2. zárthelyi megoldásokkal

1999 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

(Minden választ indokolni kell)

1. Legyenek $L_1, L_2 \subseteq L$ lineáris terek. Állapítsa meg, hogy L alábbi részhalmazai közül melyik altere L-nek ($X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$).

a) $(L \setminus L_1) \cup \{0\}$ b) $L_1 \cap L_2$

MO. a) Nem, pl. $L = \mathbf{R}^2$, $L_1 = \mathbf{R} \times \{0\}$ (valós tengely) esetén $(1,1),\ (1,-1) \in (L \sim L_1) \cup \{0\}$,

de $(2,0) = (1,1) + (1,-1) \notin (L \sim L_1) \cup \{0\}$. b) Igen:
$c, d \in \mathbf{R}, x, y \in L_1 \cap L_2 \ \rightsquigarrow\ x, y \in L_1, L_2 \ \rightsquigarrow\ cx + dy \in L_1, L_2 \ \rightsquigarrow\ cx + dy \in L_1 \cap L_2$.

2. Melyek igazak, melyek nem?

a. Lineárisan függetlenségen egy elem elhagyása nem változtat

b. Lineárisan függőségen egy elem elhagyása nem változtat

c. Lineárisan függetlenségen egy elem hozzávétele nem változtat

d. Lineárisan függőségen egy elem hozzávétele nem változtat

MO. a) Igaz: $\sum_{i \neq j} c_i x_i = 0 \ \rightsquigarrow\ \sum_i c_i x_i = 0$ ha $c_j = 0 \ \rightsquigarrow\ c_i = 0$ minden $i \neq j$. b) Nem igaz: $x \neq 0$-val $\{x, 2x\}$ lin függő, de $\{x\}$ nem. c) Nem igaz, lásd b)-beli pl. d) Igaz a) miatt.

3. Mely **a** és **b** valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla b) egy c) végtelen sok megoldása?

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ -x - 2y + \mathbf{a}z &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

MO. Gauss-elimináció után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}-2 & \mathbf{b}-1 \end{pmatrix}$$

tehát a) 0 mo.: $\mathbf{a} = 2, \mathbf{b} \neq 1$ b)1 mo.: $\mathbf{a} \neq 2$ c) ∞ mo.: $\mathbf{a} = 2, \mathbf{b} = 1$.

4. Határozza meg az alábbi mátrix inverzét és igazolja is, hogy ez jobb- és baloldali inverz is! !

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

MO.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Hol deriválható az $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ függvény?

MO. Az $y = x$ egyenesen kívül mindenütt, mert a $g(x,y)$ nyilván deriválható mindenütt, hisz ilyenekbol van deriválhatóságot megőrző módon összerakva és a $\sqrt[3]{x}$ is deriválható az origón kïvül mindenütt. Az origóban a parciálisok léteznek, a derivált nem. Valóban, $f(x,0) = \sqrt[3]{x^3} = x$ így

$f_x(0,0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 1$, és ugyanígy a másik: $f_y(0,0) = -1$. Másrészt azonban

$\dfrac{f(x,y) - f(0,0) - (1,-1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - y^3} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és ennek a függvénynek nincs határértéke az origóban, hisz a tengelyek mentén konstans 0 az értéke míg pl. a $x = -y$ mentén konstans $\neq 0$. Végül az origón kívül az $x = y$ egyenes mentén még a parciálisak sem léteznek, hiszen pl. az $f(x,a) = \sqrt[3]{x^3 - a^3}$ függvény nem deriválható az $x = a \neq 0$ pontban mert $f'(x) = \dfrac{x^2}{(x^3 - a^3)^{2/3}} \longrightarrow \infty$ ha $x \longrightarrow a$ és a Darboux-tétel miatt a deriváltnak nem lehet ilyen szakadása.

6. Határozza meg az $f(x,y) = 2x^2 - 3xy$ függvény $P = (1,3)$ pontbeli $v = (-1, 2)$ irányú irányú iránymenti deriváltját!

MO. grad $f = (4x - 3y, -3x)$, így grad $f|_P = (-5, -3) \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-5, -3) \cdot (-1, 2) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ hisz $|v| = \sqrt{5}$.