ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

**VIZSGADOLGOZAT $\beta$ változat**

**2009. jan. 8.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

**1. feladat (11 pont)**

a) Definiálja a következő fogalmat!

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -5$$

b) Mondja ki a számsorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

c) Fogalmazza meg a valós egyváltozós függvényekre vonatkozó Weierstrass I. és Weierstrass II. tételeket!

*Megoldás:*

3 a.) $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ P(\varepsilon)>0$: $|f(x)+5|<\varepsilon$, ha $x>P(\varepsilon)$

3 b.) Az $(a_n)$ számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ M(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $|a_m-a_n|<\varepsilon$, ha $n,m>M(\varepsilon)$

c.) W. I.:
Ha $f$ folytonos $[a,b]$-n, akkor ott $f$ korlátos. 2

W. II.:
Ha $f$ folytonos $[a,b]$-n, akkor ott felveszi infimumát és szuprémumát. Tehát van minimuma és maximuma.
3

**2. feladat (8 pont)**

$$a_n = \frac{(-4)^n+3^{n-1}}{7+2^{2n+1}}, \qquad \overline{\lim}\, a_n = ?, \qquad \underline{\lim}\, a_n = ?, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

*Megoldás:*

Ha $n$ páros: $a_n=\dfrac{4^n+\frac{1}{3}\cdot 3^n}{7+2\cdot 4^n}=\dfrac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{7\left(\frac{1}{4}\right)^n+2}\longrightarrow\dfrac{1+0}{0+2}=\dfrac{1}{2}$

Ha $n$ páratlan: $a_n=\dfrac{-4^n+\frac{1}{3}\cdot 3^n}{7+2\cdot 4^n}=\dfrac{-1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{7\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+2}\longrightarrow\dfrac{-1+0}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$

$\overline{\lim}\, a_n=\frac{1}{2}$; $\underline{\lim}\, a_n=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \nexists$, mert több torlódási pont van.

an1v 090108B/1

**3. feladat (17 pont)**

$$f(x) = \begin{cases} -2x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2}, & \text{ha} \quad x \neq 2 \\ -4, & \text{ha} \quad x = 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = ?\,;\quad \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = ?\,;\quad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$, ha $x \in \mathbb{R}$

c) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az $f$ függvény

- szigorúan monoton,
- alulról konvex vagy alulról konkáv!

Indokoljon!

*Megoldás:*

a)

$\boxed{5}$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 2+0} \Big(-2x + \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\downarrow\, +\infty}\Big) = -4 + \frac{\pi}{2}$$

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} \Big(-2x + \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\downarrow\, -\infty}\Big) = -4 - \frac{\pi}{2}$$

$$f(2-0) \neq f(2+0) \implies \lim_{x\to 2} f(x) \nexists$$

b) $f'(2) \nexists$, mert a függvény nem folytonos $x = 2$-ben, mivel nem létezik a pontban a
$\boxed{4}$ határérték. 1

Ha $x \neq 2$, akkor $f$ differenciálható, mert differenciálható függvények összetétele és

$$f'(x) = -2 + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^2} \; \frac{-1}{(x-2)^2} = -2 - \frac{1}{(x-2)^2 + 1}$$

3

c) $f$ szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 2)$ és az $(2, \infty)$ intervallumokon, mivel itt
$\boxed{8}$ $f'(x) < 0$. 3

$$f''(x) = \frac{2\,(x-2)}{\left((x-2)^2 + 1\right)^2}$$

3

$f$ alulról konkáv $(-\infty, 2)$ - en, mert itt $f''(x) < 0$
$f$ alulról konvex $(2, \infty)$ - en, mert itt $f''(x) > 0$
} 2

**4. feladat (10 pont)**

a) Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!
Szemléltesse ábrával a tétel tartalmát!

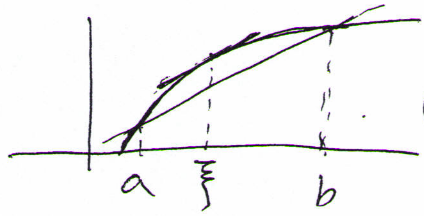
b) Mit állíthatunk $f$-ről, ha folytonos $[a, b]$-n és $f'(x) \equiv 0$ $(a, b)$-n?
Állítását bizonyítsa be!

*Megoldás:*

an1v-090108B/2.

a.) T Ha $f$ folytonos $[a,b]$-n és differenciálható $(a,b)$-n, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$ : 2

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$




2

b.)

T $\boxed{\text{Ha } f \text{ folytonos } [a,b]\text{-n, differenciálható } (a,b)\text{-n és ott } f'(x) \equiv 0, \text{ akkor } f(x) \equiv c \quad x \in [a,b]\text{-re}}$

B A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\forall\, [x_1, x_2] \subset [a,b]$-re $\exists\ \xi \in (x_1, x_2)$ :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \qquad \xi \in (a,b)$$

De mivel $f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2$-re $\implies f(x) \equiv$ konst.

■

**5. feladat (8+6=14 pont)**

a) Adjon szükséges feltételt lokális szélsőérték létezésére differenciálható függvénynél az értelmezési tartomány belső pontjában! Állítását bizonyítsa be!

b) Van-e lokális szélsőértéke az $f(x) = 4x + \operatorname{sh}(x-1)^3$ függvénynek?

*Megoldás:*

a) T Ha $f$ a $c$ helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$. $(K_{c,\delta} \subset D_f)$ 2

B Pl. lokális maximumra:

$$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$$

6

$\implies \quad f'(c) = 0 \quad$ (vízszintes érintő)

b) $f'(x) = 4 + \operatorname{ch}(x-1)^3 \cdot (3\,(x-1)^2) \ \geq\ 4 > 0 \implies f$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, tehát nincs lokális szélsőértéke. 2

4

an1v-090108B/3.

**6. feladat (14 pont)***

$$x(t) = \mathrm{e}^{3t} + t^5\,, \qquad y(t) = \frac{t+2}{t^2+6}$$

a) $\dot{x}(t) = ?\,, \quad \dot{y}(t) = ?$

b) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű $x_0$ pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

c) Írja fel a görbe $t_0 = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordinátákkal!

*Megoldás:*

a.) $\dot{x}(t) = 3e^{3t} + 5t^4$ 2

$\dot{y}(t) = \dfrac{t^2+6-(t+2)\cdot 2t}{(t^2+6)^2}$ 2

b.) $\dot{x}(t) > 0 \Rightarrow x(t)$ szigorúan monoton nő $\Rightarrow \exists$ inverze: $t = t(x)$

$\boxed{4}$ $\Rightarrow \exists\ y = f(x)$ megadása a görbének: $f(x) = y(t(x))$

c.) $y_e = y(t_0) + \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0))$ 3 $= y(0) + \dfrac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}(x - x(0)) \Rightarrow$

$y_e = \frac{1}{3} + \dfrac{1/6}{3}(x-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}(x-1)$

3

**7. feladat (11 pont)***

a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{4x}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x = ?$

*Megoldás:*

a) $\boxed{4}$ $$\int \frac{1}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C$$

b) $\boxed{3}$ $$\int \frac{4x^2}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(4x^2+8)-8}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - 8\int \frac{1}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x - 8\,\frac{\sqrt{2}}{8}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

(Felhasználtuk az a) feladat megoldását.)

c) $\boxed{4}$ $$\int \frac{4x}{4x^2+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{8x}{4x^2+8}}_{\frac{f'}{f}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(4x^2+8) + C$$

an1v-090108B/4.

**8. feladat (7+8=15 pont)***

a) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = ?$

b) $\displaystyle\int \arcsin(2x)\, dx = ?$

*Megoldás:*

a.) Improprius integrál:

$$\lim_{\delta\to+0} \int_{1/2}^{1-\delta} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}_{f' f^1}\, dx = \lim_{\delta\to+0} \frac{\arcsin^2 x}{2}\Big|_{1/2}^{1-\delta} =$$

1 3

$$= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to+0}\left(\arcsin^2(1-\delta) - \arcsin^2\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right) \quad 3$$

b.) $\displaystyle\int 1\cdot\arcsin 2x\, dx = x\cdot\arcsin x - \underbrace{\int\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx}$ $=$ 2

$u' = 1 \quad v = \arcsin 2x$

$u = x \quad v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2$ 2

$$-\frac{1}{4}\int \underbrace{-8x}_{f'}\underbrace{(1-4x^2)^{-1/2}}_{f^{-1/2}}\,dx$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{1-4x^2}}{\frac{1}{2}} + C$$

3 1

---

*Pótfeladat (csak az elégséges és közepes vizsgához javítjuk ki):*

**9. feladat (12 pont)**

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3} - \sqrt{4x^2-5x}\right) = ?$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^3)}{\operatorname{arctg}(5x^3)} = ?$

*Megoldás:*

a.) $\boxed{6}$

$$\left(\sqrt{4x^2+3} - \sqrt{4x^2-5x}\right)\frac{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-5x}}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-5x}} = \frac{\overbrace{4x^2+3-(4x^2-5x)}^{5x+3}}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-5x}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2}}\;\frac{5+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{5}{x}}} \longrightarrow \frac{5+0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}} = \frac{5}{4}$$

$$= \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

b) $\boxed{6}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^3}{\underset{\frac{0}{0}}{\operatorname{arctg} 5x^3}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x^3\cdot 6\,x^2}{\frac{1}{1+(5x^3)^2}\cdot 15\cdot x^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$=1$

an1v-090108B/5.

**10. feladat (8 pont)**

$$\int \frac{7x - 13}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x = ?$$

*Megoldás:*

$$\frac{7x-13}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \qquad 2$$

$$7x - 13 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$x = -1: \quad -20 = B(-4) \Rightarrow B = 5$$

$$x = 3 \quad\;\; 8 = 4A \Rightarrow A = 2 \qquad \Big\} \; 3$$

$$J = \int \left(2\frac{1}{x-3} + 5\frac{1}{x+1}\right) dx = 2\ln|x-3| + 5\ln|x+1| + C$$

3

an1u-090108B/6.