IX. előadás 2010. XI. 23.

ZH-ra a mostani héttől már nem kell:
(folytonos idejű Markov-lánc nem lesz már)

Folytonos idejű Markov-láncok

Példa: M/M/1

A beérkezések exp időközönként (időközök hossza) jönnek, λ paraméterrel

~~A bee~~ Egy egység kiszolgálása exp. ideig tart μ paraméterrel: $Exp(\mu)$

$X(t)$ = ~~várakozó~~ a kiszolgálóban lévő csomagok száma t időben.

A kérdés: hogy fejlődik az $X(t)$ sztochasztikus folyamat? $t \geq 0$

Ugyan t időben valahány bent, illetve valahány kiszolgálódik. Úgy viselkedik, mint egy Markov-lánc, de a két ugrás közötti idő valamilyen valószínűségi változó
↓ a két ugrás között eltelő idő véletlen hosszú.

A következő csomag kiszolgálásáig $exp(\mu)$ időt kell várni, a kiszolgálásig $exp(\lambda)$. Amelyik nyer, oda kell ugrani.

Áll: Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ független, $Exp(\lambda_1)$, $Exp(\lambda_2)$, ..., $Exp(\lambda_n)$ eloszlású valószínűségi változók, akkor

(1) A győztes ideje (a minimum eloszlása)
↓
$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = Exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$$
↑
az egyedi paraméterek összege az új paraméter

(2) Annak a valószínűsége, hogy az i a nyertes:

$$P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = X_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

Biz (1):

$$P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \geq x) \underset{\uparrow}{=} P(X_1, X_2, \dots, X_n \geq x) =$$

a minimum definíciója.

minden valószínűségi változó $< x$.

$$\underset{\uparrow}{=} P(X_1 \geq x) \cdot P(X_2 \geq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \geq x) =$$

a függetlenség miatt

Tudjuk, hogy ha $Y \sim Exp(\lambda)$, akkor

$$P(Y > x) = e^{-\lambda x}$$

Ezt alkalmazva

$$= e^{-\lambda_1 x} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n x} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) x}$$

vagyis a minimum tényleg exp. eloszlású.

Annak a ~~fe~~ valószínűsége, hogy 1-gyel feljebb ugrik → a beérkező győz → valószínűsége $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

A következő ugrásig eltelő idő: $Exp(\lambda + \mu)$

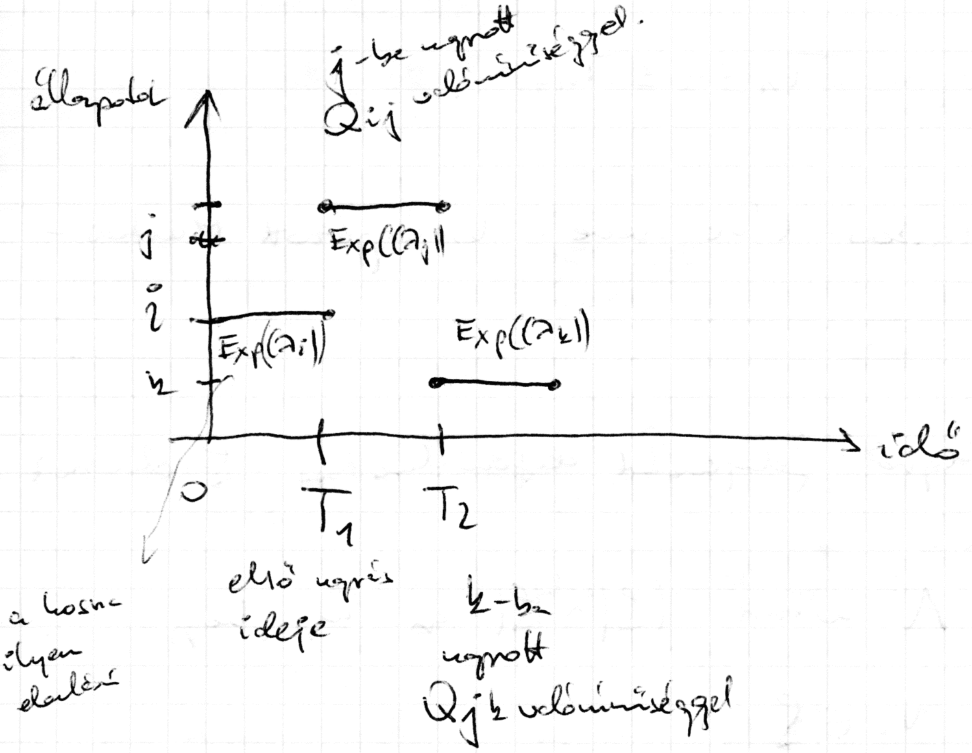
Folytonos idejű Markov-lánc

Def 1: ~~Adott egy Q átmenet-valószínűségmátrix,~~ ~~egy~~

Adott S elemeket állapotokat és ~~egy~~ (1) egy Q átmenet-~~valószínűségmátrix~~

S-en úgy, hogy $q_{ii} = 0$ $i \in S$ (nem ugorhat magába)

Adott (2) $\lambda(i)$, $i \in S$ tartózkodási idő paraméterek.



$\lambda(i)$: exponenciális idejig tartózkodik
Q: hova ugrik

Legyen $X_0, X_1, \dots$ az egymás utáni állapotok sorozata.
(Ez egy diszkrét idejű Markov-lánc, Q átmenet-valószínűségmátrixxal).

Az ugrásokat tehát egy Markov-lánc adja meg.

Legyen $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$ az egymás utáni ugrások idejei.

És T_1 eloszlása $Exp(\lambda(X_0))$ ← a kezdőállapot határozza meg

$T_2 - T_1 \sim Exp(\lambda(X_1))$

$\vdots$

$T_{n+1} - T_n \sim Exp(\lambda(X_n))$

Tegyük fel, hogy ezek függetlenek egymástól!
(Eddig egy fejlődést definiáltunk).

Ekkor az $\{X(t)\} = X = (X(t), t \geq 0)$ sztochasztikus folyamatot folytonos idejű Markov-lánc, ha

$X(t) = X_n$, ha $T_n \leq t \leq T_{n+1}$.

Az $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc neve: beágyazott Markov-lánc.

Def 2.: ~~Azokat~~ Ugró folyamatot definiálunk az S diszkrét
(részletes) állapottéren.

Adott egy Λ mátrix $|S| \times |S|$-en úgy, hogy

$$\Lambda_{ii} = 0 \quad \forall i \in S$$

Ha a ~~Markov-lánc~~ folyamat, amit definiálni szeretnék i-ben van, akkor $\forall j$ állapotban, ahol $\lambda_{ij} > 0$ elindítunk egy exponenciális órát: j-ben akkor csenget az óra, ha ez az exp hosszú eloszlás letelik. ($Exp(\lambda_{ij})$ idő múlva fog csengeni) Oda ugrik, ahol először csenget.

~~?~~ Annyi ideig várakozik (az ugrásig eltelő idő), ameddig a csengés ideje van.

Ha elugrott egy k állapotba, akkor ezt folytatjuk tovább.

Legyen $X(t)$ = t időben a folyamat pozíciója.
(az ugrásig ugyanabban a pozícióban marad)

$X(t)$, $t \geq 0$ akkor egy folytonos idejű Markov-lánc.

Áll: Az 1 és 2 definíció ekvivalensek.

↓

megfelelően választott ~~paraméterekkel~~ Q, $\lambda(i)$-kel és Λ-val az $(X(t), t \geq 0)$ eloszlása az 1. definíció szerint = $(X(t), t \geq 0)$ eloszlása a 2. defüggvény szerint.

Biz: Adott ~~[illegible]~~ Λ-hoz Q, $\lambda(i)$ a-k ezek

$$Q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sum_{k \in S} \lambda_{ik}}$$ a valószínűség, hogy átugrik

a győztes ideje: $\lambda(i) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik}$ (az exp. órák összege)

Az 1. állítás miatt

Ha viszont adott Q és $\lambda(i)$, akkor $\Lambda = ?$

megad egy fejlődést az 1. def. szerint.

Ekkor $\Lambda_{ij} = \lambda(i) \cdot Q_{ij}$

Ez azért jó, mert

$$Q_{ij} = \frac{\Lambda_{ij}}{\sum_{k \in S} \Lambda_{ik}}$$

és $\lambda(i) = \sum_{k \in S} \Lambda_{ik}$

pont visszakaptuk, amit akartunk.

A példában: M/M/1:

1, $Q = ?$, $\lambda(i) = ?$

2, $\Lambda = ?$

2, $\Lambda = ?$

Hova tud ugrani, amikor ugrik?

Ha i-ben van, akkor $i+1$-be és $i-1$-be tud ugrani, ha $i \geq 1$. Ha $i = 0$, akkor 1-be tud ugrani.

Ekkor $\Lambda_{i\,i+1}$ és $\Lambda_{i\,i-1}$-et kell meghatározni.

ha $i \geq 1$.

$\Lambda_{i,i+1}$: Ez a paraméter amivel az exp. órának a paramétere, ami a következő beérkezésig eltelő idő hossza

$$\Lambda_{i,i+1} = \lambda \qquad \downarrow \; Exp(\lambda)$$

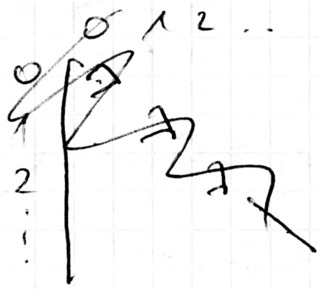
és $\Lambda_{i,i-1} = \mu$ ← az órák paramétereit határoztuk itt meg.

Ha $\Lambda_{01} = \lambda$

↑ üres rendszerből az 1 csomagot tartalmazóba ugrik

Itt egy óránk van, mert egy helyre ugorhat.

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \mu & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & \mu & \lambda \end{array}$$



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & 0 & & \emptyset \\ \mu & 0 & \lambda & & \\ 0 & \mu & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

1) $Q = ?$

$$Q_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$Q_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad i \geq 1\text{-re}$$

$$Q_{01} = 1$$

↑ 0-ból csak az 1-be ugorhat

A tartózkodási idők: $\lambda(i) = ?$ $i \geq 1$-re.

$$\lambda(i) = \lambda + \mu \qquad i \geq 1$$

illetve

$$\lambda(0) = \lambda \ , \text{ ha } i = 0.$$

<u>2. példa</u> M/M/1-PS
(processor sharing)

- A beérkező folyamat ugyanaz, mint M/M/1
- a csomagméret $Exp(\mu)$ eloszlású
- ha beérkezik egy csomag, azonnal elkezdik kiszolgálni
- ha k igény van a rendszerben, akkor a processzor kapacitásának $\frac{1}{k}$-ad részét kapja egy igény.

Eltérő folyamatnak más lehet az igénye.

$x(t)$ = t időben a kiszolgálóban lévő igények száma.

Tfh. $x(t) = i$
Akkor a következő ugrás $i+1$ és $i-1$-be ~~megy~~ történhet.

$$\Lambda_{i\,i+1} = \lambda$$

a következő beérkezésig eltelő idő exp. eloszlású

annyi időnként érkezik

$$\Lambda_{i\,i-1} = ?$$

az első kiszolgálásig mennyi idő telik el.

i csomag van benn

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_i$ a beérkező csomagok hossza,

ennyi időt kellene várni a kiszolgálásig teljes kapacitás esetén.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_i \sim Exp(\mu)$ (ezt feltettük).

~~A kiszolgálónál~~ $\frac{1}{i}$ -ed részét kapják, tehát
A kapacitásnak

$iY_1, iY_2, \ldots, iY_i$ időt kell várni a kiszolgálásig, ha csak az $\frac{1}{i}$ -ed részt kapják meg. → ez $Exp\left(\frac{\mu}{i}\right)$ eloszlású.

Az első kiszolgálásig eltelő idő =

$= \min \{ iY_1, \ldots, iY_i \}$

Ennek eloszlása

$$Exp\left(\frac{\mu}{i} + \frac{\mu}{i} + \ldots + \frac{\mu}{i}\right) = Exp(\mu)$$

Vagyis $\Lambda_{i\,i-1} = \mu$

Az M/M/1-ben is $\Lambda_{i\,i+1} = \lambda$

$\Lambda_{i\,i-1} = \mu$

Vagyis a processor sharing ugyanígy néz ki, mint a nem processor sharing.

↓

M/M/1 és M/M/1-PS eloszlásban ugyanúgy fejlődik.

~~Az ugyanis~~ 1. def. szerint

$$Q_{i\,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$Q_{i\,i-1} = \frac{\mu}{\lambda-\mu} \qquad i \geq 1$$

és $\lambda(i) = \lambda+\mu$ ← ezzel pont rövidítettük a következő eltéréig eltelő időt, mert a várható ettől $\frac{1}{\lambda+\mu}$

<u>Def 3</u>: Ez az igazi definíció

$(X(t), t \geq 0)$ folyamat folytonos idejű Markov-lánc az S diszkrét állapottéren, ha $\forall \underset{\text{idők}}{t, s} > 0$-ra $\underset{\text{állapotok}}{i, j} \in S$

és $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ időkre
és $i_1, i_2, \ldots, i_n$ állapotokra:

$$P(X(t+s) = j \mid X(t) = i, X(t_n = i_n, \ldots X(t_1) = i_1) =$$
$$= P(X(t+s) = j \mid X(t) = i)$$

elhagyjuk a múltat.

ha a $\underset{(X(t)=i)}{\text{jelen}}$ ismert, akkor a $\underset{X(t+s)}{\text{jövő}}$ és a $\underset{X(t_1), \ldots, X(t_n)}{\text{múlt}}$ függetlenek.

Az $\{X(t)\}$ időben homogén, folytonos idejű Markov-lánc, ha ~~$\forall t$~~ $P(X(t+s) = j \mid X(t) = i) = P(X(s) = j \mid X(0) = i) =$
$= P_{ij}(t)$

<u>Áll</u>: Az 1. és 2. definícióban időben homogén Markov-lán-

sok voltak.

Az is Markov-lánc, ha $(n-1)$, $(n-2)$-től függ.

ill. ugrásonként lépésekkel, időben folytonos

↓

<u>Def</u>: t idejű átmenet-valószínűségmátrix

$$P(t)$$

$|S| \times |S|$ mátrix $\qquad [P(t)]_{ij} = P(X(t)=j \mid X(0)=i)$

0-ban itt volt

<u>Def</u>: Kezdeti eloszlás(vektor):

$$\underset{\text{sorvektor}}{\underline{a}} = [a_i, \ i \in S] \quad a_i \geq 0 \quad \text{úgy, hogy} \ \sum_i a_i = 1$$

jelentése: $\qquad P(X(0)=i) = a_i$

0 időben ξ i-t vett fel.

<u>Kérdés</u>: Van-e olyan M mátrix, hogy $P(t) = M^t$ (akár pl. $t = \sqrt{\pi}$)?

Diszkrétben: $\qquad P^{(n)} = P^n$ volt.

∄ lehet olyan, hogy a Markov-folyamat véges idő alatt végtelen sokat ugrik → ilyenekkel nem foglalkozunk.

↓

<u>Def</u>: Egy folytonos idejű Markov-lánc reguláris, ha

$$P(\text{véges idő alatt } \infty \text{ sok ugrás}) = 0.$$

Mi csak reguláris Markov-láncokkal foglalkozunk.

Ha sok idő múlva ránézünk → mi a valség, hogy j-ben lesz: $\lim_{t \to \infty} P(X(t)=j)$

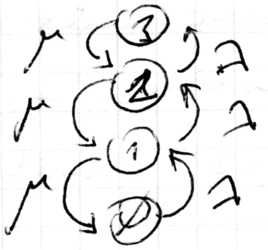
Valószínűségek és állapotteres felbontás

① Gráfreprezentáció

A gráfban az exp. órák paraméterei vannak.

Az irányított életen $(i \to j)$ λ_{ij} súly van.

pl. M/M/1 rendszerben



verkenyezhet.

② $P(X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \dots, X(t_n)=i_n \mid X(t)=i) =$

$t < t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$i, i_1, i_2, \dots, i_n$ használjuk a definíciót, hogy a jövő feltételesen függ a múlttól:

$$= P_{ii_1}(t_1 - t) \cdot \underbrace{P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1)}_{\text{felírható valószínűségek szorzataként}} \cdots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

③ Chapman–Kolmogorov

$$P(t+s) = P(t) \cdot P(s)$$

$[P(t+s)]_{ij} = P(X(t+s)=j \mid X(0)=i) =$ teljes valószínűség tételével

$(t+s)$ idő alatt eljut j-be úgy, hogy 0-ban i-ben volt

$$= \sum_{k \in S} \underbrace{P(X(t+s)=j \mid X(t)=k)}_{P_{kj}(s)} \cdot \underbrace{P(X(t)=k \mid X(0)=i)}_{P_{ik}(t)}$$

↑ Chapman–Kolmogorov.

Eljut t alatt i-ből k-ba, majd s alatt k-ból j-be

Ez a struktúra olyan, mint egy mátrix:

$$\Rightarrow \left[P(t+s)\right]_{ij} = \left[P(t)\cdot P(s)\right]_{ij}$$

(4.) Állapottéres felbontás

Azt mondják, hogy az állapottér a Q mátrix szerint bomlik fel.

A beágyazott Markov-lánc szerint lehet: a Q átmenet-valószínűségmátrix határozza meg a periódust és a visszatérőséget, valamint az érintkezésrelációt és az ekvivalenciaosztályokat.

Valamint az állapottéres felbontást is:

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$$

Q szerint.