

1. feladat (10+4=14 pont)

a) Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(n+4)}{n^2+4} x^n$ sor konvergenciatartományát!

b) Hol abszolút konvergens a sor?

2. feladat (15 pont)

Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

3. feladat (5+7+7=19 pont)

a) Határozza meg az alább adott függvényeknek a megadott pont körüli Taylor-sorát valamint a sor konvergenciasugarát!

a) $f(x) = \frac{1}{x+7}$, $x_0 = 0$; b) $g(x) = \frac{1}{x+7}$, $x_0 = 5$; c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}}$, $x_0 = 0$.

4. feladat (8 pont)

Határozza meg az $f(x) = (x-3)^2 + \sin(3x)$ függvény origó körüli harmadrendű Taylor-polinomját a Lagrange-féle maradéktaggal!

5. feladat (4+4+3=11 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy az $f_n(x)$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az $f(x)$ határfüggvényhez az I intervallumon? (Adja meg a definíciót!)

b) Hol létezik és mennyi az $f_n(x) = x^{2n+1}$ függvénysorozat határértéke?

c) Egyenletesen konvergens-e a b) pontban definiált függvénysorozat a $[0, 1]$ intervallumon? (Válaszát indokolja meg!)

6. feladat (6+9+5+5=25 pont)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{3x^2 + 2y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Hol folytonos a függvény? (Indokoljon!)

b) Adja meg a parciális deriváltakat mindenütt, ahol léteznek!

c) A *definíció segítségével* határozza meg az origóban a függvény $\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$ irányú iránymenti deriváltját!

d) Hol létezik a függvény gradiense? (Indokoljon!)

7. feladat (8 pont)

Legyen g kétszer folytonosan deriválható egyváltozós valós függvény, és

$$f(x, y) := g\left(\frac{3y}{x^2+1}\right).$$

Határozza meg az f'_x , f'_y , f''_{yx} és f''_{xy} parciális deriváltakat!