ANALÍZIS 2. | **I. PÓTZÁRTHELYI** | **2013. március 28.**
Mérnök informatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (13 pont)
Írja fel az

$$y' = \frac{e^x(y^2-4)}{(y-3)\sqrt{e^{2x}+1}}$$

differenciálegyenlet általános megoldását. (Elég az implicit alak megadása.)

Szétválasztható változójú DE, $y \equiv \pm 2$ (**1 pont**) megoldás.

$$\int \frac{y-3}{y^2-4}dy = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Itt

$$\frac{y-3}{y^2-4} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2} = \frac{(A+B)y+2A-2B}{y^2-4}, \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

így $2A - 2(1-A) = -3$, vagyis $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{5}{4}$ (**1 pont**). A jobboldali integrálhoz használjuk a $z = e^x$ helyettesítést ($\ln z = x$):

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx = \int \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \cdot \frac{1}{z}dz = \operatorname{arsh} z + c = \operatorname{arsh} e^x + c \qquad (\mathbf{4\ pont})$$

így a diffegyenlet általános megoldása:

$$-\frac{1}{4}\ln|y-2| + \frac{5}{4}\ln|y+2| = \operatorname{arcsh} e^x + c. \qquad (\mathbf{4\ pont})$$

---

2. feladat (14 pont)
Adja meg az

$$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \cos^3 x, \qquad y(0) = 2$$

kezdetiérték-probléma megoldását.

A homogén egyenlet megoldása $y \equiv 0$, és:

$$\ln|y| = \int \frac{1}{y}dy = -\int \operatorname{tg} x dx = \ln|\cos x| + c, \qquad (\mathbf{4\ pont})$$

így $y_h = c\cos x$, és $y_{ip} = c(x)\cos x$, (**1 pont**)

$$\cos^3 x = c'(x)\cos x - c(x)\sin x + c(x)\cos x \operatorname{tg} x = c'(x)\cos x \qquad (\textbf{3 pont})$$

így

$$c(x) = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}, \qquad (\textbf{2 pont})$$

$$y_{\text{á}} = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c\right)\cos x. \qquad (\textbf{2 pont})$$

$y(0) = 2$ akkor teljesül, ha $c = 2$, vagyis

$$y = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + 2\right)\cos x. \qquad (\textbf{2 pont})$$

---

3. feladat (10 pont)

$$y' = 8x + x^2 - y^2$$

a) Rajzolja fel a $P_1(1,3)$ illetve $P_2(-1,3)$ pontokhoz tartozó vonalelemeket.

b) Van-e lokális szélsőértéke a a P_1 illetve P_2 pontokon átmenő megoldásoknak a P_1 illetve P_2 pontokban, és ha igen, milyen típusú ?

Rajz (**3 pont**) A P_2 pontban $y' \neq 0$, így nem lehet szélsőérték. (**2 pont**) A P_1 pontban $y' = 0$ és $y'' = 8 + 2x - 2yy' = 10 > 0$, tehát a görbének lokális minimuma van P_2-ben (**5 pont**).

---

4. feladat (12 pont)
Megfelelő helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$y' = 2 - (4x - y)^2.$$

Használjuk az $u = 4x - y$ (**2 pont**)helyettesítést. Ekkor $y' = (4x - u)' = 4 - u'$, amiből a

$$u' = u^2 + 2 \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$x + c = \int 1dx = \int \frac{1}{u^2+2}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}du = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$$

(**4 pont**)

visszahelyettesítve

$$x + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4x-y}{\sqrt{2}}\right) \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

így

$$y = 4x - \sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\sqrt{2}(x+c)\right) \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

---

5. feladat (12 pont)

Mennyi a rendje annak a legacsonyabbrendű állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenletnek, melynek egy megoldása az

$$y = 3xe^{-4x}\sin(2x) - 4\operatorname{ch} x$$

függvény? Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$3xe^{-4x}\sin(2x) \Rightarrow \lambda_{1,2,3,4} = -4 \pm 2i$ (**3 pont**), $4\operatorname{ch} x = 2e^x + 2e^{-x} \Rightarrow \lambda_5 = 1, \lambda_6 = -1$,(**3 pont**) vagyis a diffegyenlet rendje 6 (**2 pont**), általános megoldása pedig

$$y_{á} = (c_1 + c_2 x)\sin x + (c_3 + c_4 x)\cos x + c_5 e^x + c_6 e^{-x}. \qquad (\mathbf{4\ pont})$$

---

6. feladat (17 pont)

Oldja meg az $y'' + 2y' + 2y = 5\sin x + 25xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot.

A homogén egyenlet megoldásához a $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ (**3 pont**), tehát

$$y_h = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Nincs külső rezonancia, így az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$\begin{array}{rcl|l} y_{ip} & = & A \sin x + B \cos x + (Cx + D)e^x & \cdot 2+ \\ y'_{ip} & = & A \cos x - B \sin x + (Cx + D + C)e^x & \cdot 2+ \\ y''_{ip} & = & -A \sin x - B \cos x + (Cx + D + 2C)e^x & \\ \hline \end{array} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$(A - 2B) \sin x + (2A + B) \cos x + (5Cx + 5D + 4C)e^x = 5 \sin x + 25xe^x$$

$A = 1$, $B = -2$, $C = 5$, $D = -4$ (**3 pont**).

$$y_{\text{á}} = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \sin x - 2 \cos x + (5x - 4)e^x \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$y(0) = c_1 - 2 - 4 = 1$, $y'(0) = -c_1 + c_2 + 1 + 1 = 0$, tehát $c_1 = 7$, $c_2 = 5$ (**3 pont**), így

$$y = e^{-x}(7 \cos x + 5 \sin x) + \sin x - 2 \cos x + (5x - 4)e^x. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

---

7. feladat (12 pont)
Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{n}}$$

sor?

Ha $a_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c,$$

akkor a $\sum a_n$ sor $c < 1$ esetén konvergens, $c > 1$ esetén divergens. (**4 pont**)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!(n+1)!(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(3n+3)!}}{\frac{(2n)!n!(2n)!}{n!n!(3n)!}}= \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!(n+1)!(2n+2)!n!n!(3n)!}{(n+1)!(n+1)!(3n+3)!(2n)!n!(2n)!}= \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=\frac{16}{27}<1 \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

tehát a sor konvergens.

---

8. feladat (10 pont)
Írja fel az

$$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)$$

lineáris rekurzió általános megoldását, az $f(0)=2$, $f(1)=-4$ kezdeti feltételeknek megfelelő megoldást, valamint az összes korlátos megoldást.

$q^n=q^{n-1}+2q^{n-2}$, így a $q^2-q-2=0$ (**2 pont**) egyenlet $q_1=2$, $q_2=-1$ (**1 pont**) megoldásai adják a rekurzió általános megoldását:

$$f(n)=c_1 2^n+c_2(-1)^n. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

A kezdeti feltételekhez: $f(0)=c_1+c_2=2$, $f(1)=2c_1-c_2=-4$, tehát $c_1=-\frac{2}{3}$, $c_2=\frac{8}{3}$ (**3 pont**). Korlátos a megoldás, ha $c_1=0$. (**2 pont**)

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)
Írja fel az

$$y^{(7)}-9y^{(5)}=0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

$0=\lambda^7-9\lambda^5=\lambda^5(\lambda^2-9)$, $\lambda_{1,2,3,4,5}=0$, $\lambda_6=3$, $\lambda_7=-3$

$$y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4+c_6e^{3x}+c_7e^{-3x}.$$

10. feladat (10 pont)
Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{n+n^2}{2n+n^2}\right)^{n^2}$$

numerikus sor?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \left(\frac{n+n^2}{2n+n^2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{2}{n}+1}\right)^n = \frac{e}{e^2} < 1,$$

tehát a sor konvergens.