NUMERIKUS SOROK, FÜGGVÉNYSOROZATOK, FÜGGVÉNYSOROK

A. NUMERIKUS SOROK

Pozitív tagu sorok konvergencia-vizsgálata

101. **Részletösszeg-sorozat határértékének vizsgálatával**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

102. **Majoráns-minoráns kritérium alkalmazásával**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^3}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot e^{-n^2}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\cos n}$ f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

103. **Hányados kritérium alkalmazásával**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

104. Gyökkritérium alkalmazásával

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{2n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^{n^2}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

105. Integrálkritérium alkalmazásával

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^2 n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh } 2n}{1+\text{sh}^2 n}$.

106. Tetszőleges módszerek alkalmazásával

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n}{2-2n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+5)}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2})$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin\sqrt{n}}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$.

107. Állapítsa meg, hogy az alábbi váltakozó előjelű sorok közül melyik konvergens, melyik speciálisan Leibniz tipusú és melyik divergens !

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\cdot \ln n}$. h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{ch } n}{n^3}$

i) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} \pm \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \pm \ldots$

j) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5} \pm \ldots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{n+1} \pm \ldots$

108. Vizsgálja meg, hogy feltételesen, vagy abszolút konvergensek-e az alábbi sorok !

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\frac{\pi}{2})$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$.

Sorösszeg meghatározása

109. Határozza meg az alábbi sorok összegét !

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{8^n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n+1}+3^{n+2}}{3^{2n}}$.

110. Legfeljebb mekkora hibát követ el, ha az alábbi sorok közül a konvergensek összegét 4. részletösszegükkel becsüli?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)^{3/2}}$

B. FÜGGVÉNYSOROZATOK

111. Határozza meg az alábbi függvénysorozatok értelmezési- és konvergencia- tartományát, valamint határfüggvényét !

a) $f_n(x)=\frac{1}{x^n}$ b) $f_n(x)=\sin^n x$

c) $f_n(x)=\frac{x^n}{5^n}$ d) $f_n(x)=e^{nx}$

e) $f_n(x)=x\cdot e^{-nx}$ f) $f_n(x)=1+\frac{x}{n}$.

112. Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorozatok az adott I intervallumokon ?

a) $f_n(x)=x^n$ $I=[0,1)$, $I=[0,1]$

b) $f_n(x)=x^n$ $I=[0,a]$, $a\in\mathbb{R}$, $0<a<1$

c) $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$ $I=[-1,1]$

d) $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$ $I=[a,b]$ $a,b\in\mathbb{R}$

e) $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$ $I=(-\infty,\infty)$

f) $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$ $I=(0,\infty)$

g) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ $I=(-\infty,\infty)$

h) $f_n(x)=\frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ $I=(-\infty,\infty)$.

C. FÜGGVÉNYSOROK

113 Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergencia-tartományát!

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{e^{nx}}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

114. Hol feltételesek és hol abszolút konvergensek az alábbi függvénysorok ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^{nx}}{\sqrt{n}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2 + x^2}$

115. Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorok az adott I intervallumokon ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$ $I = (0,\infty)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$ $I = [a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ $I = (-\infty,\infty)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ $I = [0,1]$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2 + n}$ $I = (-\infty,\infty)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2x^2}$ $I = (-\infty,\infty)$.

116. Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét !

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{nx}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$

Hatványsorok

117. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát !

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5} \cdot x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{n!} \cdot x^n$

118. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét !

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Taylor sorok

119. Irja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és határozza meg a sor konvergenciatartományát !

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

c) $f(x) = e^{2x}$ d) $f(x) = e^{-x^2}$

e) $f(x) = \sin^2 x$ f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

g) $f(x) = \mathrm{arctg}x$ h) $f(x) = \ln(1 + x)$

120. Irja fel az alábbi függvények $x_0 = 1$ körüli Taylor sorát és a sor konvergenciatartományát !

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = e^x$ f) $f(x) = \sin x$

121. Határozza meg az alábbi integrálok közelítő értékét az integrálandó függvény Taylor sora első három tagjának felhasználásával !

a) $\int_0^1 (\cos x^2)dx$ b) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

c) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx$ d) $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} dx$

e) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

Fourier-sorok

122. Határozza meg az alábbi függvények Fourier-sorát !

a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \cos^2 x$

123. Állítsa elő Fourier-sorral a $(-\pi,\pi)$ intervallumon az alábbi függvényeket !

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = \mathrm{sign}\, x$

c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = |x|$

e) $f(x) = |\sin x|$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

124. Állítsa elő tiszta cosinusos Fourier-sorral

az $f(x) = \sin x$ függvényt a $(0,\pi)$ intervallumon !

125. Állítsa elő tiszta sinusos Fourier-sorral

az $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ függvényt a $(0,\pi)$ intervallumon !

LINEÁRIS ALGEBRA

A. MÁTRIX-ALGEBRA

201. Határozza meg az

$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$, $2\underline{\underline{B}}$, $2\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$

mátrixokat, ha

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

202. Határozza meg az $\underline{\underline{AB}}$ és a $\underline{\underline{BA}}$ mátrixokat, ha léteznek

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

f) $\underline{\underline{A}} = [\ 1 \ \ 2 \ \ 3\ ]$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

203. Határozza meg az

$$\underline{\underline{A}}^2,\ \underline{\underline{B}}^3,\ \underline{\underline{C}}^2$$

mátrixokat, ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

204. Igazolja, hogy

$$\underline{\underline{B}}^n = a^{n-1}\underline{\underline{B}}\ , \quad n=1,2,\dots$$

ha $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

205. Határozza meg - ha létezik - az alábbi mátrixok inverzét

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

206. Határozza meg az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot az alábbi egyenletekből:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\underline{\underline{X}} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

207. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

B. DETERMINÁNSOK

208. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

209. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2+x & 3 & 3 \\ 3 & 2+x & 3 \\ 3 & 3 & 2+x \end{vmatrix} = 0$

C. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

210. **Oldja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket.**

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 -3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 3z &= 0 \\ 4x - 4y - z &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 0 \\ x + 2y + 6z &= 0 \\ 3x + 4z &= 0 \\ - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

211. **Vizsgálja meg az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszereket megoldhatóság szempontjából. Amelyik megoldható, annak adja meg a megoldását.**

a)
$$\begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 3x - 2y + z &= 3 \\ x - 3y + 5z &= -6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ -2x + y + z &= 3 \\ x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x - y + 4z &= -1 \\ x + y - 2z &= 3 \\ 2x + z &= 1 \\ x + y &= -4 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

212. **Határozza meg** a t paraméter értékét úgy, hogy az

$$\begin{aligned} x - 4y + z &= 2 \\ -3x + 7y + 2z &= -3 \\ x - 3y + tz &= 0 \end{aligned}$$

egyenletű síkoknak legyen közös pontja.

213. **A paraméter** (paraméterek) értékétől függően vizsgálja és oldja **meg** az alábbi egyenletrendszereket:

a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + y + az &= -1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y - z + 4u &= 2 \\ 2x - y + z + u &= 1 \\ x + 7y - 4z + 11u &= a \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 6x_4 &= 9 \\ -4x_1 + 9x_2 + 10x_3 + ax_4 &= 11 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 5x + 5y + az &= b \end{aligned}$$

D. LINEÁRIS TÉR, LINEÁRIS ALTÉR.

28

214. **Lineáris** teret alkotnak - e a valós **számtest** felett az alábbi halmazok?

a) A rendezett valós számhármasok halmaza: $\mathbb{R}^3$.

A **műveletek** értelmezése:

összeadás: $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$

számmal szorzás: $\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$.

b) A térvektorok halmaza.

A műveletek értelmezése:

összeadás: vektorok összeadása

számmal szorzás: vektor számszorosa.

c) Az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények halmaza.

A műveletek értelmezése:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.

d) A legfeljebb harmadfokú polinomok halmaza: P_3.

A műveletek értelmezése:

$$\sum_{i=0}^{3} a_i x^i + \sum_{i=0}^{3} b_i x^i = \sum_{i=0}^{3} (a_i+b_i)x^i , \quad \lambda \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = \sum_{i=0}^{3} \lambda a_i x^i .$$

e) A pontosan harmadfokú polinomok halmaza.

A műveletek értelmezése ugyanaz, mint a d.-ben.

f) Az 4-edrendű valós elemű mátrixok halmaza: M_{44}.

A műveletek értelmezése:

$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = [a_{ik}+b_{ik}]$, $\lambda \underline{\underline{A}} = [\lambda a_{ik}]$.

g) A pozitív valós számok halmaza.

A műveletek értelmezése:

két pozitív szám p és q összege: $p \cdot q$

p pozitív szám λ-szorosa: p^{λ} .

h) A rendezett valós számhármasok halmaza.

A műveletek értelmezése:

összeadás: $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

számmal szorzás: $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,y,z)$.

215. Vizsgálja meg, hogy az adott lineáris tér részhalmazai alterek-e:

a) $V \subset \mathbb{R}^2$={ rendezett valós számpárok lineáris tere }

a1) $V = \{ (x_1,x_2) : x_1$ és x_2 egész $\}$

a2) $V = \{ (x_1,x_2) : x_1+3x_2 = 0 \}$

a3) $V = \{ (x_1,x_2) : x_1-x_2 = 2 \}$

b) $V \subset L$={ négydimenziós oszlopvektorok lineáris tere }

b1) $V = \{ \underline{x} : x_1=x_3=0,\ x_2,\ x_4 \in \mathbb{R} \}$

b2) $V = \{ \underline{x} : x_2=2,\ x_1,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \}$

b3) $V = \{ \underline{x} : x_1+x_2=0,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \}$

c) $V \subset P_3$ = { legfeljebb harmadfokú polinomok lineáris tere }

c1) $V = \{ p(x) : a_0+a_1+a_2=0,\ a_3 \in \mathbb{R} \}$

c2) $V = \{ p(x) : a_2=0,\ a_1+a_4=0,\ a_0 \in \mathbb{R} \}$

c3) $V = \{ p(x) : p(1)=0,\ p(2)=0 \}$

c4) $V = \{ p(x) : a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R} ,\ a_3 \neq 0 \}$

d) $V \subset M_{22}$ = { másodrendű valós elemű mátrixok lineáris tere }

d1) $V = \{ \underline{\underline{A}} : a_{12}=a_{21} ,\ a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R} \}$

d2) $V = \{ \underline{\underline{A}} : \det(\underline{\underline{A}})=0 \}$

d3) $V = \{ \underline{\underline{A}} : a_{11}=a_{22} ,\ a_{12}+a_{21}=0 \}$

e) V részhalmaza az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények lineáris terének.

e1) $V = \{ f(x) : f(x)= a_0+a_1e^x+a_2e^{2x},\ a_i \in \mathbb{R} ,\ i=0,1,2 \}$

e2) $V = \{ f(x) : f(x)= a_0+a_1\cos^2x +a_2\sin^2x,\ a_i \in \mathbb{R} ,\ i=0,1,2 \}$

e3) $V = \{ f(x) : f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in [a,b] \}$

E. LINEÁRIS FÜGGÉS-FÜGGETLENSÉG A LINEÁRIS TÉRBEN. LINEÁRIS TÉR DIMENZIÓJA ÉS BÁZISA

216. Vizsgálja meg , hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok, és ha nem , válasszon ki a vektorrendszerből maximális számú lineárisan független vektort.

a) az oszlopvektorok lineáris terében az alábbi vektorok

a1) $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

a2) $\underline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

a3) $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) a sorvektorok lineáris terében az alábbi vektorok

b1) [1,1,1,1], [1,0,0,1], [0,0,1,1]

b2) [2,-2,4], [1,9,3], [3,7,7]

b3) [1,1,1,1], [2,2,1,4], [1,-1,1,-1], [2,1,1,3] b4) [1,-1,1,1], [1,0,1,0], [3,-5,3,5]

c) a folytonos függvények lineáris terében az alábbi függvények

c1) $1, x, x^2, x^3$

c2) $1, e^x, e^{-x}$, ch x

c3) $\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x$

217. Igazolja, hogy az adott vektorrendszer bázisa az adott lineáris térnek.

a) (1,-1), (2,3) bázisa a rendezett valós számpárok lineáris terének.

b) (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) bázisa a rendezett valós számhármasok lineáris terének.

c) $1, x, x^2$ bázisa a legfeljebb másodfokú polinomok lineáris terének.

d) $1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3$ bázisa a legfeljebb harmadfokú polinomok lineáris terének.

218. Válassza ki az alábbi vektorrendszerek közül azokat, amelyek az adott lineáris térnek bázisai.

a) $\mathbb{R}^3$ = { rendezett valós számhármasok lineáris tere }

a1) (1,0,1), (0,-1,1), (3,3,3)

a2) (2,-3,1), (4,1,1)

a3) (3,1,-4), (2,5,6), (1,4,8)

a4) (1,6,4), (2,4,-1), (-1,2,5)

b) P_2 = { legfeljebb másodfokú polinomok lineáris tere }

b1) $1+x+x^2, x+x^2, x^2$

b2) $1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x$

b3) $-4+x+3x^2, 6+5x+2x^2, 8+4x+x^2$

b4) $-1+4x+2x^2, 5+2x-x^2$

219. Határozza meg az adott vektorok által kifeszített lineáris tér dimenzióját és egy bázisát. Adja meg a bázisban nem lévő vektort (vektorokat) a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

a) [1,-2,3], [2,0,-4], [3,-2,-1], [3,2,-1]

b) $\begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) e^x, e^{-x}, sh x

220. Határozza meg a D.215-ben kapott alterek dimenzióját és adjon meg egy bázist.

221. Határozza meg t értékét úgy, hogy az

$\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}, \quad \underline{y} = \underline{a} + (t+2)\underline{b}$

vektorok lineárisan összefüggőek legyenek, ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ lineárisan függetlenek.

222. Határozza meg t értékét úgy, hogy az

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{c} = \begin{bmatrix} t \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

vektorok lineárisan összefüggőek legyenek.

F. EUKLIDESZI TÉR

223. Adott a három-dimenziós oszlopvektorok lineáris terében az

$(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ skalár szorzat.

a) Adja meg az összes olyan vektort, amelyek az

$\underline{a} = [1,2,3]^T$ és $\underline{b} = [0,-1,1]^T$

vektorokra merőlegesek (a T felső index a transzponáltat jelöli).

b) Adottak az alábbi vektorok:

$\underline{a} = [1,2,3]^T$, $\underline{b} = [0,-1,1]^T$, $\underline{c} = [2,-1,2]^T$.

Adja meg a $\underline{c}$ vektort

$\underline{c} = \underline{c}_1 + \underline{c}_2$

alakban, ahol a $\underline{c}_1$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített W altérben van, a $\underline{c}_2$ pedig merőleges a W altérre.

224. Adott a [0,1] intervallumon folytonos függvények lineáris terében az

$$(f,g) = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx \quad \text{skalár szorzat.}$$

Határozza meg a $g(x) = ax + b$ polinomot úgy, hogy ortogonális legyen az $f(x) = 1$ polinomra, és $(g,g) = 1$ legyen.

G. BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ

225. a) Mutassa meg, hogy a

$\underline{c}_1 = \underline{i} + 2\underline{j}$, $\underline{c}_2 = 5\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{k}$, $\underline{c}_3 = 2\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$

vektorrendszer a geometriai térnek egy bázisa.

b) Adja meg ebben a bázisban a

$\underline{v} = \underline{i} + 3\underline{j} - \underline{k}$

vektor koordinátáit.

226. A három-dimenziós oszlopvektorok lineáris terének egy bázisa:

$$B: \underline{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \underline{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

a) Mutassa meg, hogy a

$C: \underline{c}_1 = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2$, $\underline{c}_2 = -\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$, $\underline{c}_3 = 5\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3$

is egy bázisa a lineáris térnek.

b) Adja meg a B bázisról a C bázisra való áttérés mátrixát.

c) Adja meg a

$\underline{v} = -3\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$

vektor koordinátáit a C bázisban.

227. a) Válassza meg a t értékét úgy, hogy a négy-dimenziós oszlopvektorok lineáris terében a

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\t\\1\end{bmatrix}, \underline{b}_4 = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\\3\end{bmatrix}$$

vektorrendszer bázis legyen.

b) Adja meg ebben a bázisban a

$$\underline{v} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

vektor koordinátáit.

H. LINEÁRIS OPERÁTOROK

228. Legyen V a síkvektorok lineáris tere. Mutassa meg, hogy az alábbi hozzárendelések lineáris operátorok.

a) L: minden síkvektort az X tengelyre merőlegesen vetít

b) L: minden síkvektort az X tengelyre tükröz

c) L: minden síkvektort az origó körül φ szöggel pozitív irányban elforgat

d) L: minden síkvektort az X tengelyre merőlegesen vetít, majd pozitív irányban $\pi/6$-al elforgat

229. Irja fel a T lineáris operátor mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban, ha

a) $T\underline{i} = \underline{j}$

$T\underline{j} = -\underline{k}$

$T(\underline{j}-2\underline{k}) = \underline{i}$

b) $T(\underline{i}+\underline{j}) = 2\underline{i} - \underline{k}$

$T\underline{j} = 2\underline{k}$

$T(\underline{i}-\underline{k}) = 4\underline{i} - 2\underline{j}$

230. Irja fel a T lineáris operátor mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$ bázisban, ha minden $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j}$ vektort

a) az 5-szörösébe viszi át

b) a X tengelyre tükröz

c) az Y tengelyre merőlegesen vetít

d) az origó körül $\pi/4$ - del pozitív irányban elforgat.

231. Irja fel a T lineáris operátor mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban, ha minden $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ vektort

a) az $y = 0$ síkra vetít

b) az $y = z$ síkra vetít

c) a $z = 0$ síkra tükröz

d) az Y tengely körül $\pi/3$ - dal pozitív irányban elforgat.

232. Legyen

$T\underline{v} = \underline{a} \times \underline{v}$, ahol

$\underline{a} = \underline{i} - \underline{k}$, $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.

a) Igazolja, hogy a leképezés lineáris operátor.

b) Adja meg a T lineáris operátor mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban.

c) Határozza meg azokat a vektorokat, amelyekre

$T\underline{v} = \underline{0}$.

233. Legyen a

$T\underline{v} = (-\underline{i}+\underline{j},\underline{v})\cdot\underline{i}$, ahol $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.

a) Adja meg a T lineáris operátor mátrixát az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban.

b) Mibe viszi át a T lineáris operátor a

$\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$ vektort ?

c) Határozza meg azokat a vektorokat, amelyekre

$T\underline{v} = \underline{0}$.

I. SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR
SPEKTRÁLFELBONTÁS

234. Határozza meg az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

235. Határozza meg az $\underline{\underline{A}}^2+2\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

236. Határozza meg az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

237. Adja meg a

$T\underline{v} = (\underline{j}+\underline{k},\underline{v})\cdot\underline{j}$, $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

lineáris operátor sajátértékeit és sajátvektorait.

238. Adja meg a

$T\underline{v} = (\underline{i}+\underline{k})\times(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})$

lineáris operátor sajátértékeit és sajátvektorait.

239. Határozza meg az alábbi mátrixok spektrálfelbontását, ha létezik

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

240. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Határozza meg az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix spektrálfelbontását és annak felhasználásával az $\underline{\underline{A}}^{-50}$ mátrixot.

J. KVADRATIKUS ALAKOK

241. Adja meg szimmetrikus mátrixszal a következő kvadratikus alakot, és állapítsa meg, hogy az definit, szemidefinit vagy indefinit alak-e.

a) $Q(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 3xy$

b) $Q(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - xy$

c) $Q(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$

d) $Q(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy$

e) $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz$

f) $Q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2xy$

g) $Q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xz$

h) $Q(x,y,z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$

242. Határozza meg ortogonális transzformációval a 241. alatti polinomok kanonikus alakját.

243. Állapítsa meg, hogy a másodrendű egyenlet milyen görbe egyenlete.

a) $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$

b) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 6$

c) $3x^2 - 8xy - 12y^2 = 81$

d) $11x^2 + 24xy + 4y^2 = 15$

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A. MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

301. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ b) $y'' - 4y' + 5y = 0$

c) $y'' + 4y = x$ d) $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

302. Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek adott kezdeti feltételeket illetve peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldását:

a) $y'' - 6y' + 9y = 0$ $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0$

b) $y'' + y = 2\sin x \cdot \cos x$ $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$

c) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ $y(0) = 7/74$ és $y'(0) = 5$

d) $y'' + 4y = 0$ $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

303. Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

b) $y'' + y = \mathrm{tg}\, x$

B. DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK

Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

$$\underline{x}'(t) = \underline{\underline{A}}\underline{x}(t)$$

304. Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását:

a) $x_1' = 2x_1 - x_2$, $x_2' = -x_1 + 2x_2$

b) $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2 + x_3$, $x_3' = 3x_3$.

Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

$\underline{x}'(t) = \underline{\underline{A}}\underline{x}(t) + \underline{f}(t)$

305. Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását:

a) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

SKALÁR-VEKTOR FÜGGVÉNYEK
(TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK)

A. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY, SZEMLÉLTETÉS

401. Adja meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és állapítsa meg, hogy az zárt-e, nyílt-e, korlátos-e, összefüggő-e:

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ b) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

c) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ d) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y}$

e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-4}$ f) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x+y+z-4}$.

402. atározza meg az alábbi függvények szintvonalait :

a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = x^2 - y^2$

c) $z = x-y^2$ d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

e) $z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

403. Határozza meg az alábbi függvények szintfelületeit :

a) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ b) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

B. SZAKADÁSI HELYEK. HATÁRÉRTÉK.

404. Határozza meg az alábbi függvények szakadási helyeit:

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

c) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{xy - z}$

d) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

405. Állapítsa meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek. Amelyik létezik, azt határozza meg:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

C. FOLYTONOSSÁG.

406. Állapítsa meg, hogy hol folytonosak az alábbi függvények:

a) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad y \geq x \\ 0 & \text{ha} \quad y < x \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ x & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}$.

407. Állapítsa meg, hogy a szakadási helyeken folytonossá tehetők-e az alábbi függvények:

a) $f(x,y) = \dfrac{(x+2)^2y}{x+2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

408. Folytonosak-e az alábbi függvények? Ahol nem folytonosak, ott állapítsa meg, hogy rögzített x esetén az y változónak, illetve rögzített y esetén az x változónak folytonos függvényei-e:

a) $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,1) \end{cases}$.

D. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS.

1. Parciális deriváltak.

409. Léteznek-e az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjai az adott pontokban:

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; $(x,y) = (0,0)$

b) $f(x,y) = \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $(x,y) = (0,0)$

c) $f(x,y) = \sqrt[3]{x(y-1)}$; $(x,y) = (0,1)$.

410. Határozza meg az alábbi függvények összes elsőrendű parciális deriváltját, ahol léteznek:

a) $f(x,y) = x^2-3xy^2+e^{xy^2}$ b) $f(x,y) = xy^2 - \dfrac{y}{x^2}$

c) $f(x,y) = x\cdot\sin(x+y^2)$ d) $f(x,y) = y^2\ln\dfrac{x^2}{y}$

e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ f) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}$

g) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

h) $f(x,y,z) = e^{y\sin(x^2+z)}$.

411. Határozza meg az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait, ahol léteznek:

a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2-y^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-y)^2}$

c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ d) $f(x,y) = \operatorname{arth}\dfrac{y}{x}$.

2. Differenciálhatóság. Gradiens-vektor.

412. Differenciálhatók-e a (0,0) pontban az alábbi függvények:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

413. Hol differenciálhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott adja meg a differenciálhányados - vektort (gradiens-vektort):

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{ch}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

d) $f(x,y,z) = xy^2\sqrt{z}$

e) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

414. Határozza meg az alábbi függvények differenciálhányados - vektorát (gradiens-vektorát):

a) $f(\underline{r}) = |\underline{r}|$; $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$

b) $f(\underline{r}) = |\underline{r}|^2$; $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$

c) $f(\underline{r}) = e^{|\underline{r}|}$; $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$

d) $f(\underline{r}) = \sin|\underline{r}|^2$; $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$

e) $f(\underline{r}) = \ln\dfrac{1}{|\underline{r}|}$; $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$

f) $f(\underline{r}) = |\underline{r}|\cdot\sin|\underline{r}|$; $\underline{r} \in \mathbb{R}^2$.

3. Összetett függvények deriváltja.

415. Határozza meg az alábbi $(f\circ\underline{r})t = f(\underline{r}(t))$ tipusú összetett függvények deriváltjait:

a) $f(x,y) = \ln(xy)$ és
$x(t) = \operatorname{tg} t$; $y(t) = \sqrt{t}$

b) $f(x,y) = \operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2}$ és
$x(t) = 2t^2-1$; $y(t) = e^t$

c) $f(x,y,z) = xy^2\cdot\sqrt{z}$ és
$x(t) = \cos\dfrac{\pi t}{2}$; $y(t) = \sin\dfrac{\pi t}{2}$; $z(t) = t^2$.

416. Határozza meg az alábbi $(f\circ\underline{r})(u,v) = f(\underline{r}(u,v))$ tipusú összetett függvény u és v szerinti parciális deriváltjait:

a) $f(x,y) = 3xy$ és
$x(u,v) = \sin(u+v)$; $y(u,v) = \cos(u+v)$

b) $f(x,y) = e^{x-y^2}$ és
$x(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$; $y(u,v) = -\ln(uv)$

c) $f(x,y,z) = xy^2z$ és
$x(u,v) = u^2+3v$; $y(u,v) = uv$; $z(u,v) = \ln(u+v)$.

4. Iránymenti derivált.

417. Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és az adott irányban:

a) $f(x,y) = x^2-2xy+\mathrm{sh}(x+y)$; $P_0(-2,1)$; $\underline{v} = 3\underline{i}-\underline{j}$

b) $f(x,y) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$; $P_0(2,1)$; $\underline{v} = \underline{i}+3\underline{j}$

c) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$; $P_0(1/2,0,0)$; $\underline{v} = \underline{i}-\underline{j}$

d) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)}-z$; $P_0(1,0,1)$; $\underline{v} = 3\underline{i}+2\underline{j}-5\underline{k}$

e) $f(\underline{r}) = \sqrt[3]{|\underline{r}|}$; $\underline{r} \in R^3$; $P_0(3,0,4)$; $\underline{v} = -\underline{i}-\underline{j}+2\underline{k}$.

418. Határozza meg az alábbi függvények adott pontbeli iránymenti deriváltjait a maximális iránymenti deriválthoz tartozó irányban:

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$; $P_0(1,-1)$

b) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)}-z$; $P_0(1,0,1)$

c) $f(\underline{r}) = \ln\sqrt[3]{|\underline{r}|^2}$; $\underline{r} \in R^3$; $P_0(0,2,2)$.

419. Igazolja, hogy folytonos és differenciálható $f(x)$ függvényt határoznak meg az alábbi összefüggések az adott pont környezetében. Határozza meg az adott pontban a függvény differenciálhányadosát.

a) $x^3+y^3-2xy = 0$; $P_0(1,1)$

b) $e^{xy}+\sin\dfrac{y}{x}-2e^{y^2}+x = 0$; $P_0(1,0)$.

420. Igazolja, hogy folytonos és differenciálható $f(x,y)$ függvényt határoznak meg az alábbi összefüggések az adott pont környezetében. Határozza meg az $f'_x(x_0,y_0)$ és $f'_y(x_0,y_0)$ parciális deriváltakat:

a) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{z}{y} + e^{xz} - z - \dfrac{\pi}{4} = 0$; $P_0(0,1,1)$

b) $xy - 2\cdot e^{x-y} - 2z + e^z = 0$; $P_0(1,1,0)$.

6. Érintősík.

421. Írja fel az alábbi - $z = f(x,y)$ egyenletű - felületek érintősíkjainak egyenletét az (X,Y) síkbeli P_0 ponthoz tartozó felületi pontjukban:

a) $z = x^3+y^3-9x^2y$; $P_0(1,-1)$

b) $z = 3y + e^{xy^2} - 2y\cdot\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$; $P_0(0,1)$.

422. Írja fel az $u = f(x,y,z)$ függvények $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontjain átmenő szintfelületeinek P_0 pontbeli érintősík-egyenletét:

a) $f(x,y,z) = \sqrt[4]{x^2+2y^2+z^2}$; $P_0(2,2,2)$

b) $f(x,y,z) = \ln\sqrt[3]{|\underline{r}|}$; $\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$; $P_0(e,0,0)$.

423. Határozza meg az $xyz = 1$ felületnek az $x+y+z = 6$ síkkal párhuzamos érintősíkjait. Írja fel ezek egyenletét.

424. Határozza meg az $f = \sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$ függvény $P_0(2,0,1)$ ponton átmenő szintfelületének az $x+2y+3z=0$ síkkal párhuzamos érintősíkjait. Írja fel ezek egyenletét.

7. Lokális és abszolut szélsőérték.

425. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b) $f(x,y) = x^4 - 4x + 2y^2 - 2y$

c) $f(x,y) = e^{-x^2 - 2y^2 + 3xy}$

d) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$

e) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy$

f) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4xy$

426. Határozza meg az alábbi függvények abszolut szélsőértékeit az adott tartományokon:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

$T = \{(x,y): 0 \le x \le 4 \ ; \ 0 \le y \le 4\}$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x + y$

$T = \{(x,y): 0 \le x \le 1 \ ; \ 0 \le y \le 1-x\}$.

427. A $z = 2x^2+y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sík által kimetszett szeletébe írja be a legnagyobb térfogatú, koordinátetengelyekkel párhuzamos élű, derékszögű hasábot.

428. Egy adott ponton átmenő síkok közül melyik van legmesszebb az origótól?

E. SKALÁR-VEKTOR FÜGGVÉNY TARTOMÁNYI INTEGRÁLJAI.

1. Kettős és hármas integrálok.

429. Határozza meg az alábbi kettős integrálok értékét:

a) $\iint_T (x^2 + 2y^2)\, dT$, ahol

$T = \{(x,y): 1 \le x \le 3 \ ; \ 0 \le y \le 2\}$

b) $\iint_T (3x^2 - y + 1)\, dT$, ahol

T az $x = 0$, $y = 0$ és az $y = 1-x$ egyenletű egyenesek által határolt korlátos tartomány

c) $\iint_T (y^2 + 2xy)\, dT$, ahol

T az $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ és az $y = e^x$ görbék által határolt korlátos tartomány.

430. Megfelelő transzformációval határozza meg az alábbi kettős integrálok értékét:

a) $\iint_T \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dT$, ahol

$T = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1/2\}$

b) $\iint_T e^{-x^2-y^2}\, dT$, ahol

$T = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1 \ ; \ x \ge 0\}$

c) $\iint_T xy^2\, dT$, ahol

$T = \{(x,y): (x-1)^2+y^2 \le 1\}$

d) $\iint_T (x^2+xy)\,dT$, ahol

$T = \{(x,y): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}$.

431. Határozza meg az alábbi hármas integrálok értékét:

a) $\iiint_V (xy + 2z)\,dV$, ahol

$V = \{(x,y,z): 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$

b) $\iiint_V (x + y + z)\,dV$, ahol

$V = \{(x,y,z): z \le x-y^2,\ z \ge 0,\ x \le 4\}$.

432. Megfelelő transzformációval határozza meg az alábbi hármas integrálok értékét:

a) $\iiint_V dV$, ahol

$V = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 4 ,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$

b) $\iiint_V (x^2+yz)\,dV$, ahol

$V = \{(x,y,z): z \le 4-(x^2-2y^2),\ z \ge 0\}$.

433. Határozza meg az alábbi görbék által határolt síklemezek tömegét az adott ρ sűrűségfüggvény mellett:

a) T határai: $y = x,\ y = \sqrt{x}$; $\rho = x^2+2xy$

b) T határai: $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, $x = 0$; $\rho = x^2+y^2$

c) T határa: $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $\rho = 2x-y^2$.

434. Határozza meg az alábbi felületek által határolt térrészek térfogatát:

a) V - t határoló felületek: $z = x^2+2y^2$, $y = 0$, $y = x$, $y = 2-x$, $z = 0$

b) V - t határoló felületek: $x^2+y^2+z^2 = 1$, $(x-1/2)^2+y^2=1/4$, $z = 0$

c) V - t határoló felületek: $z = x^2-y^2$, $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$.

435. Határozza meg az alábbi felületek által határolt térrészek tömegét az adott ρ sűrűségfüggvény esetén:

a) V - t határoló felületek: $z = 4-x^2-y^2$, $z = 0$; $\rho = x+z$

b) V - t határoló felületek: $x^2+y^2+4z^2 = 1$, $x^2+y^2+4z^2 = 4$;

$\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$.

2. Kettős és hármas impropius integrálok.

(Nem minimál-követelmény.)

436. Határozza meg az alábbi impropius integrálok értékét, amennyiben azok léteznek:

a) $\iint_T y \cdot e^{-x^2}\,dT$, ahol $T = \{(x,y): y \le \sqrt{x} ,\ y \ge 0\}$

b) $\iint_T e^{-x^2-y^2}\,dT$, ahol $T = \{(x,y): x \ge 0 ,\ y \ge x\}$

c) $\iint_T e^{-y^2}\,dT$, ahol $T = \{(x,y): x \ge 0 ,\ y \ge x\}$

d) $\iint e^{-x-y} dT$, ahol $T = \{(x, y) : x \geq 0 , y \geq 0 \}$

e) $\iint_T \frac{1}{(x^2+y^2)^3} dT$, ahol $T = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1 \}$

f) $\iiint_V e^{-x^2-y^2-z^2} dV$, ahol $V = \mathbb{R}^3$

g) $\iint_V (y+z) dV$, ahol $V = \{(x,y,z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.