ANALÍZIS(1) **I. ZÁRTHELYI** **2001. október 11.**

Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (8 pont)

A megfelelő definíció alkalmazásával bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{4n^2+4} = \frac{3}{4} \qquad\qquad N(\varepsilon) = ?$$

Megoldás:

$$|a_n - A| = \left|\frac{3n^2-2}{4n^2+4} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{-5}{4n^2+4}\right| = \frac{5}{4n^2+4} < \varepsilon$$

$$\longrightarrow \quad n > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 4} \qquad\qquad N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 4}\right]$$

2. feladat (16 pont)

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^7+n^2+8}{n^3+2}}\,, \qquad\qquad b_n = \sqrt{n^4+5n^2} - \sqrt{n^4+2n-1}$$

Megoldás:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{3}\,\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^3+2n^3}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^7+n^2+8}{n^3+2}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^7+n^7+8n^7}{1}} = \underbrace{\sqrt[n]{10}\,\left(\sqrt[n]{n}\right)^7}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

$$b_n = \frac{n^4+5n^2-(n^4+2n-1)}{\sqrt{n^4+5n^2}\ +\ \sqrt{n^4+2n-1}} = \frac{5n^2-2n+1}{\sqrt{n^4+5n^2}\ +\ \sqrt{n^4+2n-1}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{n^4}}}_{=\frac{n^2}{n^2}=1} \quad \frac{5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}} \quad \to \quad \frac{5}{2}$$

3. feladat (14 pont)

a) Adjon elégséges feltételt számsorozat konvergenciájára!

b) $a_1 = 4; \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+15}{8} \qquad n = 1, 2, \ldots$

$(a_n) = (4,\ 3.875,\ 3.63, \ldots)$

Mutassa meg, hogy a számsorozat konvergens, és adja meg a határértékét!

Megoldás:

a) Ha egy számsorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

b) a_n alulról korlátos, hiszen $a_n > 0$.
Másrészt az a sejtésünk, hogy $a_n \searrow$
Bizonyítás: teljes indukcióval

1. $a_1 > a_2 > a_3$
2. Tfh. $a_{n-1} > a_n$
3. Igaz-e: $a_n > a_{n+1}$?
   2. miatt ($a_n > 0$ miatt szabad négyzetre emelni) :

$$\begin{aligned} a_{n-1}^2 &> 2a_n^2 \\ a_{n-1}^2+15 &> a_n^2+15 \\ a_n = \frac{a_{n-1}^2+15}{8} &> \frac{a_n^2+15}{8} = a_{n+1} \end{aligned}$$

Tehát $(a_n) \searrow$ és (a_n) alulról korlátos $\implies$ (a_n) konvergens.
A határérték kielégíti a rekurzív formulát:

$$A = \frac{A^2+15}{8} \quad \Longrightarrow \quad A^2-8A+15=0 \quad \Longrightarrow \quad A_{1;2} = 3;5$$

Tehát $A = 3$.

4. feladat (16 pont)

$\overline{\lim}\, a_n = ?\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = ?\,, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

a) $a_n = \dfrac{n^5 - n^5 \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{2n^5 + n^2 + 3}$

b) $a_n = \dfrac{5^n + (-1)^n\, n}{3^{2n} + 3^n}$

Megoldás:

a) n értékétől függően három részsorozat viselkedését kell vizsgálnunk.

Ha $n = 2m+1$: $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, ezért a kapott részsorozat:

$$a_n = \frac{n^5}{2n^5 + n^2 + 3} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^5}} \;\to\; \frac{1}{2}$$

Ha $n = 4m$: $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, ekkor a részsorozat:

$$a_n = 0 \;\to\; 0$$

Ha $n = 4m+2$: $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, így a részsorozat:

$$a_n = \frac{2n^5}{2n^5 + n^2 + 3} = \frac{2}{2 + \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^5}} \;\to\; 1$$

Tehát a torlódási pontok halmaza: $S = \{0\,,\ \dfrac{1}{2}\,,\ 1\}$

Így $\overline{\lim}\, a_n = 1\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = 0\,, \qquad \lim \nexists$, hiszen több torlódási pont van

b) $a_n = \dfrac{\left(\dfrac{5}{9}\right)^n + n\left(\dfrac{-1}{9}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n} \quad \to \quad 0$

Így $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\, a^n = 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{N}$

5. feladat (10 pont)

a) Írja fel a hányadoskritérium két alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)\,5^n}{(n+1)!}$$

Megoldás:

a) L. Segédlet!

b) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-1)\,5^{n+1}\,(n+1)!}{(n+2)!\,(n-2)\,5^n} = \frac{5\,(n-1)}{(n+2)\,(n-2)} = \frac{5\,(n-1)}{n^2-4} =$$

$$= \frac{1}{n}\;\frac{5\,(1-\frac{1}{n})}{1-\frac{4}{n^2}} \;\to\; 0\cdot 5 = 0 < 1 \quad\Longrightarrow\quad \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

6. feladat (20 pont)

Abszolut illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n^2+1}{3n^2+4}\right)^{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n^2+1}{3n^2+4}\right)^{n^3}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+5}$

Megoldás:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$|a_n| = \frac{\left(1+\frac{1/3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{4/3}{n^2}\right)^{n^2}} \quad\to\quad \frac{\mathrm{e}^{1/3}}{\mathrm{e}^{4/3}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ divergens a sor, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2+4}\right)^{n^2} \quad \to \quad \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

$\Longrightarrow$ a sor abszolut konvergens.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, c_n$

A sor nem abszolut konvergens, mert

$$c_n = \frac{n}{n^2+5} \geq \frac{n}{n^2+5n^2} = \frac{1}{6n} \qquad \text{és} \quad \frac{1}{6}\sum^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{divergens.}$$

A sor feltételesen konvergens, mert Leibniz típusú. Ugyanis

$$c_n = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n^2}} \quad \to \quad 0$$

És $c_n \searrow$:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &< c_n \\ \frac{n+1}{(n+1)^2+5} &< \frac{n}{n^2+5} \\ (n+1)\,(n^2+5) &< n\,(n^2+2n+6) \\ 0 &< n^2+n-5 \qquad \text{Ez pedig igaz, ha } n \geq 2\,. \end{aligned}$$

7. feladat (16 pont)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^{2n-2}} = ?$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+2^{2n-2}}$

Mutassa meg, hogy a sor konvergens! Adjon becslést az $s \approx s_{10}$ közelítéshez!

Megoldás:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^{2n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot 2^n + 3\cdot 3^n}{\frac{1}{4}\cdot 4^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n =$$

$$= 2\,\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + 12\,\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 38$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$b_n = \dfrac{3 \cdot 3^n}{2 \cdot 2^n + \frac{1}{4} \cdot 4^n} < \dfrac{3 \cdot 3^n}{\frac{1}{4} \cdot 4^n} = 12 \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ és $12 \displaystyle\sum^{\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor $(q = \dfrac{3}{4})$ $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum^{\infty} b_n$ konvergens.

Az előző majorálás segítségével becsülhetjük a hibát is.

$$s \approx s_{10} : \quad 0 < H = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{n+1} + 2^{2n-2}} < \sum_{n=11}^{\infty} 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 12 \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{11}}{1 - \frac{3}{4}}$$