INFOANALÍZIS2 1.ZH

2016 október 12.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2\sin(2x).$$

2. Feladat. A kemencéből kivett kenyér 10 perc alatt 100 °C-ról 60 °C-ra hűl le. A környező levegő hőmérséklete 20 °C. Mikorra hűl le a kenyér 25 °C-ra?
(Használjuk fel a Newton-féle lehűlési törvényt, amely szerint egy test hőmérsékletének változási sebessége egyenesen arányos a környezet és a test hőmérsékletének különbségével.)

3. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 6y' + 13y = 39.$$

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2\sin(2x).$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x), \\ y_p''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x). \end{aligned}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{-4A + 10B + 6A}_{=2})\sin(2x) + (\underbrace{-4B - 10A + 6B}_{=0})\cos(2x) = 2\sin(2x).$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A = \frac{1}{26}, \quad B = \frac{5}{26}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá} &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{26}\sin(2x) + \frac{5}{26}\cos(2x), \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

2. Feladat. A kemencéből kivett kenyér 10 perc alatt 100 °C-ról 60 °C-ra hűl le. A környező levegő hőmérséklete 20 °C. Mikorra hűl le a kenyér 25 °C-ra?
(Használjuk fel a Newton-féle lehűlési törvényt, amely szerint egy test hőmérsékletének változási sebessége egyenesen arányos a környezet és a test hőmérsékletének különbségével.)

Megoldás. Jelölje $T(t)$ a test hőmérsékletét a t időpontban és legyen $T_0 = T(0) = 20\,°\mathrm{C}$ az állandónak tekintett környezeti hőmérséklet. Newton törvénye alapján a következő differenciálegyenlet írható fel, **2p**

$$T'(t) = k(T_0 - T(t)),$$

ahol $k > 0$, és mivel lehűlésről van szó, feltehetjük, hogy $T(t) > T_0$ minden valós t-re.
Az egyenlet megoldása **3p**

$$T(t) = T_0 + Ce^{-kt},$$

ahol **1p** C tetszőleges (konstans) valós szám.
A megadott adatokkal

$$T_0 = T(0) = 100 = 20 + C,$$

$$T(10) = 20 + Ce^{-10k},$$

ahonnan **1p**

$$C = 80,$$

1p

$$k = \frac{\log 2}{10},$$

tehát **1p**

$$T(t) = 20 + 80e^{-0.0693t}.$$

Jelölje t_1 azt az időpontot, amikor a kenyér 25 °C lesz.

$$T(t_1) = 25 = 20 + 80e^{-kt_1},$$

1p

$$t_1 = 10\frac{\log 16}{\log 2} = 40. \quad \blacksquare$$

---

3. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

Megoldás. A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni $\boxed{\textbf{2p}}$. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \frac{\frac{(n+1)^k}{(n+1)!}}{\frac{n^k}{n!}} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot 0 = 0 < 1, \quad \boxed{\textbf{2p}}$$

így a sor abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 6y' + 13y = 39.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{3x}\cos(2x) + c_2 e^{3x}\sin(2x).$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y_p(x) = A$$

alakban keressük. Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\textbf{2p}}$

$$A = 3$$

adódik. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá} &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^{3x}\cos(2x) + c_2 e^{3x}\sin(2x) + 3, \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Megoldás. A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni $\boxed{\textbf{2p}}$. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[\boxed{\textbf{1p}}]{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1,$$

így a sor abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.
