvenciája 1 kHz vagy 9 kHz is lehet. De ugyanezt a spektrumképet kapjuk minden alábbi esetben:

$$f_0 = kf_s \pm f_m = k10 \pm 1\ \mathrm{kHz}, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

9.24. A Fourier-, illetve az inverz Fourier-transzformáció szimmetriája miatt a mintavételi tulajdonságok a frekvenciatartományban is igazak, tehát, ha egy $X(f)$ függvényt $\Delta f = 1/T$ gyakorisággal mintavételezünk, akkor $x(t)$ $1/\Delta f = T$ periodicitással ismétlődik, azaz:

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT).$$

9.25. Hasonlóan az „időtartománybeli" mintavételi tételhez (a tételt függvényekre és nem különböző pl. időtartománybeli jelekre érdemes kimondani): Ha $x(t)$ t-ben korlátos, tehát létezik T, hogy $x(t) = 0$, ha $|t| > T$, akkor $\Delta f < 1/2T$ sűrűséggel mintavételezve $X(f)$-et az az $X(n\Delta f)$ mintákból hiba nélkül visszaállítható.

9.26. A 9.11. példa megoldását felhasználva: egy 8 db 8-asból álló sorozatot kapunk.

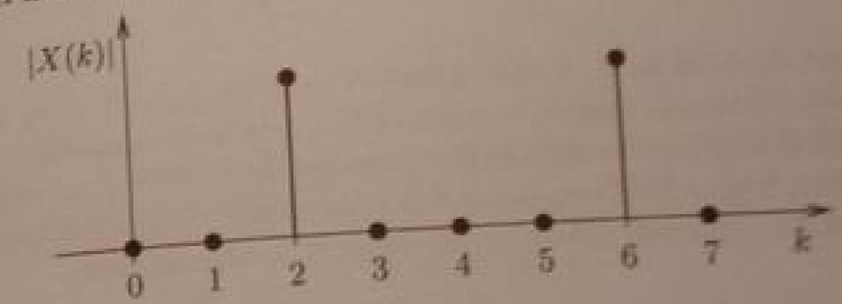
9.27. Ismét a 9.11. példa megoldását használhatjuk fel. A képletekbe behelyettesítve csak $k = 4$ esetén kapunk zérustól különböző eredményt. A transzformált vektor elemei a következők:

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0].$$

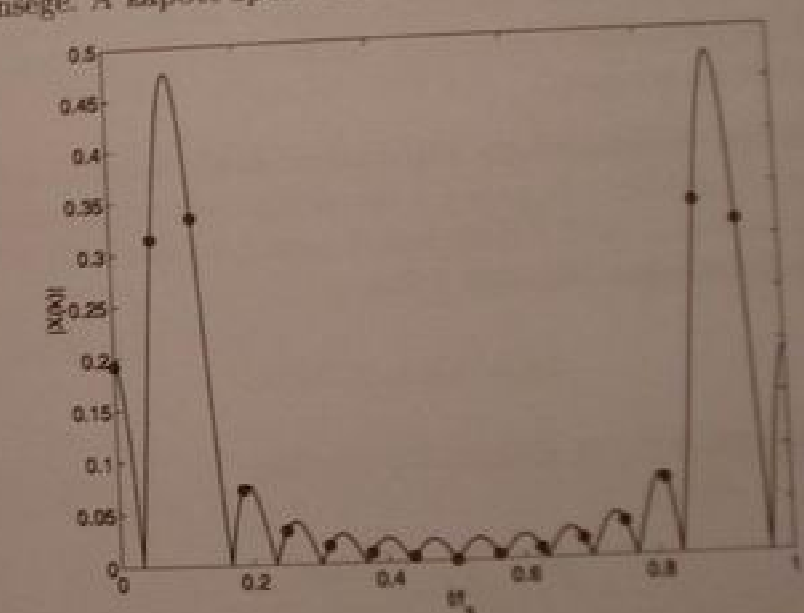
9.28. 2 periódusból 8 minta azt jelenti, hogy:

$$f_s = 4f_0,$$

ahol f_0 a jel frekvenciája. A DFT abszolút értéke ezek után:



9.29. Mivel $f_s = 10f_0$ és $N = 16$, fellép a szivárgás és a tetőesés (picket-fence, leakage) jelensége. A kapott spektrum az alábbi ábrán látható:



A spektrum a sinc(x) jellegű görbe mintavételezése a kis körökkel jelölt pontokban.

9.30. Ismét a 9.11. példa megoldását használhatjuk fel, kiegészítve azzal, hogy a DFT lineáris művelet, azaz igaz a szuperpozíció, tehát a DC és az AC komponens spektrumát külön-külön számolva az összeg spektruma a spektrumok összege lesz.

a)

$$X(0) = 16\mu.$$

b) Felhasználhatjuk, hogy:

$$X(12) = X^*(16-12) = X^*(4) = X(4).$$

Az utolsó egyenlőség a koszinuszfüggvény páros szimmetriája miatt igaz. Mivel $f_s = 4f_0$:

$$X(12) = X(4) = \frac{N}{2} = 8.$$

9.31. Legyen $k_1 = 25$ és $k_2 = 999$. Mivel $N = 1024$, $k_2 = N - k_1$, tehát olyan jelről van szó, amelynek pozitív és negatív frekvenciás komponense megegyezik, továbbá a két komponens amplitúdója is azonos. Ilyen jelek a szinuszos jelek, figyelembe véve, hogy a két komponens valós, az időfüggvény a koszinuszfüggvény. A 9.11. példában szereplő definíciót alkalmazva az időfüggvény:

$$x(t) = 2\cos 2\pi f_0 t, \quad f_0 = k\frac{f_s}{N} \cong 1076.7 \text{ Hz}.$$

Az időfüggvény annyiban „egy lehetséges”, hogy a feladat nem rögzítette, hogy a mintavételi tétel feltételét betartottuk, tehát végtelen sok frekvencia megfelel a példában adott spektrumnak.

9.32. A mérés úgy történhet, hogy a spektrumban megkeressük a hálózati frekvenciához tartozó „csúcsot”, és annak frekvenciáját tekintjük mérési eredménynek. Így a frekvenciát a DFT felbontásával megegyező abszolút hibával tudjuk meghatározni. A szükséges felbontás tehát:

$$\Delta f = f_0 h = 50 \text{ mHz},$$

ahol $f_0 = 50$ Hz, $h = 0.1\%$. A szükséges pontszám:

$$N = \frac{f_s}{\Delta f} = 160000.$$

9.33. A 9.11. példa megoldásában szereplő képletbe behelyettesítve:

$$|X(k)| = 1, \quad k = 0, \ldots, 1023,$$

ugyanis a szumma tetszőleges k-ra egyetlen elemből áll, és annak abszolút értéke egységnyi.

9.3. Összetett feladatok

9.34. A jel sávszélességéből és az ehhez képesti hosszú megfigyelési időből (tehát igen nagyszámú mintából) kvalitatíve arra következtethetünk, hogy a jel a megfigyelt tartományon kívüli értéket csak elhanyagolhatóan kis valószínűséggel vesz fel. Ha az eloszlás normális, a jel a $\pm 3\sigma$ tartományon belül van, azaz a szórás:

$$\sigma = 1 \text{ V}.$$

Mivel zaj esetében az effektív érték megegyezik a szórással, az effektív érték:

$$U_{\text{eff}} = 1 \text{ V}.$$

9.35.

a) Mivel a zaj várható értéke zérus, a szinuszjel amplitúdójának várható értéke az intervallum felénél van, azaz:

$$\hat{U}_p = 11 \text{ mV}.$$

b) A digitális oszcilloszkóp átlagolás (*averaging*) funkcióját kel alkalmazni. A funkció pontos triggerelést igényel, ezért az áramkört gerjesztő nagyszintű zajmentes jelet kell az oszcilloszkóp másik csatornájára vagy az *external trigger* bemenetére kapcsolni. Az oszcilloszkópon a trigger forrását (*trigger source*) ennek megfelelően kell beállítani.

c) Az előző feladat alapján a zaj szórása az intervallum hatoda, azaz:

$$\sigma_1 = 1 \text{ mV}.$$

Átlagolás után a zaj továbbra is normális lesz, ezért az átlagolt zaj szórása az új intervallum hatoda:

$$\sigma_2 = \frac{1}{6} \text{ mV}.$$

Feltételezve, hogy a zajminták függetlenek, az átlagolás a varianciát N-edrészére csökkenti, tehát a szükséges regisztrátumszám:

$$N = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 36.$$

d) Az amplitúdó várható értéke az átlagolással nem változik. A konfidenciaintervallum a 3. fejezetben alkalmazott jelölésekkel a következő:

$$p\left[\hat{U}_p - \sigma_2 z_{(0.025)} < U_p < \hat{U}_p + \sigma_2 z_{(0.025)}\right] = 95\%,$$

ahol $z_{(0.025)} = 1.96$. Behelyettesítve:

$$p[10.673 \text{ mV} < U_p < 11.327 \text{ mV}] = 95\%.$$

9.36. Az egyes effektív értékek négyzetesen összegződnek:

$$U_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} U_i^2} = \sqrt{N}\,U = 7.349\ \mathrm{V}.$$

Az egyes koszinuszok összege $t = 0 \pm kT$-ben veszi fel maximumát, a közbenső időpontokban ugyanis mindig van olyan koszinusz, amelyik nem veszi fel csúcsértékét. Ezekben a pontokban a csúcsérték:

$$U_{p,e} = NU_{p,i} = NU\sqrt{2}.$$

A csúcstényező tehát:

$$k_p = \frac{U_{p,e}}{U_e} = \frac{NU\sqrt{2}}{\sqrt{N}U} = \sqrt{2N} = 3.464.$$

9.37. A négyszögablak Fourier-transzformáltja majorálható az alábbi módon:

$$X(f) = T\mathrm{sinc}(fT) = T\frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \le T\frac{1}{\pi fT}.$$

A mintavételi frekvencia meghatározásához meg kell határozni a sávszélességet. Mivel ez elvileg végtelen, a megadott feltétel alapján határozható meg egy korlát:

$$\frac{1}{\pi BT} = 1\%.$$

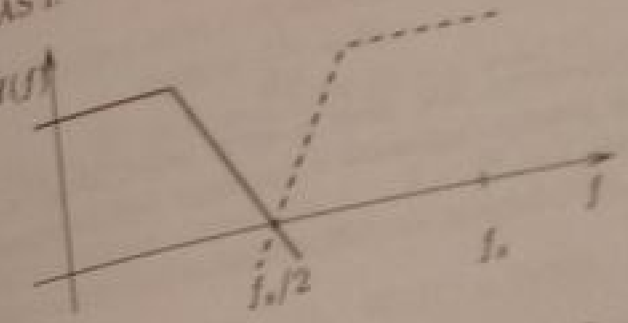
Ebből:

$$B = \frac{100}{\pi T}.$$

A mintavételi frekvencia ennek több mint kétszerese:

$$f_s > \frac{200}{\pi T}.$$

9.38. A dinamikatartomány olyan szintbeli tartományt jelöl ki, amelybe eső jelek szintje nagyobb, mint az ott megjelenő zajok, zavarok szintje. Ezt a tartományt leggyakrabban egy referenciaszinthez képest adják meg, annak arányában, ezért kényelmes a dB-skála. A 60 dB dinamika azt jelenti, hogy az ilyen arányban változó jeleket még nem zavarják idegen jelkomponensek. A mintavételezés miatt a spektrumok ismétlődnek, amennyiben a mintavételi tétel feltételét nem tartottuk be, vagy a jel nem sávkorlátozott, átlapolódnak. Az átlapolásgátló szűrő megakadályozza, hogy az átlapolódás mértéke jelentős legyen, de csak annyira, amekkora elnyomást tud biztosítani. Ezt szemlélteti a következő ábra:



Feltételezve, hogy a szűrő karakterisztikája a fenti, minél nagyobb a mintavételi frekvencia, annál jobban nyomja el a belapolódó komponenseket. A legkisebb elnyomás $f_s/2$-nél valósul meg, tehát a teljes sávra vonatkozó dinamika ennek alapján számolható ki. Ha a töréspont frekvencia 1 kHz és a meredekség 60 dB/dekád, 10 kHz-en éppen 60 dB az elnyomás. Tehát a 60 dB dinamika biztosítható, ha:

$$f_s/2 > 10\ \mathrm{kHz},$$

azaz

$$f_s > 20\ \mathrm{kHz}.$$

9.39. A 9.32. példa megoldásából indulhatunk ki. A szükséges mérési pontosság (abszolút hiba):

$$\Delta f = h f' = 0.45\ \mathrm{Hz},$$

ahol $h = 1\%$ a kívánt pontosság, $f' = 0.9f = 0.9 \cdot 3000/60 = 45$ Hz a vár-ható fordulatszám, illetve rezgési frekvencia. A mérési eredményt úgy kapjuk, hogy a legnagyobb csúcs mért frekvenciáját m-mel osztjuk. A legnagyobb csúcs frekvenciamérésének hibája a DFT felbontása, az osztás utáni eredmény hibája ennek m-edrésze. Eszerint tehát a felbontás:

$$\Delta f_{DFT} = m\Delta f.$$

A szükséges pontszám:

$$N = \frac{f_s}{m\Delta f} = 2540.$$

9.40. A feladat része a húrfrekvencia meghatározása. A hegedű húrjai a követ-kező frekvenciákra esnek:

G_3 195 Hz,
D_4 293 Hz,
A_4 440 Hz,
E_5 660 Hz.

Az egymást követő húrok frekvenciaaránya 2:3. Az E_5 húr frekvenciája te[…]
$f_5 = 660$ Hz, ezt kell megmérni. A szükséges pontszám a 9.32. példa sze[…]

határozható meg:

$$M = \frac{f_s}{h f_0} \cong 6682.$$

M nem 2 egész hatványa, sőt, nem is egész szám. Hogy a mérési pontosság ne csökkenjen, az ezt követő legkisebb 2 hatványt kell kiválasztani, azaz:

$$N = 8192.$$

9.41. A temperált hangskála szomszédos hangjai frekvenciájának hányadosa $\sqrt[12]{2}$. Ennek megfelelően a mérendő frekvenciakülönbség:

$$\Delta f_z = f_z \left(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right).$$

A feladat szerint az $m = 7$. felharmonikus még mérhető, azaz a 9.39. példa megoldását is felhasználva:

$$M = \frac{f_s}{m \Delta f_z} \cong 510.2.$$

Az ezt követő első 2 hatvány lesz az FFT pontszáma:

$$N = 512.$$

9.42. A feladat szövege alapján egyértelmű, hogy a DFT két szomszédos spektrumvonala 1000 és 1025 Hz-re esik. A két frekvencia között ugyanis fellép a szivárgás jelensége. A szivárgás hiányából lehet következtetni arra, hogy a két frekvencia valóban osztópontja a DFT-nek, a mérés körülményeiből – lassú frekvenciaváltoztatás, a növekvő és a csökkenő szivárgás megfigyelése – pedig a szomszédosságra. Ennek alapján a DFT pontszáma:

$$N = \frac{50\ \text{kHz}}{25\ \text{Hz}} = 2000.$$

9.43. Az ablakfüggvénnyel a diszkrét időtartományban meg kell szorozni a regisztrátumot, ennek a frekvenciatartományban diszkrét és cirkuláris konvolúció felel meg. Ha a spektrumot már kiszámítottuk, a Hanning-ablak spektrumával kell konvolválni a spektrumot. A Hanning-ablak és spektruma:

$$w(n) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi/Nn), \quad n = 0, \ldots, N-1;$$

$$W(0) = \frac{1}{2}, \quad W(1) = W(N-1) = -\frac{1}{4}.$$

Az ablakfüggvény alkalmazása után a spektrum:

$$Y(k) = \sum_{i=-1}^{1} W(i \bmod N) X((k-i) \bmod N), \tag{29}$$

ahol $X(k)$ az eredeti spektrum eleme. Ha $1 < k < N-2$, az indexelés problémamentes. Egyébként a cirkuláris konvolúciónak megfelelően:

$$W(-1) = W(N-1), \quad W(N) = W(0),$$

hasonlóképpen $X(k)$-ra is. A (29) egyenlet azt fejezi ki, hogy az eredeti spektrum minden eleméből levonjuk szomszédainak átlagát, majd az így képzett összeget osztjuk 2-vel.

9.44. Periodikus jelek komplex exponenciálisok összegeként állnak elő. Mivel a transzformáció lineáris, ezek spektruma előállítható a komponensek spektrumának összegeként. A konvolúció az ablakfüggvény spektrumát eltolja a nulla helyről ($k = 0$) a komplex exponenciális frekvenciájára, az exponenciális amplitúdója szorzódik az ablakfüggvény zérushelyen felvett értékével. Ebből következik, hogy az ablakfüggvénynek olyannak kell lenni, hogy spektruma a zérushelyen egyezzen meg a négyszögablak spektrumának zérushelyen felvett értékével. Mivel ez a 9.11. példában adott definíció esetében éppen N (más definícióval éppen egységnyi), ezért itt is ezt kell elérnünk. Az ablakfüggvény spektruma a $k = 0$ helyen:

$$W(0) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\frac{2\pi n 0}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} w(n).$$

Azaz az ablakfüggvény normált együtthatói:

$$w'(n) = \frac{N}{\sum_{(i)} w(i)} w(n).$$

9.45. A példa szövegében szereplő „meghatározó" azt jelenti, hogy az egyik művelet időigénye elhanyagolható a másikéhoz képest. Változatlan sávszélesség, azaz mintavételi frekvencia mellett a felbontás kétszeresére növelése azt jelenti, hogy a regisztrátum hosszát kétszeresére kell növelni:

$$N' = 2N.$$

a) Ebben az esetben a számítás ideje elhanyagolható, a mérési idő tehát a $2N$ hosszú regisrtrátum mintavételi ideje, azaz:

$$t'_m = \frac{2N}{f_s} = 2\frac{N}{f_s} = 2t_m.$$

b) A számítási idő meghatározható a definíciós szumma alapján (9.11. példa): N spektrumvonal meghatározásához egyenként N műveletet kell végezni, azaz egy spektrum meghatározásához N^2 műveletet. Ha a mérési idő a műveletek számával arányos:

$$t'_m = c(2N)^2 = c4N^2 = 4t_m.$$

A DFT definíció szerinti számítása igen nagy számításigényű, ezért a spektrum meghatározása a gyakorlatban szinte mindig a c) kérdésben említett FFT-vel történik.

c) A számítási idő ebben az esetben is arányos a műveletek számával. Eredetileg:

$$K = N\log_2 N + N.$$

Nagyobb felbontás esetén:

$$K' = 2N(\log_2 N + 1) + 2N.$$

Jól látható, hogy itt a növekedés több, mint 2-szeres, de nem számottevően.

10. Jelfeldolgozás II.

10.1. Bevezető feladatok

10.1. Valós jelekre az autokorrelációs függvény páros, azaz $R(\tau) = R(-\tau)$ és nemnegatív, azaz $R(0) \geq 0$. Ezen kívül maximumát felveszi a nulla helyen. Ennek alapján:

a) Nem lehet, mert a megadott függvényre $R(\tau) \neq R(-\tau)$.

b) Lehet, az időfüggvény: $x(t) = AT\mathrm{sinc}(t/T)$.

c) Nem lehet, mert a megadott függvényre $R(0) < 0$.

10.2. A függvény $\tau = 0$-ban felveszi a maximumát és páros, ezek szükséges feltételek ahhoz, hogy a függvény autokorrelációs függvény legyen. A 10.11. példa megoldásában szereplő teljesítménysűrűség-spektrum éppen egy ilyen függvényhez tartozik (ott $T = 4$). Ha figyelembe vesszük, hogy egy lineáris rendszerre igaz, hogy

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f),$$

ahol $S_y(f)$ és $S_x(f)$ rendre a kimenőjel és a bemenőjel teljesítménysűrűség-spektruma, $H(f)$ pedig átviteli karakterisztika; akkor $S_y(f)$ előállítható úgy, hogy fehér zajt (teljesítménysűrűség-spektruma egységnyi) szűrünk az alábbi aluláteresztő karakterisztikával:

$$H(f) = \frac{\sqrt{2T}}{1 + j2\pi fT}$$

Így a kimenet autokorrelációs függvénye a példában szereplő függvény, tehát valóban lehet autokorrelációs függvény.

10.3. $x(t)$ stacinoner és ergodikus folyamat. Ebben az esetben a kérdéses mennyiségek az időfüggvény alapján számíthatók. A várható érték

$$\mu = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = 0.$$

A variancia (mivel a várható érték zérus):

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{A^2}{2}.$$

Az autokorrelációs függvény pedig:

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos 2\pi ft\cdot\cos 2\pi f(t+\tau)dt = $$
$$= \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f\tau.$$

10.4. A példa szövege alapján felírható a jel teljesítménysűrűség-spektruma:

$$S(f) = \frac{\sigma^2}{2B}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right).$$

Ennek inverz Fourier-transzformáltja az autokorrelációs függvény:

$$R(\tau) = \sigma^2\mathrm{sinc}(2B\tau).$$

10.5. A 10.3. példa megoldásában szereplő definíciós integrálokból is látható, hogy a négyzetes várható érték az autokorrelációs függvény értéke a $\tau = 0$ helyen. Ez a jel teljesítménye is (lásd még: 1.2. feladat):

$$P = R(0) = A^2.$$

10.6. Nem stacioner. Ha a szinuszfüggvény argumentuma $\pi/2 \pm k\pi$, $k = 0, 1, ..$, a jel varianciája egyenlő az A valószínűségi változó varianciájával (egyik esetben sem zérus). Ha azonban az argumentum $\pm k\pi$, $k = 0, 1, ..$, a jel varianciája A-tól függetlenül zérus. Mivel az argumentum az idő függvénye, a jel varianciája is időfüggő, azaz a jel nem stacioner.

10.7. Nem, mert várható értéke a feladat szerint zérus, ugyanakkor:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \xi \neq 0.$$

10.8. Egyik esetben sem ergodikusak, ugyanis a jelek nem is stacionerek (lásd 10.6. feladat).

10.2. Gyakorló feladatok

10.9. A várható érték:

$$\mu = \sqrt{\lim_{\tau\to\infty} R(\tau)} = 0.$$

A szórás (lásd még 10.5. feladat):

$$\sigma = \sqrt{R(0) - \mu^2} = \sqrt{A} = 10\ \mathrm{V}.$$

A sávszélesség meghatározásához szükség van a teljesítménysűrűség-spektrumra:

$$S(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\} = \frac{A}{T}\mathrm{rect}(fT).$$

Ebből a sávszélesség:

$$B = \frac{1}{2T} = 5\ \mathrm{kHz}.$$

10.10. A 10.3. feladat megoldását is felhasználva a variancia:

$$\sigma^2 = R(0) - \mu^2 = \frac{A^2}{2} = 4\ \mathrm{V}^2.$$

Ebből az amplitúdó:

$$A = 2.828\ \mathrm{V}.$$

A periódusidő:

$$T = \frac{1}{f} = 1\ \mathrm{ms}.$$

A kezdőfázis nem állapítható meg az autokorrelációs függvényből.

10.11. A várható érték:

$$\mu = \sqrt{\lim_{\tau\to\infty} R(\tau)} = 0.$$

A teljesítmény:

$$P = R(0) = 1.$$

A teljesítménysűrűség-spektrum az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau/T}e^{-j2\pi f\tau}d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\tau/T}e^{-j2\pi f\tau}d\tau = $$
$$= \frac{2T}{1+(2\pi fT)^2}.$$

10.12. A Steiner-tételt is felhasználva:

a)

$$\sigma^2 = \psi^2 - \mu^2 = R(0) - R(\infty) = 2.$$

b)

$$\sigma^2 = \psi^2 - \mu^2 = R(0) - R(\infty) = 1.5.$$

$$R(\infty) = \lim_{\tau \to \infty} R(\tau).$$

ahol:

10.13. Mivel a teljesítménysűrűség-spektrum $f = 0$ infinitezimális környezetében vett integrálja zérus (nem tartalmaz Dirac-deltát), a jel várható értéke zérus, így írható, hogy:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = 2\int_0^{\infty} e^{-2\pi f T} df = \frac{1}{\pi T}.$$

10.14. A megadott függvény alapján:

$$\mu^2 = M, \quad \sigma^2 = C.$$

Ebből:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2} = 2 \text{ A}.$$

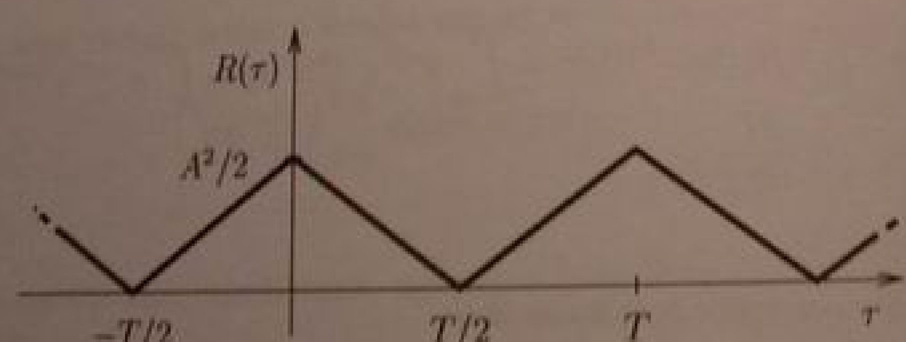
10.15. Az autokorrelációs függvény a teljesítménysűrűség-spektrum inverz Fourier-transzformáltja:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df = 2BS_0 \operatorname{sinc}(2B\tau).$$

10.16.

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \begin{cases} A^2/2, & \text{ha } \tau = 0 \text{ (teljes átlapolódás)} \\ 0, & \text{ha } \tau = T/2 \text{ (nincs átlapolódás)} \end{cases}$$

A két érték között a korrelációfüggvény lineárisan változik az alábbi ábra szerint:



10.17.

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df} = \sqrt{2S_0 \int_0^{\infty} e^{-2\pi f RC} df} = \sqrt{2} \text{ V} \cong 1.414 \text{ V}.$$

10.18. A 10.8. feladat indoklása alapján a jel nem ergodikus.

10.19. Nem, ugyanis a jel nem is stacioner. A jel $t = 0$-ban csak nemnegatív értékeket vehet fel, így várható értéke pozitív; ha $t = 1/(4f_0)$ $(2\pi f t = \pi/2)$, akkor csak nempozitív értékeket vehet fel, így várható értéke negatív. Mivel tehát a várható érték függ az időtől, a jel nem stacioner.

10.20. A jel és a zaj teljesítménye:

$$P_{\text{jel}} = A^2/2, \quad P_{\text{zaj}} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = 2BS(0).$$

A jel-zaj viszony a kettő hányadosa dB-ben kifejezve:

$$\text{SNR} = 10\lg\frac{P_{\text{jel}}}{P_{\text{zaj}}} = 60 \text{ dB}.$$

10.3. Összetett feladatok

10.21. Legyen a szinuszos jel $x(t)$, a σ szórású zaj pedig $n(t)$. Ekkor a modulált jel időfüggvénye a következő:

$$y(t) = n(t) \cdot x(t) = A\, n(t) \sin 2\pi f_0 t,$$

ahol A a szinuszjel amplitúdója. Írjuk fel a jeleket a frekvenciatartományban! A zaj teljesítménysűrűség-spektruma legyen $S_n(f)$, a szinuszos jelé pedig

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0).$$

A moduláció az időtartományban szorzás, a frekvenciatartományban konvolúció. Így a modulált jel spektruma a következő:

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\nu) S_n(f - \nu) d\nu = \frac{A^2}{4} S_n(f - f_0) + \frac{A^2}{4} S_n(f + f_0).$$

Mivel

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)df,$$

ezért

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = \frac{A^2}{2}\sigma^2.$$

A feladat szerint $\sigma_y = \sigma$ kell, azaz

$$A = \sqrt{2}$$

szükséges.

10.22. Lineáris időinvariáns rendszerek esetében:

$$S_{xy}(f) = H(f) S_x(f).$$

ahol $S_x(f)$ a bemenet teljesítménysűrűség-spektruma és $S_{xy}(f)$ a kimenet és a bemenet keresztteljesítménysűrűség-spektruma, $H(f)$ pedig a rendszer átviteli karakterisztikája. Valós jel esetén a bemenet teljesítménysűrűség-spektrumára igaz, hogy:

$$S_x(f) = S_x(-f),$$

továbbá a Hilbert-szűrőre a feladat szerint igaz, hogy:

$$H(f) = -H(-f).$$

Ebből következik, hogy

$$S_{xy}(f) = -S_{xy}(-f).$$

A keresztkorrelációs függvény a keresztteljesítménysűrűség-spektrum inverz Fourier-transzformáltja, ennek értéke a kérdéses $\tau = 0$ helyen:

$$R_{xy}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f 0} df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) df = 0,$$

hiszen a keresztteljesítménysűrűség-spektrum antiszimmetrikus.

10.23. A megoldásban azt a közelítést alkalmazhatjuk, hogy a 95%-os konfidenciaintervallumhoz kétszeres szórás tartozik. (Gauss-eloszlás esetén ez precízen 1.96σ.) A méréshatárt is figyelembe véve a hibára az alábbi egyenlőtlenség írható fel:

$$2\sigma' < 10^{-5}\ \mathrm{V},$$

ahol σ' jelöli az átlagolt mérési eredmény szórását. Egy T integrálási idejű dual-slope AD-átalakító ekvivalens zajsávszélessége a következő:

$$B_e = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2|H(0)|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt}{2|H(0)|^2} = \frac{1}{2T},$$

ahol:

$$h(t) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right).$$

A szűrt zaj (tehát a mérési eredmény) varianciája:

$$\sigma'^2 = \sigma^2 B_e,$$

ahol

$$\sigma = \sqrt{S_x(0)} = 10\ \mu\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}.$$

Ennek alapján:

$$\begin{aligned} \sqrt{S_x(0) B_e} &< 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V} = 5\ \mu\mathrm{V}, \\ 10\ \mu\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \sqrt{\frac{1}{2T}} &< 5\ \mu\mathrm{V}, \\ T &> 2\ \mathrm{s}. \end{aligned}$$

10.24. A szűrő kimenetén megjelenő zaj varianciája:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \int_{-f_s/2}^{f_s/2} |H(f)|^2 df,$$

ahol

$$\sigma_x^2 = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}.$$

Figyeljük meg, hogy a diszkrét rendszer átviteli függvénye miatt az integrált a $[-f_s/2, f_s/2]$ intervallumra kell számítani. A Parseval-tétel értelmében:

$$\int_{-f_s/2}^{f_s/2} |H(f)|^2 df = \sum_{n=0}^{N-1} h^2(n),$$

ahol N a szűrőegyütthatók száma. A fentieket összevetve:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{N-1} h^2(n)}.$$

A szűrő kimenetén megjelenő jel maximális értéke a következő:

$$y_{\max} = \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|, \quad y_{\min} = -y_{\max},$$

ugyanis tetszőleges bemenőjel esetén ennél nagyobb kimenet nem fordulhat elő. A csúcstényező a maximális érték és az effektív érték hányadosa, azaz:

$$k_p = \frac{y_{\max}}{\sigma_y} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|}{\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N-1} h^2(n)}}.$$

10.25. A „szint" akkor nem változik, ha az egyes csúcsok szintje sem változik. A DFT tekinthető úgy, mint egy egybemenetű – N-kimenetű szűrőbank, ahol minden kimenethez egy az adott pontra illeszkedő sávszűrőkarakterisztika tartozik. A sávközép az adott ponthoz tartozó diszkrét frekvencia. Egy adott kimeneten megjelenő jel teljesítménysűrűség-spektruma:

$$S_y(f) = |W(f)|^2 S_x(f),$$

ahol $S_x(f)$ a bemenőjel teljesítménysűrűség-spektruma, $W(f)$ pedig az ablakfüggvény átviteli karakterisztikája. A spektrumvonal nagysága a fenti módon szűrt jel teljesítményével arányos, ezért $W(f)$-re az

$$\int_{-f_s/2}^{f_s/2} |W(f)|^2 df = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} |W_{\mathrm{rect}}(f)|^2 df$$

egyenlőségnek kell teljesülni, ha azt akarjuk, hogy a négyszögablakhoz képest a szint ne változzon. A fenti képletben $W_{\mathrm{rect}}(f)$ a négyszögablak átviteli karakterisztikája. Minthogy

$$\hat{S}_x(f) = |\mathrm{DFT}(x(n))|^2,$$