Valószínűségszámítás B

4. előadás

Tóth Dávid (BME SZIT)

2023. március 20.

Valószínűségi változók

A valószínűségi mezők modellje nem elegendő céljainkhoz.

A valószínűségszámítás alkalmazásaiban tipikusan véletlen mennyiségekkel dolgozunk. Például:

- egy kockadobás eredménye,
- egy csoportból véletlenszerűen választott ember életkora,
- egy termék tesztelésénél a kiválasztott mintában lévő hibás termékek darabszáma,
- egy részvény árfolyama,
- egy mérés hibája,
- egy csatornán való információküldésnél a hibásan továbbított bitek száma, stb.

Valószínűségi változók

Tekinthetnénk véletlen kimeneteleknek a fenti számértékeket, az eseményterünket definiálhatnánk ezek összességeként, ez azonban **nem célszerű**.

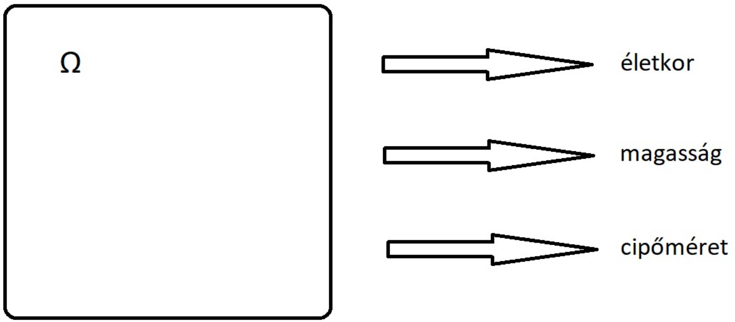
Példa: egy véletlenszerűen választott ember életkora.

- Itt nem egy számot választunk véletlenszerűen, hanem egy embercsoport egy tagját.
- Az életkor a választott ember egy *jellemzője*.
- Az életkoron túl más jellemzők is érdekelhetnek minket, pl. cipőméret, magasság.
- Vizsgálni szeretnénk, hogy a különböző értékek közt van-e összefüggés.

Valószínűségi változók

- A felsorolt attribútumok egyazon személyhez tartoznak, nem célszerű ezeket egymástól függetlenül, külön eseményterekben kezelni.
- Ehelyett a véletlenszerűen választott személyhez kapcsoljuk őket.
- Azaz egyetlen eseménytér elemeihez rendelünk hozzá különböző értékeket, tulajdonságokat, melyeket aztán együtt kezelhetünk.
- Ezt a célt ún. *valószínűségi változók* segítségével valósítjuk meg, melyek a fentiek értelmében hozzárendelések, vagyis az eseménytéren értelmezett *függvények*.

Valószínűségi változók



Diszkrét valószínűségi változók

Ezen és a következő két előadáson minden eseménytérről feltesszük, hogy megszámlálható (véges vagy megszámlálhatóan végtelen).

Továbbá, a korábban látottakhoz hasonlóan feltesszük, hogy egy eseménytér összes részhalmaza eseményt alkot.

Definíció. Legyen Ω egy megszámlálható eseménytér, ekkor egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt *diszkrét valószínűségi változónak* nevezünk. Az X valószínűségi változó *egyszerű*, ha $\mathrm{ran}\, X$ (azaz az X értékkészlete) véges. A valószínűségi változókat (ezen a kurzuson) tipikusan nagy latin betűkkel jelöljük.

Megjegyzés.

- Az Ω eseménytér megszámlálható volta valójában nem szükséges a diszkrét valószínűségi változó definíciójában.
- Elég volna azt feltenni, hogy az értékkészlet megszámlálható.
- Az általánosabb definícióhoz szükséges technikai részletekkel később foglalkozunk majd.

Diszkrét valószínűségi változók

Példák.

- Egy szabályos kockával dobunk, legyen X maga az eredmény. Itt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és minden $\omega \in \Omega$ esetén $X(\omega) = \omega$.
- Legyen $Y = X^2$, ahol X a fent definiált valószínűségi változó. Ekkor tehát Y egy kockadobás eredményének a négyzete.
- Feldobunk egy szabályos pénzérmét 2-szer egymás után, legyen Z a fejek száma. Tehát itt $\Omega = \{FF, FI, IF, II\}$, továbbá $Z(FF) = 2$, $Z(FI) = Z(IF) = 1$, valamint $Z(II) = 0$.
- Legyen $A \subset \Omega$ egy esemény, legyen továbbá

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A, \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A. \end{cases}$$

  Az $\mathbb{1}_A$ valószínűségi változót az A esemény *indikátorváltozójának* nevezzük.

Diszkrét valószínűségi változók

Példák.

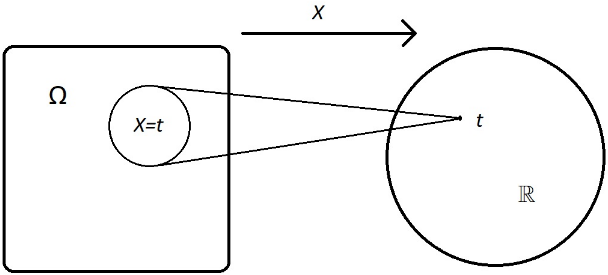
- Egymástól függetlenül elvégzünk egy kísérletet n-szer egymás után. Legyen U egy adott (fix) esemény bekövetkezéseinek száma. Például: n-szer dobunk egy érmével, és megszámoljuk, hogy hányszor következett be az az esemény, hogy fejet kapunk. Vagy n-szer dobunk egy kockával, és megszámoljuk, hogy hányszor dubtunk páros számot. Ez tehát a fenti Z változó általánosítása.
- Addig végzünk egymás után többször függetlenül egy kísérletet, amíg egy adott esemény be nem következik. Legyen V a szükséges kísérletek száma.
- A fenti példák a V változó kivételével *egyszerű* valószínűségi változókat definiálnak, továbbá $\operatorname{ran} V = \mathbb{N}^+$.

Diszkrét valószínűségi változók

- A valószínűségi változók viselkedését az általuk felvett értékek segítségével jellemezhetjük.
- Pl.: milyen valószínűséggel lesz egy dobás értéke 3-nál nagyobb, egy üzenet küldésénél mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 10 bit hibásodik meg.
- Diszkrét valószínűségi változók esetén az ilyen kérdések megválaszolásához elegendő tudni, hogy a lehetséges értékeit külön-külön milyen valószínűséggel veszi fel egy változó.
- Hasonló jelenség: egy megszámlálható eseménytéren egy valószínűségi mértéket egyértelműen meghatároz az, hogy az egyes kimenetelek milyen valószínűek.

Diszkrét valószínűségi változók

Definíció. Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy diszkrét valószínűségi változó, $t \in \mathbb{R}$, ekkor az $\{X = t\}$ halmaz az Ω eseménytér mindazon ω elemeiből álló részhalmaza (vagyis azon ω-k alkotta esemény), melyekre $X(\omega) = t$ teljesül.



Példa. Kétszer dobunk egy szabályos érmével, legyen Z a fejek száma. Ekkor

$$\{Z = 1\} = \{FI, IF\}.$$

Diszkrét valószínűségi változók

Definíció. A fenti definícióhoz hasonlóan, egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó és $t \in \mathbb{R}$ esetén az $\{X \leq t\}$ esemény azon $\omega \in \Omega$ kimenetelekből áll, melyekre $X(\omega) \leq t$ teljesül.

Analóg módon definiálhatjuk az $\{X < t\}$, $\{X \geq t\}$, $\{X > t\}$, $\{s < X \leq t\}$, stb. eseményeket is.

Általában, ha $H \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges halmaz, akkor a H halmaz X általi *ősképe* az $X^{-1}(H) = \{X \in H\}$ halmaz, amely azon $\omega \in \Omega$ kimenetelekből áll, melyekre $X(\omega) \in H$ teljesül.

Példa. Kétszer dobunk egy szabályos érmével, legyen ismét Z a fejek száma. Ekkor

$$\{Z < 2\} = \{Z = 0\} \cup \{Z = 1\} = \{II, FI, IF\}.$$

Diszkrét valószínűségi változók

- Ha Ω-n egy valószínűségi mérték is adott, akkor egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn van értelmezve.
- Ekkor beszélhetünk például a $\mathbb{P}(X = 1) := \mathbb{P}(\{X = 1\})$ vagy a $\mathbb{P}(X < 2) := \mathbb{P}(\{X < 2\})$ valószínűségekről.
- Ezekben az esetekben a jelölés egyszerűsítése érdekében a halmazokat jelölő kapcsos zárójeleket általában elhagyjuk.

Diszkrét valószínűségi változók

- X értéke egy adott $\omega \in \Omega$-ra egyértelműen definiált, így $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq t$ esetén az $\{X = s\}$ és $\{X = t\}$ események egymást kizáróak.
- Ezért tehát

$$\mathbb{P}(X = s \text{ vagy } X = t) = \mathbb{P}(X \in \{s, t\}) = \mathbb{P}(X = s) + \mathbb{P}(X = t).$$

$\Rightarrow$ Az X értékeinek segítségével jellemezhető események valószínűségeinek meghatározásához elegendő a $\mathbb{P}(X = t)$ valószínűségeket ismerni, ahol t végigfut az X értékkészletén.

- Általában egy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ halmazra

$$\mathbb{P}(X \in H) = \sum_{t \in H \cap \operatorname{ran} X} \mathbb{P}(X = t).$$

Diszkrét valószínűségi változók

Példa. Legyen X egy kockadobás eredménye. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=3)=\\ =\mathbb{P}(X=4)=\mathbb{P}(X=5)=\mathbb{P}(X=6)=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

továbbá pl.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{párosat dobunk}) &= \mathbb{P}(X=2 \text{ vagy } X=4 \text{ vagy } X=6)\\ &= \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Diszkrét valószínűségi változók

Definíció. Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó, akkor minden $t \in \operatorname{ran} X$ értékre legyen $f_X(t) := \mathbb{P}(X = t)$. Az így kapott $f_X : \operatorname{ran} X \to [0; 1]$ függvényt az X változó *súlyfüggvényének* nevezzük.

A fentiek értelmében tehát egy X diszkrét valószínűségi változó f_X súlyfüggvénye meghatározza az X értékeivel kifejezhető események valószínűségét.
Egy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ halmaz esetén ugyanis

$$\mathbb{P}(X \in H) = \sum_{t \in H \cap \operatorname{ran} X} f_X(t).$$

Diszkrét valószínűségi változók

- Azt mondjuk, hogy az X súlyfüggvénye meghatározza az X *eloszlását*.
- Az f_X függvény megadása magában foglalja az X értékkészletének megadását is, tehát ehhez mind a felvehető értékeket, mind azok felvételének valószínűségeit meg kell adnunk.
- Később látni fogjuk, hogy az X eloszlását, másképp is meg lehet határozni, tehát a súlyfüggvény megadása az eloszlás megadásának *egyik*, de nem az *egyetlen* módja.

Diszkrét valószínűségi változók

Példa. Legyen Y egy kockadobás eredményének négyzete. Ekkor Y az 1, 4, 9, 16, 25 és 36 értékeket veheti fel, mindegyiket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel, tehát a súlyfüggvénye:

$$f_Y(1)\big(= \mathbb{P}(Y = 1) = \big) f_Y(4) = f_Y(9) =$$
$$= f_Y(16) = f_Y(25) = f_Y(36) = \frac{1}{6}.$$

Diszkrét valószínűségi változók

Példa. Legyen A egy esemény, melyre $\mathbb{P}(A) = p$. Ekkor az A-hoz tartozó $\mathbb{1}_A$ indikátor valószínűségi változó eloszlása:

$$f_{\mathbb{1}_A}(1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A) = p,$$
$$f_{\mathbb{1}_A}(0) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - p.$$

Binomiális eloszlás

Példa. Egy kockával ötször dobunk, legyen X a dobott hatosok száma. Mennyi az X súlyfüggvényének értéke például a 2 helyen? Azaz: mennyi az $f_X(2) = \mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

Minden dobásnál: $\frac{1}{6}$ a hatos valószínűsége, $\frac{5}{6}$ eséllyel más lesz az eredmény. $\Rightarrow$ Egy olyan dobássorozat, ahol pontosan kettő, előre fixált dobásnál kapunk hatost,

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

valószínűséggel adódik, hiszen az egyes dobások függetlenek.

A két hatosdobás sorszámát $\binom{5}{2} = 10$-féleképp választhatjuk ki, és így a keresett valószínűség

$$10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888} \approx 0{,}1608.$$

Binomiális eloszlás

Az utóbbi gondolatmenet általánosítjuk:

- Egymástól függetlenül elvégzünk egy kísérletet n-szer egymás után, legyen X egy fix p valószínűségű esemény bekövetkezéseinek a száma ezek során.
- $\operatorname{ran} X = \{0, 1, \ldots, n\}$
- Az $\{X = k\}$ esemény azon lehetséges kísérletsorozatokból áll, melyeknél pontosan k-szor következik be az vizsgált esemény.
- Ez azt jelenti, hogy az a többi $n - k$ esetben nem következik be (vagyis ezeknél az esemény $1 - p$ valószínűségű komplementere következik be).
- Mivel a kísérletek egymástól függetlenek, így egyetlen ilyen kísérletsorozat valószínűsége az egyes kísérletekben adódó eredmények valószínűségeinek szorzata, azaz $p^k(1-p)^{n-k}$.

Binomiális eloszlás

Az utóbbi gondolatmenet általánosítjuk:

- Hány olyan kísérletsorozat van, ahol éppen k-szor következik be a vizsgált esemény (éppen k darab "sikeres kísérlet van")?
- A sikeres kísérletek sorszámainak halmaza $\binom{n}{k}$-féleképp választható (ez a választás pedig már egyértelműen meghatározza a (maradék) "sikertelen" kísérleteket).
- Tehát az $\{X = k\}$ eseményt $\binom{n}{k}$ darab azonos $p^k(1-p)^{n-k}$ valószínűségű, páronként egymást kizáró esemény alkotja, ezért

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Binomiális eloszlás

Definíció. Az X diszkrét valószínűségi változó *binomiális eloszlású* az $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [0;1]$ paraméterekkel, ha értékkészlete a $\{0, 1, \ldots, n\}$ halmaz, és

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

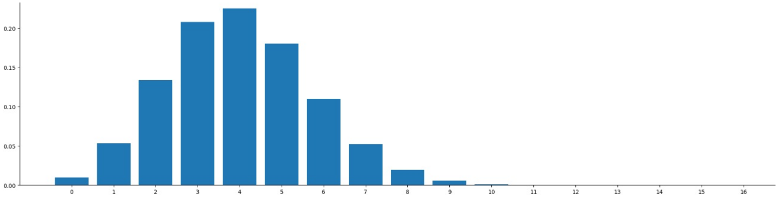
minden $0 \leq k \leq n$ egész esetén. Jelölés: $X \sim Bin(n; p)$.

Binomiális eloszlás

Megjegyzés.

- A fenti utolsó példában tehát X egy binomiális eloszlású változó volt.
- Bár sok esetben ilyen változók kísérletsorozatok modelljeiből adódnak, ez nem szükségszerűen van így!
- Az eloszlás csak a különböző értékek felvételének *valószínűségét* írja le, hogy magát a valószínűségi változót hogyan konstruáljuk, arról semmit nem mond.

Binomiális eloszlás



- A fenti ábra egy $Bin(16; \frac{1}{4})$ eloszlású változó súlyfüggvényének értékét mutatja.
- Látható, hogy az egyes k értékekhez tartozó valószínűségek egy darabig nőnek, majd egy ponttól kezdve csökkenő sorozatot alkotnak.
- Ez egy tetszőleges binomiális eloszlású változó esetén így van, sőt, azt is könnyen meghatározhatjuk, hogy melyik értéket veszi fel a változó a legnagyobb valószínűséggel:

Binomiális eloszlás

Állítás. Legyen $X \sim Bin(n; p)$ egy binomiális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az $f_X(k)$ súlyfüggvény

- monoton növő a $[0; \lfloor (n+1)p \rfloor]$ intervallum által tartalmazott egészek halmazán,
- monoton csökkenő az $[\lfloor (n+1)p \rfloor; n]$ intervallumon,
- következésképp a változó súlyfüggvénye az $m = \lfloor (n+1)p \rfloor$ értékre maximális.
- Ha $(n+1)p$ egy pozitív egész, és így

  $$m = \lfloor (n+1)p \rfloor = (n+1)p,$$

  akkor $f_X(m) = f_X(m-1)$, és a maximum pontosan ezen két értékre vétetik fel.
- Egyéb esetben a maximumhely egyértelmű.

Geometriai eloszlás

Példa. Addig ismétlünk egymás után többször függetlenül egy kísérletet, amíg egy p valószínűségű esemény be nem következik.

Ilyen példák a következők:

- addig dobálunk egy érmét, amíg fejet nem kapunk (ebben az esetben $p = \frac{1}{2}$),
- addig dobálunk egy kockát, amíg hatost nem dobunk (itt $p = \frac{1}{6}$).

Geometriai eloszlás

Példa. Legyen X a szükséges kísérletek száma.

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, akkor $f_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$ annak a valószínűsége, hogy az első $k-1$ kísérlet során az vizsgált esemény nem következik be (tehát az $1-p$ valószínűségű komplementere következik be), majd a k-adik kísérlet során a vizsgált esemény bekövetkezik.

Mivel a kísérletek egymástól függetlenek, így

$$f_X(k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Geometriai eloszlás

Definíció. Az X diszkrét valószínűségi változó *geometriai eloszlású* $p \in (0;1)$ paraméterrel, ha értékkészlete a pozitív egészek halmaza, és

$$f_X(k) = (1-p)^{k-1}p$$

teljesül minden $k \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész esetén. Jelölés: $X \sim Geo(p)$.

Geometriai eloszlás

- Ha egy pénzérmét többször egymás után feldobunk, akkor néhány dobás eredménye nem befolyásolja annak az esélyeit, hogy a következő dobásnál fejet vagy írást dobunk.
- Ebből az is következik, hogy ha tudjuk, hogy néhány egymást követő dobás eredménye írás volt, attól még ugyanolyan valószínűséggel kapunk fejet a következő, vagy az azutáni kísérletekben, mintha most kezdenénk a dobálást.
- Általánosabban: ha egymástól függetlenül ismételünk egy kísérletet egy adott esemény bekövetkezéséig, és a kísérlet k-szor sikertelen volt, az nincs hatással arra, hogy ezután még hányszor kell azt elvégezni a következő sikerig.

Geometriai eloszlás

Ezt írja le formálisan a következő állítás:

Állítás. Legyen $X \sim Geo(p)$ valószínűségi változó. Legyen továbbá $k, n \in \mathbb{N}^+$, ekkor

$$\mathbb{P}(X > k + n \mid X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$

Definíció. Az X valószínűségi változót *örökifjúnak* nevezzük az $\mathbb{N}^+$ halmazon, amennyiben $\operatorname{ran} X = \mathbb{N}^+$, és a fenti egyenlet teljesül X-re minden $k, n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Tehát egy geometriai eloszlású valószínűségű változó örökifjú az $\mathbb{N}^+$ halmazon.

Az előző érvelés nem egy precíz indoklás, így az előző állítás még bizonyításra szorul:

Geometriai eloszlás

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathbb{P}(X > k + n \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(\{X > k + n\} \cap \{X > k\})}{\mathbb{P}(X > k)}.$$

Mivel $n > 0$, így minden egyes kimenetel esetén, amelyre $X > k + n$ teljesül, $k + n > k$ miatt egyben $X > k$ is igaz, azaz

$$\{X > k + n\} \subset \{X > k\},$$

ezért

$$\{X > k + n\} \cap \{X > k\} = \{X > k + n\}.$$

Geometriai eloszlás

Bizonyítás. Tehát

$$\mathbb{P}(X > k + n \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > k + n)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{1 - \mathbb{P}(\{X \le k + n\})}{1 - \mathbb{P}(X \le k)}$$

$$= \frac{1 - \sum_{i=1}^{k+n} f_X(i)}{1 - \sum_{j=1}^{k} f_X(j)}.$$

A fenti egyenlőség jobb oldala mutatja, hogy a bal oldalon álló feltételes valószínűség kizárólag az X eloszlásától, vagyis az $f_X(k)$ súlyoktól függ.

Trükk: elegendő egy konkrét (de tetszőleges), p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó esetén kiszámolni ezt az értéket!

Geometriai eloszlás

Bizonyítás. Legyen X a szükséges kísérletek száma egy olyan kísérletsorozatban, melyben egymástól függetlenül ismételjük a kísérleteket, és egy p valószínűségű esemény első bekövetkezésére várunk.

A fenti példában láttuk, hogy $X \sim Geo(p)$ teljesül.

Geometriai eloszlás

Bizonyítás. Láttuk, hogy

$$\mathbb{P}(X > k + n \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > k + n)}{\mathbb{P}(X > k)}.$$

Pontosan akkor végzünk több, mint k kísérletet, ha az első k kísérlet sikertelen volt, azaz

$$\mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k,$$

és hasonlóképp

$$\mathbb{P}(X > k + n) = (1 - p)^{k+n},$$

így tehát

$$\mathbb{P}(X > k + n \mid X > k) = \frac{(1 - p)^{k+n}}{(1 - p)^k} = (1 - p)^n = \mathbb{P}(X > n).$$

Geometriai eloszlás

A fenti állításnak valójában a megfordítása is igaz, tehát az örökifú eloszlások az $\mathbb{N}^+$ halmazon pontosan a geometriai eloszlások:

Tétel. Ha egy X valószínűségi változó örökifjú az $\mathbb{N}^+$ halmazon, akkor $X \sim Geo(p)$ teljesül valamilyen $p \in (0; 1)$ számra.

A súlyfüggvény jellemzése

Tekintsünk egy tetszőleges $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót.

- Ha t végigfut az X értékkészletén, akkor az $\{X = t\}$ páronként diszjunkt események uniója éppen a teljes Ω eseménytér, mert minden $\omega \in \Omega$-ra felveszi X valamelyik $t \in \operatorname{ran} X$ értéket.
- Azaz ezek az események teljes eseményrendszert alkotnak.
- Speciálisan az $f_X(t) = \mathbb{P}(X = t)$ valószínűségek összege, amint t végigfut a $\operatorname{ran} X$ halmazon, szükségképpen az Ω biztos esemény valószínűsége, azaz 1.

A súlyfüggvény jellemzése

Állítás. Ha X egy diszkrét valószínűségi változó, f_X pedig a hozzá tartozó súlyfüggvény, akkor

$$\sum_{t \in \operatorname{ran} X} f_X(t) = 1.$$

Leellenőrizzük ezt a binomiális és geometriai eloszlások esetén (binyítani nem kell, hiszen konkrét változók eloszlását leírva kaptuk ezeket).

A súlyfüggvény jellemzése

Legyen $X \sim Bin(n; p)$, ekkor tehát

$$\sum_{k=0}^{n} f_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

A jobb oldal a binomiális tétel miatt nem más, mint

$$[p + (1-p)]^n = 1^n = 1.$$

A súlyfüggvény jellemzése

Egy $Y \sim Geo(p)$ geometriai eloszlású valószínűségi változó esetén a fenti egyenlőség egy geometriai sor összegzéséből adódik (innen az eloszlás neve):

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_Y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

A súlyfüggvény jellemzése

Az állításban szereplő

$$\sum_{t \in \mathrm{ran}\, X} f_X(t) = 1.$$

egyenlőség valójában pontosan karakterizálja a súlyfüggvényt.

Azaz, hogy ha $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ olyan $[0;1]$-beli számok egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen sorozata, melyek összege 1, akkor megadható olyan X diszkrét valószínűségi változó, amelyre $f_X(k) = p_k$ minden k-ra.

Műveletek valószínűségi változók között

A valós számokon értelmezett műveletek, azaz az összeadás, kivonás, szorzás és osztás segítségével két változóból újabbakat készíthetünk:

Definíció. Legyenek $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ugyanazon eseménytéren értelmezett diszkrét valószínűségi változók. Ekkor

- $X + Y : \Omega \to \mathbb{R}$ az a diszkrét valószínűségi változó, amely minden $\omega \in \Omega$ esetén az $X(\omega) + Y(\omega)$ értéket veszi fel,
- $X \cdot Y : \Omega \to \mathbb{R}$ az a diszkrét valószínűségi változó, amely minden $\omega \in \Omega$ esetén az $X(\omega) \cdot Y(\omega)$ értéket veszi fel,
- ha $Y(\omega) \neq 0$ teljesül minden $\omega \in \Omega$-ra, akkor $X/Y : \Omega \to \mathbb{R}$ az a diszkrét valószínűségi változó, amely minden $\omega \in \Omega$ esetén az $X(\omega)/Y(\omega)$ értéket veszi fel.

Műveletek valószínűségi változók között

Példa. Dobjunk kétszer egy szabályos kockával. Legyen X az első, míg Y a második dobás eredménye, ekkor az $X+Y$ valszínűségi változó értéke a dobások értékének összege. Mi $X+Y$ eloszlása?

Az összeg lehetséges értékei az 2 és 12 közötti egész értékek.

A 2 és 12 kizárólag csak úgy adódhat, ha két darab egyest ill. két darab hatost dobunk, ezen események valószínűsége pedig $\frac{1}{36}$:

$$f_{X+Y}(2) = \mathbb{P}(X+Y=2) = \frac{1}{36} = f_{X+Y}(12) = \mathbb{P}(X+Y=12).$$

A 3 érték kétféleképp is adódhat összegként: $3 = 1+2 = 2+1$. Ezek különböző előállítások, mert a dobások sorrendjét is figyelembe vesszük.
Ugyanez érvényes a 11-re is: $11 = 5+6 = 6+5$, tehát

$$f_{X+Y}(3) = f_{X+Y}(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Műveletek valószínűségi változók között

Példa. Hasonló módon megvizsgálva a lehetséges előállítások számát, a következő valószínűségeket kapjuk a további értékekre:

$$f_{X+Y}(4) = f_{X+Y}(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

$$f_{X+Y}(5) = f_{X+Y}(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$f_{X+Y}(6) = f_{X+Y}(8) = \frac{5}{36},$$

$$f_{X+Y}(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Műveletek valószínűségi változók között

Példa. Legyen X egy n független kísérletből álló kísérletsorozatban egy adott p valószínűségű esemény bekövetkezéseinek száma.
Ekkor $X \sim Bin(n; p)$.

Legyen A_i az az esemény, hogy az i-edik kísérletnél bekövetkezik a vizsgált esemény. Ekkor X előáll, mint az A_i-k indikátorváltozóinak összege:

$$X = \mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n},$$

hiszen $X = k$ éppen akkor teljesül, ha pontosan k következik be az A_i események közül, azaz ha az azokhoz tartozó k indikátor az 1, a többi pedig a 0 értéket veszi fel.

Műveletek valószínűségi változók között

Példa. Általában, ha $A_1, \ldots, A_n$ egy valószínűségi mező tetszőleges együttesen független eseményei, melyekre $\mathbb{P}(A_i) = p$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$-re, akkor könnyen látható, hogy az

$$\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$$

összeg azt adja meg, hogy a fenti eseményekből hány darab következik be, és ennek eloszlása binomiális, méghozzá az n és p paraméterekkel.