1. feladat (6+10=16 pont)
a) Mondja ki és igazolja a rendőrelvet!
b) Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+3n+4}{3n^2+n-3}}$$

sorozat határértékét.

Mo. *a*) Ha $a_n \le b_n \le c_n$, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$=A , mert $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N_1, N_2$, hogy $n \ge N_1$ esetén $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$ és $n \ge N_2$ esetén $A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon$, így $n \ge \max(N_1, N_1)$ esetén $A-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A+\varepsilon$.

b) A rendőrelv alapján $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, mert ($n \ge 3$ esetén)

$$1 \longleftarrow \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{4}} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{3n^2+n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{n^3+3n+4}{3n^2+n-3}} \le \sqrt[n]{\frac{n^3+3n^3+4n^3}{n^2}} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{8} \longrightarrow 1$$

---

2. feladat (4+10 =14 pont)
a) Ismertesse a l'Hospital-szabályt.
b) Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \dfrac{e^{2x^2} - \cos(3x)}{x^2+x}$ függvénynek?

Mo. *a*) Analízis 1 jegyzet, 4.4 fejezet.
b) A függvény folytonos függvények összetétele, így a nevező zérushelyeit ($x = 0$ és $x = -1$) leszámítva folytonos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4xe^{2x^2} + 3\sin(3x)}{2x+1} = 0$, így a függvénynek az $x = 0$ pontban megszüntethető szakadása van .
$\lim\limits_{x\to -1\pm} f(x) = \mp\infty$, így a függvénynek az $x = -1$ pontban másodfajú szakadása van .

---

3. feladat (10 pont)
Megfelelő helyettesítéssel számolja ki a $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 4}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Mo. Az $y = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel $x = y^3$ tehát az integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3y^2}{y^2+4y+4}\,\mathrm{d}y = \int 3 - \frac{12}{y+2} + \frac{12}{(y+2)^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= 3y - 12\ln|y+2| - \frac{12}{y+2} + c = 3\sqrt[3]{x} - 12\ln|\sqrt[3]{x}+2| - \frac{12}{\sqrt[3]{x}+2} + c$$

---

4. feladat (10 pont)
Írja föl azt a legalacsonyabb rendű homogén lineáris, állandó (valós) együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x) = 3\mathrm{e}^x \cos(2x) + 4x$ függvény! Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

Mo. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$ egyszeres , $\lambda_{3,4} = 0$ kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ami így: $\lambda^2((\lambda-1)^2+4) = \lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2$, vagyis a differenciálegyenlet $y^{(4)}-2y^{(3)}+5y'' = 0$, az általános megoldás pedig $y = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x) + c_3 x + c_4$.

---

5. feladat (4+7=11 pont)
a) Írja fel a sh függvény Taylor-sorát, és annak konvergenciasugarát.
b) Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+5}$ függvénysor összegfüggvényét $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

Mo. *a*) $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén .

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+5} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^4 \operatorname{sh}(2x).$$

---

6. feladat (7+14=21 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy kétváltozós függvénynek egy (x_0, y_0) pontban lokális maximuma, illetve minimuma van!
b) Keresse meg az $f(x,y) = xy(-2x+5y+1)$ függvény lokális szélsőértékeit!

Mo. *a*) Analízis 2. jegyzet, 3.105. Tétel
b) $f'_x(x,y) = y(-2x+5y+1) - 2xy = 0$ ($y = 0$ vagy $-4x+5y+1 = 0$) és $f'_y(x,y) = x(-2x+5y+1) + 5xy = 0$ ($x = 0$ vagy $-2x+10y+1 = 0$) . Az egyenletrendszer megoldásai tehát $(0,0)$, $\left(0,-\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{15}\right)$. $f''_{xx} = -4y$, $f''_{xy} = -4x+10y+1$, $f''_{yy} = 10x$. Az origóban a Hesse-determináns $0 \cdot 0 - (1)^2 = -1$, a $\left(0,-\frac{1}{5}\right)$ pontban $4/5 \cdot 0 - (-1)^2 = -1$ és a $\left(\frac{1}{2},0\right)$ pontban $0 \cdot 5 - (-1)^2 = -1$, így ezek közül egyik pontban sincs lokális szélsőérték. Az $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{15}\right)$ pontban $f''_{xx}f'_{yy} - (f''_{xy})^2 = 4/15 \cdot 10/6 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 > 0$, tehát $f''_{xx} > 0$ miatt ebben a pontban lokális minimuma van a függvénynek .

---

7. feladat (4+14=18 pont)
a) Mondja ki a Dirichlet-tételt!
b) Határozza meg a 2π szerint periodikus, $x \in (-\pi, +\pi]$ esetén az $f(x) = x - |x|$ képlettel definiált függvény Fourier-sorát, és annak összegét!

Mo. *a*) Analízis 2. jegyzet, 2.170. Tétel.

b) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x = -\pi$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{2(1-(-1)^k)}{k^2\pi}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(kx)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

a Fourier-sor és összege tehát

$$\Phi(x) = -\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2(1-(-1)^k)}{k^2\pi}\cos(kx) + \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)\right) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq (2k+1)\pi \\ -\pi, & \text{ha } x = (2k+1)\pi \end{cases}$$
