2016. 02. 18.

Biomechanika

3 téma:

- szilárdtestek mechanikája (7) III. 24-ig + IV. 21. – Németh Róbert előadó K.MF 63.2.
- áramlástan (4) III. 31 – IV. 28 – Till Sára
- mozgásvizsgálat (3 előadás) V. 5 – 19. – Kiss Rita

$\underbrace{8^{30} - 10^{00}}_{E404}$, 15 perc szünet, $\underbrace{10^{15} - 11^{45}}_{E403}$

számonkérés: nincs ZH, csak vizsga: 3 téma, 30% → vizsga

86 – 5
. . . . .
50 – 2 } megajánlott jegyek

Szilárdtestek mechanikája:
- statika
- szilárdság

csoportosítás:

halmazállapot: folyékony; gáz; szilárd

tényleges (alakváltozásra képes)

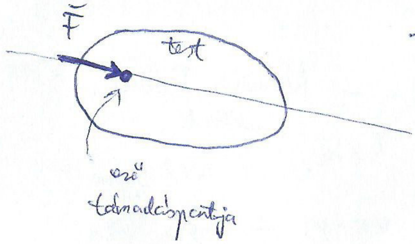
merevtestek statikája (nem alakváltozó)

kinetika (mitől mozog)

... (hogyan mozog)

Erő: olyan hatás a test mozgásállapotát megváltoztathatja / megváltoztathatná vagy az alakját

- nagysága
- iránya = hatásvonal + irányítottság



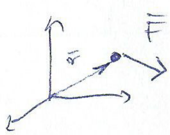
erő hatásvonala (térbeli egyenes)

húzóerő

vektor = nagyság + irány ($\vec F$)

> ha nem csak a vektor számít, hanem minden egyéb hatás is, akkor $\vec F$ helyett F a jelölés

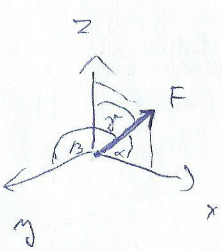
Erő megadása:



támadáspont (helyvektorral megadva)
erő vektora

$$\underbrace{\vec r\,(x, y, z) \;;\; \vec F\,(x, y, z)}_{6 \text{ adat kell}}$$

a hatásvonal mentén ugyanaz a hatás → 5 független adat



$$|\vec F| + \alpha + \beta + \gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

koszinusz-tétel

Zérus erő: $F = 0$

iránya bármilyen

Kölcsönhatás: testek között

test + mező között → közel, távolhatás

külső erő: elkülönült test

belső erő: test részeit összetartó erő

koncentrált vagy elosztott

Erőrendszer: több erő együttes hatása

$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$

- egyenértékűség: ugyanazt a testre ugyanazt a hatást hozza létre (mindkét) erőrendszer

  pl.: $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \doteq (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3)$

  $\doteq$ nem csak a nagysága / iránya, hanem minden hatása ugyanaz

  6 független egyenlettel írható le

- eredő erő: az az egyetlen erő, ami az adott erőrendszerrel egyenértékű

  ha az eredő erő 0, akkor **egyensúlyi erőrendszer**

- ellenerő: $F_2 = -F_1 \Rightarrow (F_1, F_2) = 0$

$$(F_1, F_2, F_3) = R \quad \leftarrow \text{eredő erő}$$

$$(F_1, F_2, F_3, F_4) = (R, F_4)$$

$$(F_1, F_2, F_3, F_4, -F_4) = R$$

$$(F_1, F_2) \doteq (F_2, F_1)$$

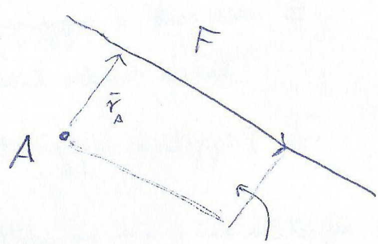
Három erő egyensúlya:
- a hatásvonalaknak legyen közös metszéspontjuk
- a vektorok irányából nyílfolytonos, zárt háromszög legyen rajzolható

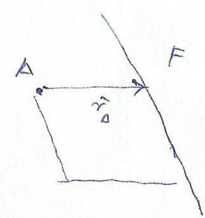
↳ (egy síkban kell lennie az erőknek)

ez is Δ-nek minősül

A lényeg, hogy visszaérjünk a kezdőpontba.

Erő nyomatéka:





$$\bar{M}_A = \bar{r}_A \times \bar{F}$$

$|\bar{M}_A|$ = a paralelogramma területe

$$|\bar{M}_A| = |F| \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{távolsága az A és F-nek}}}{d_F}$$

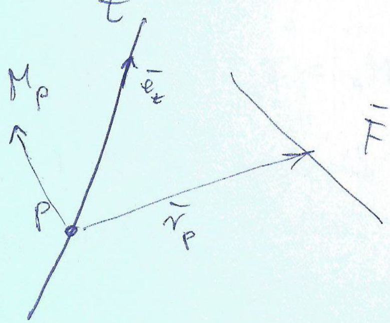
$$(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hatásvonalon elmozdulunk}}}{\bar{r}_A + \bar{f}}) \times \bar{F} = \bar{r}_A \times \bar{F} + \underbrace{\bar{f} \times \bar{F}}_{0 \text{ mert párhuzamos}}$$

$$\bar{M}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_{Ax} & r_{Ay} & r_{Az} \\ F_{Ax} & F_{Ay} & F_{Az} \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_A = \begin{bmatrix} r_{Ax}F_{Az} - r_{Az}F_{Ay} \\ r_{Az}F_{Ax} - r_{Ax}F_{Az} \\ r_{Ax}F_{Ay} - r_{Ay}F_{x} \end{bmatrix}$$

Erő nyomatéka tengelyre :

- kiválasztunk a tengelyen egy P pontot, és erre határozzuk meg az erő nyomatékát

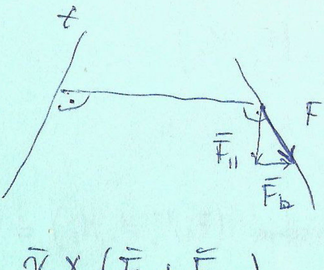


$\bar{M}_p = \bar{r}_p \times \bar{F}$

$\bar{M}_p$ vetítése t-re

$\bar{M}_t = \bar{M}_p \cdot \bar{e}_t$ skaláris szorzat

- normáltranszverzális : két egyenes között a legrövidebb szakasz



$\bar{F}$ felbontása merőleges és párhuzamos komponensre.

$M_t = \pm |\bar{F}_b| \cdot |\bar{r}_n| \cdot \sin\beta$

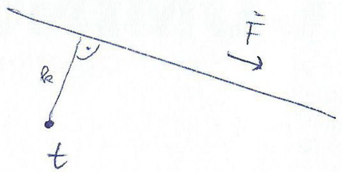
$\beta = \sphericalangle(\bar{r}_n, \bar{F}_{\parallel})$

$\bar{M}_p = \bar{r}_n \times (\bar{F}_{\parallel} + \bar{F}_b)$

$\bar{M}_t = \underbrace{(\bar{r}_n \times \bar{F}_{\parallel})\cdot \bar{e}_t}_{0} + (\bar{r}_n \times \bar{F}_b)\cdot \bar{e}_t = (\bar{r}_n \times \bar{F}_b)\bar{e}_t = (\bar{F}_b \times \bar{e}_t)\cdot \bar{r}_n \cdot \sin\beta$

Erő nyomatéka = erő · erőkar

síkban:



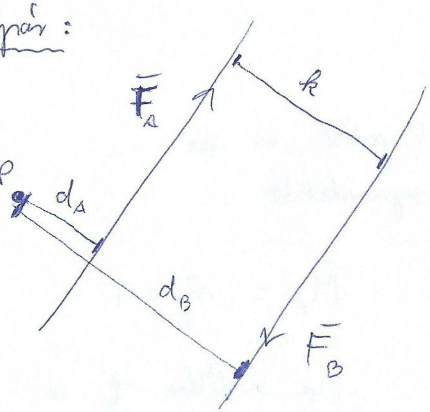
$M_t = F \cdot k$

$M_t > 0$, ha ↻ irányú

$M_t < 0$, ha ↺ irányú

- ha $\bar F$ és t $\parallel$, akkor $M = 0$
- ha $k = 0$, akkor van metszéspont, $M = 0$

Erőpár:



$\bar F_A \parallel \bar F_B$

$|\bar F_A| = |\bar F_B|$

$M_P = -F_A \cdot d_A + F_B \cdot d_B$

$M_P = F_A (d_B - d_A) = F \cdot k$

független P-től!

a sík minden pontjára ugyanúgy forgat

forgatónyomaték $\doteq$ erőpár

$(F_A, F_B) \doteq M$

dinámrendszer

(F_1, F_2, M_1, M_2)

ERŐK + NYOMATÉKOK } DINÁMOK

Feladattípusok: erők eredőjének meghatározása $(F_1, F_2, M_1, M_2) \doteq ?$

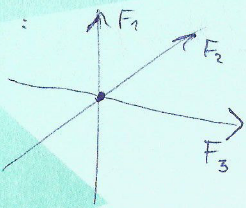
egyensúlyozás $(F_1, F_2 \dots, M \dots, ?) \doteq 0$

Eredőszámítás :

⟨speciális eset⟩

közös metszéspontú erőrendszer

síkban :



$(F_1, F_2, F_3) = R$

R is átmegy a közös ponton

vetületi egyenletek : $\Sigma F_{ix} : R_x$

$\Sigma F_{iy} : R_y$

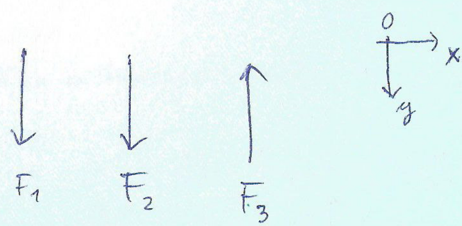
$(\Sigma F_{iz} : R_z)$

a nyomatékokkal nem kell számolni

másik módszer : vektorok egymás után rajzolása

⟨speciális eset⟩

párhuzamos erőrendszer



$(F_1, F_2, F_3) = R$

$\Sigma F_{iy} = F_1 + F_2 - F_3 = R_y$

$(\Sigma F_{ix} = \Sigma F_{iz} = 0)$

$\Sigma M_{io} = +F_1 X_1 + F_2 X_2 - F_3 X_3 = R_y X_R$

origó

ha $R_y = 0$-ra jönne ki, akkor nem tudunk 1 erővel helyettesíteni !

↓

csak forgatónyomaték van → erőpár

eredő lehetséges értei:

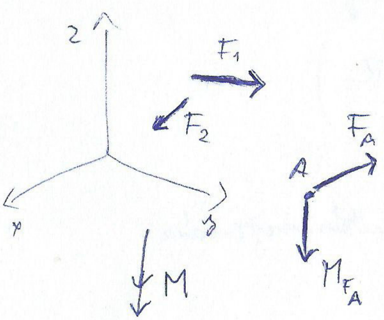
- egyensúly (zérus erő)
- erő
- forgatónyomaték
- erőcsavar (térben)

Térbeli dinámrendszer eredője:

- erőrendszer pontra redukálása

$$(F_1, F_2, \dots, M, \dots) \doteq (F_A, M_{F_A})$$

↑
A ponton átmenő erő



vetületi egyenletek:

$$\Sigma F_{i_x} = F_{A_x}$$
$$\Sigma F_{i_y} = F_{A_y}$$
$$\Sigma F_{i_z} = F_{A_z}$$

Ha az A pontban összegezzük az erőket: $\Sigma M_{i x_A} : \left(\Sigma r_{iA} \times F_i\right)_x + \Sigma M_{i_x} = M_{A_x}$

$\Sigma M_{i y_A}$: —"—

$\Sigma M_{i z_A}$: —"—

$$F_A = \begin{bmatrix} F_{A_x} \\ F_{A_y} \\ F_{A_z} \end{bmatrix} \qquad M_{\bar{A}} = \begin{bmatrix} M_{A_x} \\ M_{A_y} \\ M_{A_z} \end{bmatrix}$$

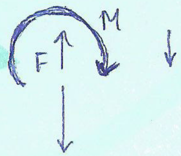
Pontra redukálás : $(F_1, F_2, \dots, M, \dots) \doteq (F_A, M_A)$

ha $\bar{F}_A = \bar{0}$ és $\bar{M}_A = \bar{0}$, akkor egyensúlyi lesz a rendszer

ha $\bar{F}_A = \bar{0}$ és $\bar{M}_A \neq 0$, akkor az eredő egy forgatónyomaték

ha $\bar{F}_A \neq 0$ és $\bar{M}_A \neq 0$, akkor bonyolult ...

síkban :



$$(F, M) = R$$

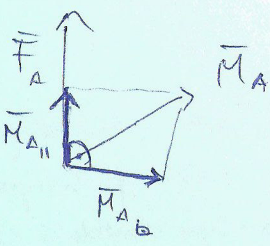
$$\sum F_{iy} = F \doteq R$$

$$\sum M_{i_0} = F x_1 + M = R \cdot x_R$$

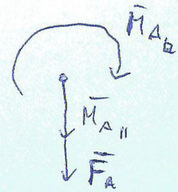
Ha $\bar{F}_A \neq 0$ és $\bar{F}_A \perp \bar{M}_A$, akkor (tudjuk úgy forgatni a koordinátarendszert, hogy ezt el tudjuk végezni.) $\Rightarrow$ ERŐ

$$\bar{F}_A \cdot \bar{M}_A = 0 \quad \text{(skaláris szorzat)}$$

Ha $\bar{F}_A \neq 0$, $\bar{M}_A \neq 0$ $\Rightarrow$ $\bar{F}_A \cdot \bar{M}_A \neq 0$



$\Longrightarrow$



$$F = R$$

$$F \cdot x_1 + M = R x_R$$

$$x_R = \frac{F x_1}{R} + \frac{M}{R}$$

$$x_R = x_1 + \frac{M}{F}$$

$$(F_A, M_A) = (F_A, M_{A_\perp}, M_A'') = (R_1, M_A'')$$

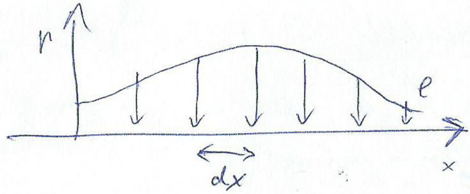
$$(F_A, M_{A_\perp}) = R_1$$

$+$

$$(F_A, M_A'') = M_A'' = R_2$$

$\Rightarrow$ ERŐCSAVAR

Megoszló erők eredője :

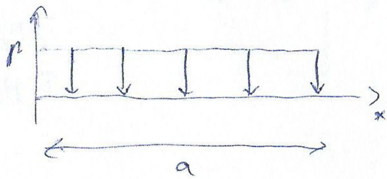


$p \left[\frac{N}{m}\right]$

$$R = \int_l p \, dx$$

$$R \cdot x_R = \int_l x \cdot p \, dx \Rightarrow x_R = \frac{\int_l p \cdot x \, dx}{\int_l p \cdot dx}$$

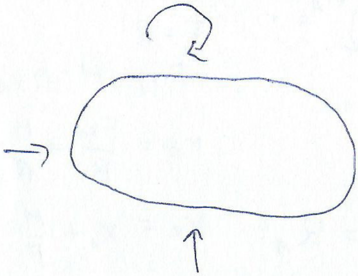
konstans teherfüggvény :



$R = p \cdot a$

Szerkezetek :

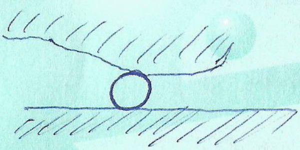
- mechanizmusok (bonyolult)
- tartók → bármilyen teher hatására egyensúlyban van
  - egyszerű (egy merev test)
  - összetett (több merev testből áll)

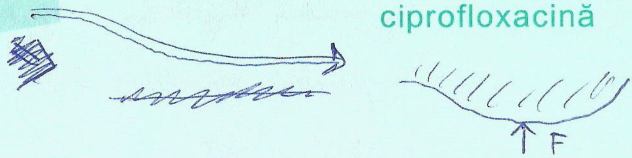


kényszerek : amik a testet a külvilághoz kötik
ezek általában pontkényszerek
valamilyen elmozdulás - jellemző
megakadályozó szerkezeti kiala-
kítás, kapcsolat a külvilággal

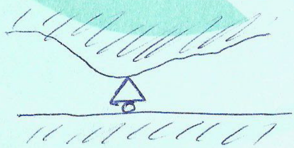
kényszer fokszáma : meggátolt ~~[illegible]~~ mozgás kompo-
nensek száma

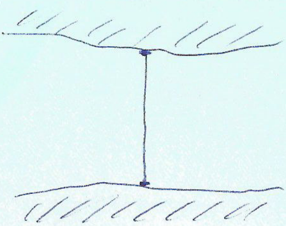
1 fokú kényszerek:





görbülő megtámasztás
görgős

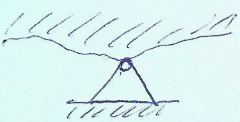




támasztó-rúd

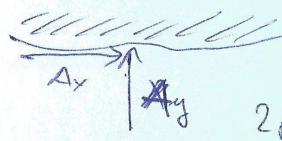
⇒

többfokú kényszer:



se jobbra
se balra
se le
se föl

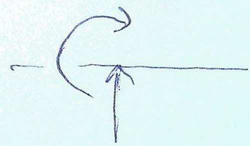
⇒



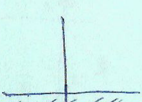
2 fokú

↔ csúszhat

⇒

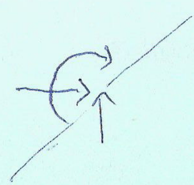


2 fokú



merev
befogás

⇒



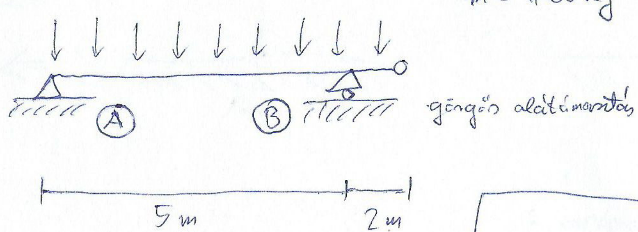
3 fokú

Egyensúlyozás: határozzuk meg a kényszerekben a testre átadódó erőket!

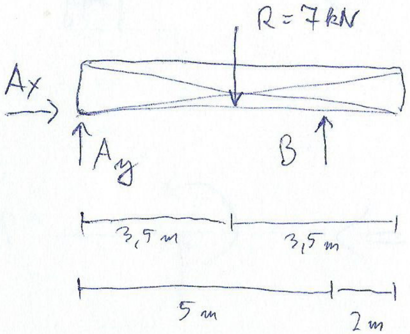
lépések:
- elkülönítés: test, terhek, reakciók
- egyensúlyi kijelentés (egyik oldalon 0)
- egyensúlyi egyenletek felírása, megoldása
- eredményvázlat rajzolása

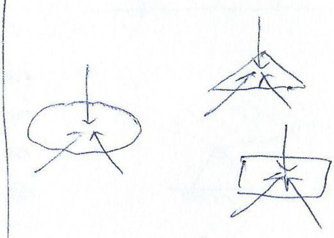
Pl.:

$m = 700\ kg$



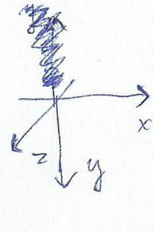
- reakciók számítása:





Mindegy, milyen a test.
(egyensúlyozás szempontjából)

- egyensúlyi kijelentés: $((q), B, A) \doteq 0$



x és y irányban nem forog

z irányban nincs erő (2D)

3 db független egyensúlyi egyenlet írható fel

– egyenletek felírása :

$$\Sigma F_{ix} : A_x = 0$$

$$\Sigma F_{iy} : +7\,kN - B - A_y = 0$$

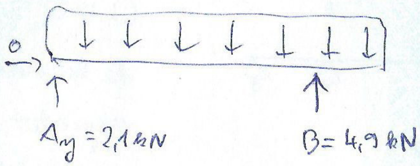
ΣM_i : kiválasztjuk az A pontot :

$$+7\,kN \cdot 3{,}5\,m - B \cdot 5\,m + \underbrace{0}_{\text{A pont forgatónyomatéka}} = 0$$

$$\text{III} \rightarrow B = 4{,}9\,kN\ (\uparrow)$$

$$\text{II} \rightarrow A_y = 2{,}1\,kN\ (\uparrow)$$

– eredményvázlat :

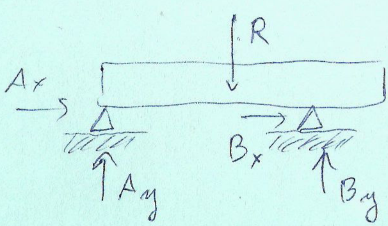


vegyük fel a B pontra a forgatónyomatékot!

$$\Sigma M_i^B : -7 \cdot 1{,}5 + A_y \cdot 5 = 0 \Rightarrow A_y = 2{,}1\,kN$$

előnye : nem kell B-t felhasználni!

bármilyen terhelés esetén egyértelmű megoldás van → statikailag határozott tartó



$$((q), A, B) = 0$$

nincs elég egyenlet!

$A_x + B_x = 0$ ✗

$\Sigma M_i^{(A)} \rightarrow B_y$ ✓

$\Sigma M_i^{(B)} \rightarrow A_y$ ✓

statikailag határozatlan tartó

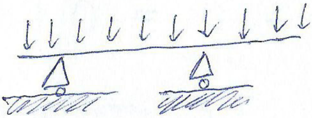
van olyan teher, amire egyensúlyban van, de az egyensúlyi egyenlet megoldása nem egyértelmű!

másik pl.:

nincs olyan pont, ahol sem B, sem C nem forgat

---

statikailag túlhatározott tartó : van olyan teher, amire az egyensúlyi egyenletrendszernek nincs megoldása

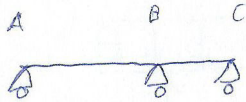


$0 = 0$ $\quad \Sigma F_{i_x}$

A_y, B_y

---

kombináció : statikailag határozatlan és túlhatározott egyszerre!



$0 = 0$

de ha mindhárom pontra felírnánk egyenletet, akkor nem lennének egymástól független egyenletek!