ANALÍZIS(2) — **II. ZÁRTHELYI megoldása** — **2002. április 18.**

Műszaki Informatika szak — A kurzus — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát, majd adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen a konvergencia egyenletes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{(x+5)^n}{n!} = \sum_{1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$a_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \quad ; \quad x_0 = -5$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{e} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\, n^n} =$$

$$= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{e} = 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 1$$

$-6 \quad -5 \quad -4$

Pl. $I = [-5.5, 5] \subset (-6, -4) = (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow$ a konv. egyenletes I-n

2. feladat (16 pont)

$$f(x) = e^{-x^3}, \qquad g(x) = \sin(3x^2)$$

a) Írja fel az f és g függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorainak első négy nem nulla tagját! Adja meg e sorok konvergencia tartományait!

b) Az integranduszt hatodfokú Taylor polinomjával közelítve számítsa ki az $\int_0^{0.1} e^{-x^3}\,dx$ integrál értékét közelítően! Adjon becslést azt elkövetett hibára!

c) A számláló és a nevező megfelelő Taylor sorfejtése segítségével oldja meg:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^3} + x^3 - 1}{x^4 \sin(3x^2)} = ?$$

a.) $e^u = \sum_0^\infty \frac{u^n}{n!}$; $u \in \mathbb{R}$ és $\sin u = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$; $u \in \mathbb{R}$

$$e^{-x^3} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} = \boxed{\underbrace{1 - x^3 + \frac{x^6}{2!}}_{T_6(x)}} - \frac{x^9}{3!} + \dots \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(3x^2) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-1} x^{4n-2}}{(2n-1)!} =$$

$$= 3x^2 - \frac{3^3 x^6}{3!} + \frac{3^5 x^{10}}{5!} - \frac{3^7 x^{14}}{7!} + \dots \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

b.) $I = \int_0^{0{,}1} (1 - x^3 + \dots)\,dx = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{2!\,7} - \frac{x^{10}}{3!\,10} + \dots \Big|_0^{0{,}1} =$

$$= \underbrace{0{,}1 - \frac{0{,}1^4}{4} + \frac{0{,}1^7}{2!\,7}}_{:= a} - \frac{0{,}1^{10}}{3!\,10} + \dots \approx a$$

$|H| < \frac{0{,}1^{10}}{3!\,10}$, mivel Leibniz sor

c.) $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \dots}{3x^6 - \frac{3^3 x^{10}}{3!} + \dots} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6} \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots}{3 - \frac{3^3 x^4}{3!} + \dots} = \frac{\frac{1}{2!}}{3} = \frac{1}{6}$$

22020418/A/2

3. feladat (15 pont)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (3k-1)\, x^{3k-2}$$

a) Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (3k-1)\, 3^{3k} = ?\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-1}{3^{3k-2}} = ?$

a.) $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (3k-1)\, x^{3k-2}\,, \qquad x \in (-R, R)$

$s(x) = \left(\int_0^x s(x)\, dx \right)' = \frac{d}{dx} \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (3k-1) x^{3k-2}\, dx =$

$= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} (3k-1) \frac{x^{3k-1}}{3k-1} \Big|_0^x = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^{3k-1} = \left(\frac{x^2}{1-x^3} \right)'$

$R=1$, mert geom. sor

$s(x) = \frac{2x(1-x^3) - x^2(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{2x + x^4}{(1-x^3)^2}$

$R=1$ most is. A végpontokat az eredeti sornál kell ellenőrizni

$x = \pm 1$: $\sum_{}^{\infty} (3k-1)(\pm 1)^{3k-2}$ div., mert az általános tag abs. értékben $\not\to 0$ $(\to \infty)$

KT: $(-1, 1)$

b.) $\sum_1^{\infty} (3k-1)\, 3^{3k}$: $s(3)$-mal lenne kapcsolatban, de $x=3$-nál a sor nem konv.

$\sum_1^{\infty} \frac{3k-1}{3^{3k-2}} = \sum_1^{\infty} (3k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{3k-2} = s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2}$

4. feladat (12 pont)

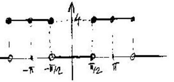
Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ)!

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \\ 0, & \text{ha } x \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\phi(x) = ?$

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \; ; \; b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$



f páros $\Rightarrow$ $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 4 \, dx = \frac{2}{\pi} 4 \frac{\pi}{2} = 4$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos kx}_{\text{páros}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4 \cos kx \, dx = \frac{8}{\pi} \left. \frac{\sin kx}{k} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{8}{\pi k} \left(0 - \sin k\frac{\pi}{2} \right)$$

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k = 2l \\ -\frac{8}{\pi k}, & \text{ha } k = 4l-3 \\ \frac{8}{\pi k}, & \text{ha } k = 4l-1 \end{cases}$$

$$\phi(x) = \underbrace{2}_{\frac{a_0}{2}} + \frac{8}{\pi} \left(-\cos x + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} - \dots \right)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2, & \text{ha } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

A14
22020418/BM.

5. feladat (17 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Folytonos-e, totálisan deriválható-e az f függvény az origóban?

b) $f'_y(0,0)=?$, $\quad f'_y(x,y)=?$, $\quad f'_y(\sqrt{\pi/2}\,,1)=?$

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(\sqrt{\pi/2},1)}=?$, ha $\underline{e}=[0,1]$

a.) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1\neq f(0,0)=0$

$\Rightarrow$ f nem folyt. (0,0)-ban. $\Rightarrow$ nem deriválható (0,0)-ban

Vagy pl. $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\dfrac{1}{1+m^2}=\dfrac{1}{1+m^2}$

Mivel függ m-től $\Rightarrow$ $\nexists$ a hé. $\Rightarrow$ f nem folyt. (0,0)-ban

b.) $f_y'(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0-0}{k}=0$

$f_y'(x,y)=\sin x^2\,\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$, ha $(x,y)\neq(0,0)$

$f_y'(\sqrt{\frac{\pi}{2}},1)=\dfrac{-2}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}$

Az iránymenti derivált definíciójából következik, hogy ha $\underline{e}=+\underline{j}$, akkor $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(\sqrt{\pi/2},1)}=f_y'(\sqrt{\pi/2},1)$,

tehát $\dfrac{df}{d\underline{e}}(\sqrt{\pi/2},1)=\dfrac{-2}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}$

22020448/A/5

6. feladat (13 pont)

a) Írja le az n-változós függvény totális deriválhatóságának definícióját az értelmezési tartomány $\underline{x}_0$ belső pontjában! $\operatorname{grad} f(\underline{x}_0) = ?$

b) Totálisan differenciálható-e az $f(x,y,z) = x\,y^2\,z^4$ függvény?
$\operatorname{grad} f(P) = ?$, ha $P = (-1, 2, 1)$

c) Írja fel az f függvény P-n átmenő szintfelülete P-beli érintő síkjának az egyenletét!

a) L. Jegyzet!

b) $f_x' = y^2 z^4$; $f_y' = x\,2y\,z^4$; $f_z' = x y^2 4 z^3$: mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow f$ mindenütt totálisan deriválható

$\operatorname{grad} f(P) = f_x'(P)\,\underline{i} + f_y'(P)\,\underline{j} + f_z'(P)\,\underline{k} = 4\,\underline{i} - 4\underline{j} - 16\,\underline{k}$

c) $\underline{n} \doteq \operatorname{grad} f(P)$ miatt

$4(x-(-1)) - 4(y-2) - 16(z-1) = 0$

7. feladat (10 pont)

$$g(x,y) = f\left(\frac{2y}{x+1}\right), \qquad f \in C^2_{\mathbb{R}} \quad \text{(egyváltozós)}$$

a) $g'_x = ?$, $g'_y = ?$, $g''_{xx} = ?$

b) Az f függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó másodrendű Taylor polinomja:

$$T_2(x) = 3 + 4x + 7x^2$$

$f'(0) = ?$, $f''(0) = ?$, $g'_y(0,0) = ?$, $g''_{xx}(0,0) = ?$

a) $g'_x = f'\left(\frac{2y}{x+1}\right)(-1)\frac{2y}{(x+1)^2}$

$g'_y = f'\left(\frac{2y}{x+1}\right)\frac{2}{x+1}$

$g''_{xx} = f''\left(\frac{2y}{x+1}\right)\frac{-2y}{(x+1)^2}\frac{-2y}{(x+1)^2} + f'\left(\frac{2y}{x+1}\right)(-2y)\frac{-2}{(x+1)^3}$

b.) $f'(0) = 4$, $\frac{f''(0)}{2!} = 7 \rightarrow f''(0) = 14$

$g'_y(0,0) = f'(0) \cdot 2 = 8$

$g''_{xx}(0,0) = f''(0) \cdot 0 + f'(0) \cdot 0 = 0$

8. feladat (10 pont)

Határozza meg az $f(x,y)=e^{x^2+y^2-xy}$ lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!

$f'_x = e^{x^2+y^2-xy}\,(2x-y)=0$

$f'_y = e^{x^2+y^2-xy}\,(2y-x)=0$. $x=0$ és $y=0$ itt lehet lok. szé.

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x^2+y^2-xy}(2x-y)^2+e^{x^2+y^2-xy}\cdot 2 & e^{\cdots}(2y-x)(2x-y)+e^{\cdots}(-1) \\ \text{u.a.} & e^{\cdots}(2y-x)^2+e^{\cdots}\cdot 2\end{vmatrix}$$

$$D(0,0)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3>0$$ és $f''_{xx}(0,0)=2>0$, tehát lokális minimum van $(0,0)$-ban

---

Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

$$f(x)=(1+x)^{-1/3}\,, \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+5x^4}}$$

a) Írja fel az f és g függvény $x_0=0$ körüli Taylor sorait és adja meg a sorok konvergenciasugarait!

b) $g^{(16)}(0)=?\,,\qquad g^{(17)}(0)=?$

A sorfejtésből adjon választ!

a.) $(1+x)^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}x^n \qquad R=1$

$g(x)=(1+5x^4)^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}5^n x^{4n} \qquad |5x^4|<1 \quad |x|<\frac{1}{\sqrt[4]{5}}=R$

$a_n=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ miatt

$g^{(16)}(0)=16!\,a_{16}=\binom{-\frac{1}{3}}{4}5^4\cdot 16!$

$g^{(17)}(0)=17!\,a_{17}=0$

z2020418 | A8.