**ANALÍZIS(2)**
Mérnök Informatikus szak

**VIZSGADOLGOZAT**

**2012. jan. 2.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

## 1. feladat (14 pont)

a) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! (Elég az implicit alak.)

$$y' = \frac{(y^2+4)\ x}{(y^2+5)\ e^{2x^2}}$$

b) $$a_4\, y^{(4)} + a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását, ha $5x + 2e^{-2x}\sin 3x$ megoldja a differenciálegyenletet!

a.) $\boxed{9}$

$$\underbrace{\int \frac{y^2+5}{y^2+4}\,dy}_{} = \underbrace{\int \frac{x}{e^{2x^2}}\,dx}_{} \quad 2$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{y^2+4}\right) dy = \qquad -\frac{1}{4}\int -4x\, e^{-2x^2}\,dx$$

$$f'e^f$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\right) dy$$

$$y + \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\,e^{-2x^2} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

4 2 1

b.) $\boxed{5}$

$$\underbrace{5x}_{} + 2\underbrace{e^{-2x}\sin 3x}_{}$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_{3,4} = -2 \pm j3$$

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}\cos 3x + C_4 e^{-2x}\sin 3x \qquad C_i \in \mathbb{R}$$

## 2. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorfejtését és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = \sin(4x^3)\,, \qquad g(x) = \frac{1}{8+2x^2}$$

$$f(x) = \sin 4x^3 = \left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} \mp \dots\right)\Big|_{u=4x^3} =$$

$$= 4x^3 - \frac{4^3}{3!}x^9 + \frac{4^5}{5!}x^{15} \mp \dots \qquad K.T.: (-\infty, \infty)$$

3 1

an2v 120102/1

$$g(x)=\frac{1}{8+2x^2}=\frac{1}{8}\,\frac{1}{1-\frac{-x^2}{4}}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8\cdot 4^n}\,x^{2n}$$ (4)

$$|q|=\left|\frac{-x^2}{4}\right|=\frac{|x|^2}{4}<1 \Rightarrow |x|<2$$

K.T. : $(-2,2)$ (2)

**3. feladat (14 pont)**

a) A tanult módszerrel mutassa meg, hogy

$$f(x)=\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\pm\cdots$$

Mi a Taylor sor konvergenciasugara?

b) Az előző sor felhasználásával adja meg a

$$g(x)=\operatorname{arctg} 5x^2$$

függvény $x_0=0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a) $\boxed{9}$ $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$

$|-x^2|=|x|^2<1 \Rightarrow R=1$

$$\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+\ldots)\,dt$$

$[0,x]\subset(-R,R)$

$$\operatorname{arctg}x = t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\ldots\Big|_0^x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

$R=1$ (változatlan)

(A végpontokban is konvergens.)

b) $\boxed{5}$ $g(x)=\operatorname{arctg}5x^2=u-\frac{u^3}{3}+\ldots\Big|_{u=5x^2}=$

$$=5x^2-\frac{5^3}{3}x^6+\frac{5^5}{5}x^{10}-\frac{5^7}{7}x^{14}+\ldots$$ (3)

$$|5x^2|=5|x|^2<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt5}$$

an2v120102/2.

**4. feladat (20 pont)**

a) Írja le az iránymenti derivált definícióját és a kiszámítására tanult tételt!

b) Mi jellemzi a gradiensvektor nagyságát illetve irányát?
Állítását indokolja meg!

c) $f(x,y,z) = z + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\qquad P(-1,1,0)$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_P = ?$, ha $\quad \underline{e} \parallel (2,-1,1)$

a.) $\boxed{5}$ (D) $\underline{a} \in \operatorname{int} D_f \subset \mathbb{R}^n$ ; $|\underline{e}| = 1$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \lim_{t \to +0} \frac{f(\underline{a}+t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} \qquad 3$$

(T) Ha $f$ totálisan deriválható $K_{\underline{a}}$-ban, akkor $\underline{a}$-ban minden irányban $\exists$ az iránymenti derivált és

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} \qquad (|\underline{e}| = 1) \qquad 2$$

b.) $\boxed{7}$ (T) Ha $\exists \operatorname{grad} f$ $K_{\underline{a}}$-ban, akkor a maximális iránymenti derivált iránya: $\operatorname{grad} f(\underline{a})$, értéke $|\operatorname{grad} f(\underline{a})|$. $\quad$ 2

(B) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \underbrace{|\underline{e}|}_{=1} \cos\varphi =$

$= |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cos(\operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e})_\measuredangle$

$\Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ maximális, ha $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$, tehát

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{|\operatorname{grad} f(\underline{a})|} \quad \text{és} \quad \max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|$$

c.) $\boxed{8}$ $f'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \dfrac{-y}{x^2}$ (2) ; $f'_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \dfrac{1}{x}$ (1) ; $f'_z = 1$ (1)

$|\underline{v}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ : $\underline{e} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}\underline{i} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\underline{k}$ (1)

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \operatorname{grad} f(P) \cdot \underline{e} = \left(-\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j} + \underline{k}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{k}\right) =$

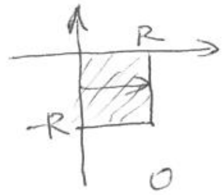
$= -\dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{2\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ $\quad$ 3

an2v120102/3.

**5. feladat (8 pont)***

$$\iint_T e^{2y-3x}\, dT = ? \qquad T: \ x \ge 0 , \quad y \le 0$$

$$\iint_T e^{2y} e^{-3x}\, dT = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0}\int_{0}^{R} e^{2y} e^{-3x}\, dx\, dy =$$




$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} e^{2y} \left.\frac{e^{-3x}}{-3}\right|_{x=0}^{R} dy = \lim_{R\to\infty} \frac{-1}{3}\left(e^{-3R}-1\right) \underbrace{\int_{-R}^{0} e^{2y}\, dy}_{\left.\frac{e^{2y}}{2}\right|_{-R}^{0}} =$$

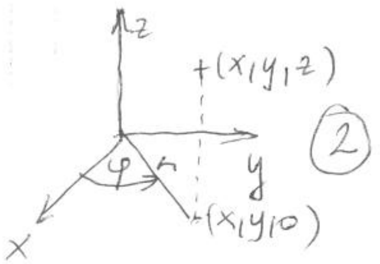
$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{3}\left(\underset{\downarrow\, 0}{e^{-3R}}-1\right)\frac{1}{2}\left(1-\underset{\downarrow\, 0}{e^{-2R}}\right) = \frac{1}{6}$$

**6. feladat (9 pont)***

Egy ábra segítségével mutassa meg a hengerkoordináták jelentését és írja le a Descartes koordináták és a hengerkoordináták kapcsolatát!

Hengerkoordináták segítségével írja le az alábbi térrészt!

$$x^2 + y^2 \le 1 , \qquad x \le 0 , \qquad z \le 6 - x^2 - y^2 , \qquad z \ge 0$$

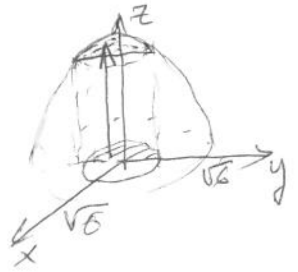



2

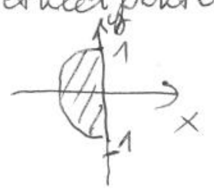
Hengerkoordináták: $r, \varphi, z$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

3




Vetületpontok:




$0 \le z \le 6 - r^2$ 2

$0 \le r \le 1$ 1

$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ 1

**7. feladat (14 pont)***

Határozza meg a $\beta > 0$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$u = e^{2x}\cos(\beta y) + x^3 - 3xy^2 + 2y = \operatorname{Re} f$$

legyen, ahol $f$ reguláris a komplex síkon! $\operatorname{Im} f = ?$

an20120102/4.

$\Delta u \equiv 0$-nak kell teljesülnie:

$$u'_x = 2e^{2x}\cos\beta y + 3x^2 - 3y^2 \qquad u''_{xx} = 4e^{2x}\cos\beta y + 6x$$

$$u'_y = -\beta e^{2x}\sin\beta y - 6xy + 2 \qquad u''_{yy} = -\beta^2 e^{2x}\cos\beta y - 6x$$

$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = (4-\beta^2)e^{2x}\cos\beta y \equiv 0$ és $\beta > 0 \Rightarrow \beta = 2$ (6)

C-R.: $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$ (2)

$\Rightarrow v'_y = 2e^{2x}\cos 2y + 3x^2 - 3y^2$ (1)

$v'_x = 2e^{2x}\sin 2y + 6xy - 2$ (2)

(1)-ből: $v(x,y) = e^{2x}\sin 2y + 3x^2y - y^3 + C(x)$

(2) miatt: $2e^{2x}\sin 2y + 6xy + C'(x) = 2e^{2x}\sin 2y + 6xy - 2$

$\Rightarrow C'(x) = -2 \Rightarrow C(x) = -2x + K$

$\Rightarrow v(x,y) = e^{2x}\sin 2y + 3x^2y - y^3 - 2x + K = \operatorname{Im} f$ (6)

**8. feladat (11 pont)***

a) $\int_L z\,\bar{z}\;dz = ?$, ahol $L$ az $y = x^2$ parabola $x \in [0, 1]$ darabja az origóból irányítva.

b) $\oint_{|z+j|=2} \dfrac{e^{jz}}{(z-8)^5}\,dz = ?$

a.) $f(z) = z\cdot\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$\boxed{7}$

$z(t) = t + jt^2 \qquad t \in [0,1]$

$z'(t) = 1 + j2t$

$f(z(t)) = t^2 + t^4$

$$I_a = \int_0^1 f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2+t^4)(1+j2t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t^2+t^4+j(2t^3+2t^5)\right)dt = \frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+j\left(2\frac{t^4}{4}+2\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 =$$

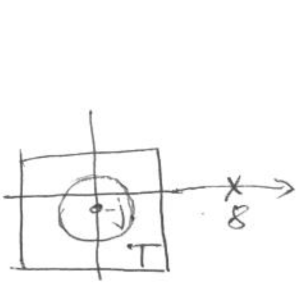
$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+j\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

b.) $\boxed{4}$

$$\oint_{|z-(-j)|=2} \frac{e^{jz}}{(z-8)^5}\,dz = 0$$

reg T-n

(Cauchy-féle alaptétel)



**Pótfeladatok.** Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

**9. feladat (11 pont)**

Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

$a)$ $f(x) = e^{-4x}$ , $x_0 = 2$ $\qquad$ $b)$ $g(x) = x^3\, e^{3x^2}$ , $x_0 = 0$

a.) $f(x) = e^{-4(x-2)-8} = e^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \Big|_{u=-4(x-2)} = e^{-8} \sum_{n=0} \frac{(-4)^n}{n!} (x-2)^n$ 5

K. T.: $(-\infty, \infty)$ 1

b.) $g(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \Big|_{u=3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{2n+3}$ 4

K. T.: $(-\infty, \infty)$ 1

**10. feladat (9 pont)**

$$f(x,y) = \frac{\cos(2x)}{(y-2)^4}$$

a) $f'_x(x,y) = ?$ ; $f'_y(x,y) = ?$

b) Írja fel a $(\pi/2\,,\,1)$ pontbeli érintősík egyenletét!

a.) $f_x' = \frac{-2\sin(2x)}{(y-2)^4}$ $\qquad$ $f_y' = \cos(2x) \frac{-4}{(y-2)^5}$

$\boxed{4}$

b) $\underbrace{f_x'(\tfrac{\pi}{2},1)}_{=0}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) + \underbrace{f_y'(\tfrac{\pi}{2},1)}_{-4}(y-1) - \left(z - \underbrace{f(\tfrac{\pi}{2},1)}_{-1}\right) = 0$ : az érintő-sík

$\boxed{5}$

$-4(y-1) - (z+1) = 0$

an20120102/6.