1. előadás

2010. X. 27.

Székely Balázs   szbalazs@math.bme.hu

SZTOCHASZTIKA

H. V. em 510.

Fogadóóra: kedd: $16^{15} - 17^{00}$

Oktatási anyag: www.math.bme.hu/~szbalazs/vill

ZH: dec. 3. 14–16

Ismétlés

(1.) Események és valószínűségek

Van valamilyen kísérlet (pénzfeldobás pl.)

A kísérlethez konstruálunk megfelelő valószínűségi mezőt:

- Ω: ez a kimenetelek halmaza (lehetséges kimenetek)
- Vannak események: ezek Ω tetszőleges részhalmazai
- valószínűségi mérték: P

A mérték az eseményeket méri.

Példa

1) Kísérlet: feldobunk egy szabályos dobókockát, megnézzük, hogy mi lesz a felső lapon az érték.

~~lehetséges~~ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

példaesemény: $A = \{\text{az eredmény páros}\} =$

$= \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$P(A) = \frac{3}{6}$ /lásd később

$P(B) = \frac{4}{6}$

2. Kísérlet:

2 session beérkezése között eltelő időt nézzük.

↓

$\Omega = (0, \infty)$

esemény: $A = \{$kevesebb, mint 10 időegység a várakozás$\}$

$P(A) = 1 - e^{-2}$ /lásd később

3. kísérlet: 10 kockát dobunk fel (és a 6-osok számát nézzük)

$\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_{10}) \mid \text{ahol } i_1, i_2, \dots, i_{10} \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$

↑ rendezett 10-es

$A = \{$pontosan 3 db 6-os van$\}$

$B = \{$legfeljebb 3 db 6-os van$\}$

képen megfogalmazva

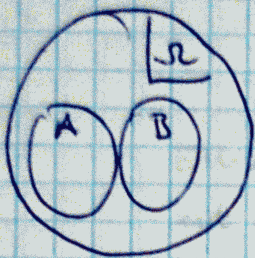
$A = \{(i_1, i_2, \dots, i_{10}) \mid i_1, \dots, i_{10} \in \{1, 2, \dots, 6\},$ van 3 db index, hogy $i_{index} = 6\}$

$P(A) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$ /lásd később

Valószínűségi mérték

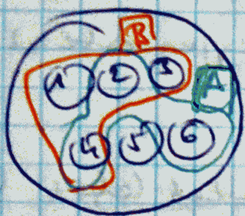
Pont úgy viselkedik, mint a többi mérték (pl. terület, térfogat).

A és B diszjunktak: kizáró események



$$(1)\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ha nem diszjunktak (korábbi 1. példa)



$$(2)\quad \cancel{P(A\cup B)}\; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

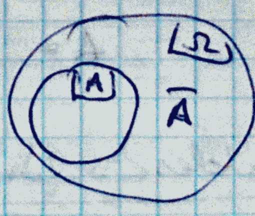
Tapasztalat: $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$ valószínű a dobókockánál.

$i = 1, 2, \dots, 10.$

(1)-ből következik, hogy $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) =$
$= 3 \cdot \frac{1}{6}$

(3) Esemény tagadásának valószínűsége:
$\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



(6). $P(\Omega) = 1$ A biztos esemény valószínűsége 1.

$P(\emptyset) = \emptyset$ Az üres halmaz valószínűsége $\emptyset$.

A (3)-nál (0)-t felhasználva:

$$\bar{A} = \Omega \setminus A$$

2. Valószínűségi változó

Egy függvény az eseménytéren

Valószínűségi változó: $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Z}$ értékű függvény az Ω-n.

Ilyenkor Ω nagyon bonyolult.

Azt szeretnénk, hogy az egyes értékek valószínűsége mennyi.

A korábbi 3 kísérletnél valószínűségi változókat lehet bevezetni.

1. kísérlet:

X = felső lapon lévő érték.

$A = X$ páros

(úgy gondolhatunk rá, mint egy egyenletben egy ismeretlen)

2. kísérlet:

Y = az eltelő idő

$A = Y < 10$

Könnyebb kezelhetőség miatt vezetjük be őket.

3. kísérlet:

Z = 6-osok száma

$A = (Z = 3)$

3. Feltételes valószínűség

A kísérletnél tudunk valamilyen információt, s ennek ismeretében szeretnénk valami mást megtudni.

Legyen $A = \{4, 5, 6\}$ ← kockadobásról van szó

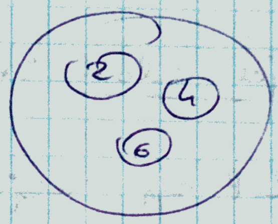
és $P(A) = \frac{1}{2}$

Megtudjuk, hogy a dobás páros.

↳ ezzel az eseménytér leszűkül $\{2,4,6\}$-ra.

legyen $B = \{2,4,6\}$

Ekkor annak a valószínűsége (hogy ezt már tudjuk):



A feltételes valószínűsége

B-re nézve $\frac{2}{3}$. ← többet tudtunk meg az eseményünkről.

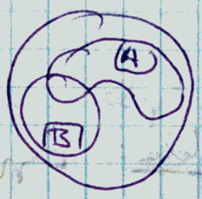
$\neq \frac{1}{2}$

Formálisan:

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

A valószínűségét nézzük úgy, hogy B valószínűségét tudjuk

teljes eseménytérré lesz.



Ehhez kell, hogy $P(B) > 0$.

Függetlenség

Az A és a B események függetlenek egymástól, ha

$$P(A|B) = P(A)$$

A definíciót felhasználva:

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$$

$P(A \cap B) = ?$ hogy lehet kiszámolni $P(A) \cdot P(B)$-ből

Ezt nem tudni.

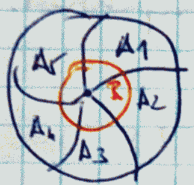
A kizáró események nem függetlenek → függetlenek akkor, ha megtudjuk, hogy az egyik bekövetkezett, akkor a másikra nem tudunk meg semmit.

<u>Teljes valószínűség tétele</u>

Adott egy teljes eseményrendszer: $A_1, A_2, \dots$

(uniójuk a teljes tér)

↓ $\bigcup A_i = \Omega$



ismert $P(A_i)$

és ismert $P(B|A_i)$ is. $\forall i$-re.

Ekkor $P(B) = \sum \underbrace{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}_{P(B \cap A_i)}$

együttes bekövetkezés valószínűsége

<u>példa</u>: Egy bináris csatornán a 0 jelet $\frac{1}{3}$ valószínűséggel adják, az 1-et $\frac{2}{3}$ valószínűséggel. Zavarás miatt ha 0-t adnak, akkor 1 érkezik $\frac{1}{5}$ valószínűséggel. Ha 1-et adnak, akkor 0 érkezik $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. Mi a valószínűsége annak, hogy 0 érkezik?

Események: A_0 = 0-t adnak

A_1 = 1-et adnak

E_0 = 0 érkezik

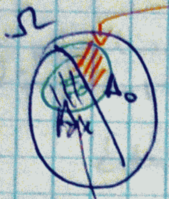
E_1 = 1 érkezik.

$P(E_0) = ?$

Ismert: $P(A_0) = \frac{1}{3} \rightarrow P(A_1) = \frac{2}{3}$

Ismert: $P(E_1|A_0) = \frac{1}{5}$ ~~va~~

$$P(E_0 \mid A_1) = \frac{1}{6}$$



$$P(E_0) = P(E_0 \mid A_0) \cdot P(A_0) + P(E_0 \mid A_1)\, P(A_1)$$

A_1 és A_0
teljes eseményrendszer

$$P(E_0 \mid A_0) = 1 - P(E_1 \mid A_0) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

így $P(E_0) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}$

4. Valószínűségi változók eloszlása

Ha adott egy halmaz a valváltozó kimenetei közül, mi a valószínűsége, hogy abba esik?

↓

Egy X valószínűségi változó legfontosabb jellemzője: adott $A \subset \mathbb{R}$ esetén a $P(X \in A)$ valószínűséget $\forall A$ esetén meg kell tudnunk mondani.

Vannak folytonos és diszkrét értékű valószínűségi változók.

~~Diszkrét eset~~

Két megadás van: súlyfüggvény ill. eloszlásfüggvény.

1, súlyfüggvényes megadás

a, Diszkrét esetben: az értékeit fel lehet sorolni

pl: $x_1, x_2, \ldots$

Az eloszlás áll az értékek felsorolásából ill. az értékek valószínűségéből.

X eloszlása = { értékei $\{x_1, x_2 \ldots$; értékek valószínűsége $\{P(X=x_1), P(X=x_2) \ldots\}$

b, Folytonos eset: Attól folytonos, hogy az értékek egy intervallum:

Az értékek halmaza $\mathbb{R}$ részhalmaza, tipikusan egy intervallum.

Az eloszlás : $\begin{cases} \text{értékek} \\ \text{sűrűségfüggvény} : f(x) \quad \geq 0 \text{ értékű} \end{cases}$

Ezekkel ~~megadhatjuk~~ leírható a teljes eloszlás.

pl: $P(X \in A) \underset{\text{diszkrét esetben}}{=} \sum_{x_i \in A} P(X = x_i)$

folytonos esetben: $\int_A f(x)\,dx$

példák

1, 10db kockát feldobunk, mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 3db 6-os lesz közöttük?

X = 6-osok száma.

$P(X \leq 3) = ?$

Általában:

n-szer végezzük el ugyanazt a kísérletet egymástól függetlenül.

$\downarrow$

n db függ. kísérlet ugyanarra az eseményre

A siker valószínűsége ~~p~~ p.

Ha X = sikeresek száma, akkor X eloszlása binomiális n és p paraméterekkel.

Binom (n, p)

$X \sim$ Binom (n, p)

Összesen n ötöses kísérlet lehet.

X eloszlása.

értékei: $0, 1, 2, \dots, n$

Valószínűségek:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$0 \le k \le n$$

A konkrét példában:

kísérletek száma: $n=10$

a siker valószínűsége: $p = \frac{1}{6}$

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$

0, 1, 2, 3 sikeres

$$= \sum_{i=0}^{3} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-i}$$

példa: A korábbi 2. kísérletre

legyen X a várakozási idő hossza.

X exponenciális eloszlású

$$X \sim \exp(\lambda)$$

Tfh. a példában tudjuk, hogy $\lambda = 5$.

átlagosan $\frac{1}{5}$ időegységenként jönnek a vonatok.

Általános esetben a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \text{ ha } x \ge 0$$

és $f(x) = 0$, ha $x < 0$.

A kérdés az volt, hogy mi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 10 időegységnyit kell várakozni?

$$\downarrow$$

$$P(X<10)=?$$

vagyis $$P(X\in[0,10]) = \int_0^{10} 5e^{-5x}\,dx =$$

$$= 1 - e^{-10\cdot 5} = 1-e^{-50}$$

$\lambda = \frac{1}{5}$ esetén:

$$\int_0^{10} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = 1-e^{-2}$$

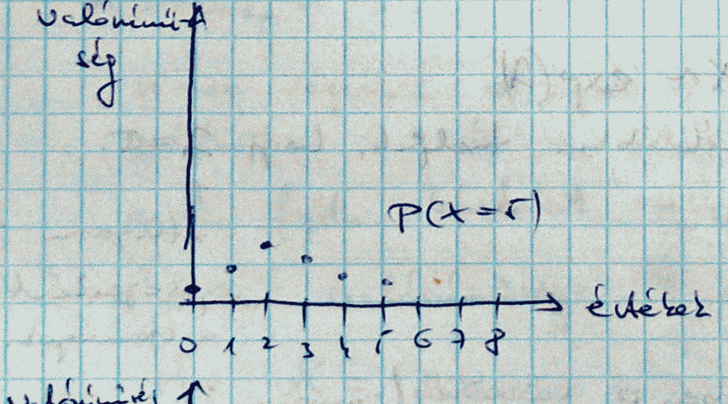
<u>Eloszlásfüggvény</u>

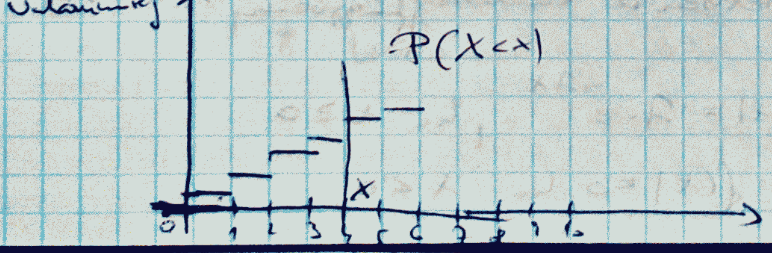
Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F:\mathbb{R}\to[0,1]$$

$$F: x\mapsto P(X<x)$$

Binomiális esetben:





Az ugrás akkora, mint a valószínűség nagysága.