$\boxed{1}$ $X \sim E(0, \frac{1}{2})$, $Y = \frac{1}{X}$

(a) X [illegible] : $F(x) = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$, $0 < x < \frac{1}{2}$

$2 < y$ [illegible]

$$G(y) = P(Y < y) = P(\frac{1}{X} < y) = P(X > \frac{1}{y}) = 1 - F(\frac{1}{y}) = 1 - \frac{2}{y}$$

(b) $\frac{1}{2} = G(h) = 1 - \frac{2}{h} \Rightarrow \boxed{h = 4}$

$\boxed{2}$ (a) $X \sim \exp(\lambda)$, $\frac{1}{\lambda} = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$P(X > 5 \mid X > 4) \overset{\text{[illegible]}}{=} P(X > 1) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3}}) = e^{-\frac{1}{3}}$$

(b) $$P(X > 3 \mid X < 4) = \frac{P(3 < X < 4)}{P(X < 4)} = \frac{(1 - e^{-\frac{4}{3}}) - (1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{3}})}{1 - e^{-4 \cdot \frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{e^{-1} - e^{-\frac{4}{3}}}{1 - e^{-\frac{4}{3}}}$$

$\boxed{3}$ (a) $X \sim N(m, 6)$

$$0{,}18 = P(X < 0) = \Phi(-\frac{m}{6}) = 1 - \Phi(\frac{m}{6}) \Rightarrow \Phi(\frac{m}{6}) = 0{,}82$$

$$0{,}14 = P(X > 10) = 1 - \Phi(\frac{10-m}{6})$$

$\Downarrow$

$\frac{m}{6} = 0{,}9 = \frac{9}{10}$

$\Downarrow$

$\frac{10-m}{6} = 1{,}1 = \frac{11}{10}$

$\frac{10-m}{m} = \frac{11}{9}$

$10 - m = \frac{11}{9} m$, $10 = \frac{20}{9} m \Rightarrow m = 4{,}5$

$\frac{4{,}5}{6} = \frac{9}{10}$

$6 = \frac{45}{9} = 5$

(b)

$$P(|X - E(X)| > 1) =$$

$$= 1 - P(3{,}5 < X < 5{,}5) = 1 - (\Phi(\frac{1}{5}) - \Phi(-\frac{1}{5})) = 2 - 2\Phi(\frac{1}{5}) = 2 - 1{,}16 = 0{,}84$$

(c) $$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} \sim N(4{,}5 ; 2{,}5)$$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} - E(X)\right| > 1\right) = 2 - 2\Phi(\frac{2}{5}) = 2 - 1{,}32 = 0{,}68$$

Második valószínűségszámítás zárthelyi, 2016-11-23, 18 óra, FEIADATOK ÉS PONTOZÁS

Minden feladat 5 pont.

1. Vezesse le egy 0 és 0.5 között folytonos egyenletes eloszlású random szám reciproka

   (a) eloszlásfüggvényének a képletét! *(A képlet érvényességi tartományát is meg kell adni!)*
   3 pont, ha jó a levezetés

   (b) Számolja ki a mediánját!
   1 pont

   (c) Magyarázza el **kísérleti eredményekkel megfogalmazva**, hogy mit jelent az, hogy a medián annyi, amennyi kijött! *(A magyarázat történhet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.)*
   1 pont

2. Tegyük fel, hogy egy alkatrész (években mért) élettartama exponenciális eloszlást követ, és hogy a várható értéke 3 év. Mi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen alkatrész

   (a) legalább 5 évig él, feltéve, hogy legalább 4 évig él?
   2 pont

   (b) legalább 3 évig él, feltéve, hogy legfeljebb 4 évig él?
   3 pont

3. Tegyük fel, hogy egy finn szigeten december elején a déli hőmérséklet normális eloszlást követ ismeretlen várható értékkel és szórással. Tudjuk, hogy 0.18 a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 0 °C alatt van, és 0.14 a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 10 °C felett van. *A lentebbi tábázat segítségével adja meg a válaszokat numerikusan!*

   (a) Mennyi a hőmérséklet szórása? *(Segítség: Állítson fel egyenleteket úgy, hogy azokból a szórást meg lehessen határozni!)*
   3 pont

   (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy hőmérséklet a várható értéktől 1 °C-nál többel eltér?
   1 pont

   (c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 4 független mérési eredményének az átlaga a várható értéktől 1 °C-nál többel eltér?
   1 pont

4. Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó

   (a) sűrűségfüggvénye a $(2, 3)$ pontban 0.3 -del egyenlő,
   3 pont

   (b) eloszlásfüggvénye a $(4, 5)$ pontban 0.4 -del egyenlő.
   2 pont

   Mit jelentenek ezek a tények? Magyarázza el a valószínűség fogalma segítségével!