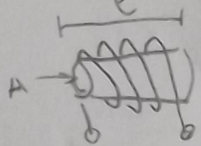
2013 10 09

Induktivitás

A tekercs olyan hálózati elem, amely képes mágneses energia tárolására



$\Phi = L \cdot i$ $\quad$ L – induktivitás

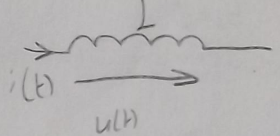
Wb $\quad$ H A

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot N^2 A}{\ell}$$

$$u = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \boxed{u = L \cdot \frac{di}{dt}}$$ a tekercs karakterisztikája

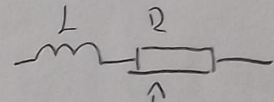
$$\boxed{i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t)\,dt} = \underbrace{\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} u(t)\,dt}_{i_0} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{\infty} u(t)\,dt = i_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{\infty} u(t)\,dt$$

kezdeti feltétel

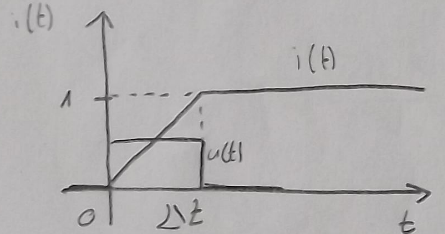


ideális tekercs

Valóságos tekercs egy modellje lehet



veszteségek figyelembevétele



$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{\Delta t} & 0 \le t \le \Delta t \\ 1 & t \ge \Delta t \end{cases}$$

$i(t) = at + b$ $\quad$ $b = 0$

$t = 0 \quad i = 0$

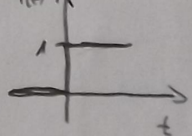
$t = \Delta t \quad i = 1$ $\quad$ $a = \frac{1}{\Delta t}$

$u(t) = ?$ $\quad$ $u(t) = L \cdot \frac{di}{d(t)}$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ L \cdot \frac{1}{\Delta t} & \text{ha } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{ha } t > \Delta t \end{cases}$$

ha $\Delta t \to 0 \Rightarrow$

$t = 0$ $\quad$ $i(t)$ ugrásszerűen változik



$i(-0) = 0$

$i(+0) = 1$

$\Rightarrow u(t) = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \infty$ $\quad$ -> ez nem lehet, mert $\quad$ $p = u(t) \cdot i(t) = \frac{L}{\Delta t^2} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \infty$

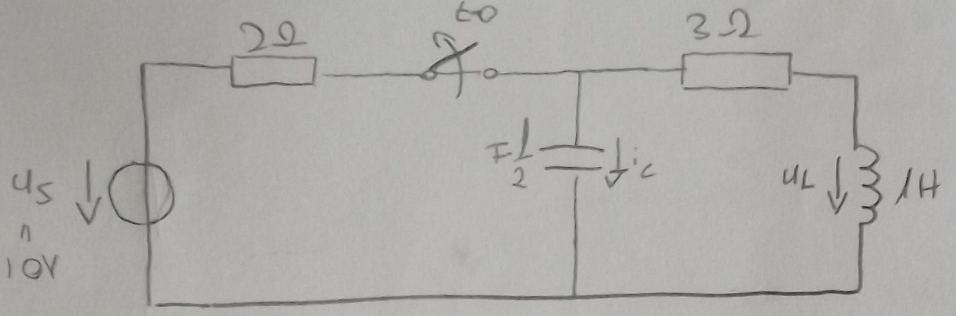
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{a tekercs árama nem változhat ugrásszerűen}}$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

A tekercsben tárolt mágneses energia $\quad$ $W = \int_{-\infty}^{t} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} u(t) i(t)\,dt =$

$$= \int_{-\infty}^{t} i(t) \cdot L \cdot \frac{di(t)}{dt}\,dt = L \cdot \int_{i(-\infty)=0}^{i(t)} i(\tau)\,di = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t),$$ ha a kezdeti feltétel nulla

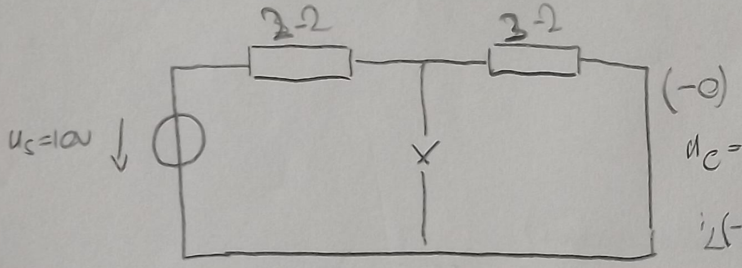
Példa



- $t<0$ esetén a hálózat állandósult állapotban van
- $t=0$ nyitom a kapcsolót
- Kérdés: $i_C(+0)=?$ $\quad u_L(+0)=?$

Megoldás:

1, $t<0$ esetén u_C és i_L meghatározása



(−0)

$$u_C = 10\,\frac{3}{3+2} = 6V$$

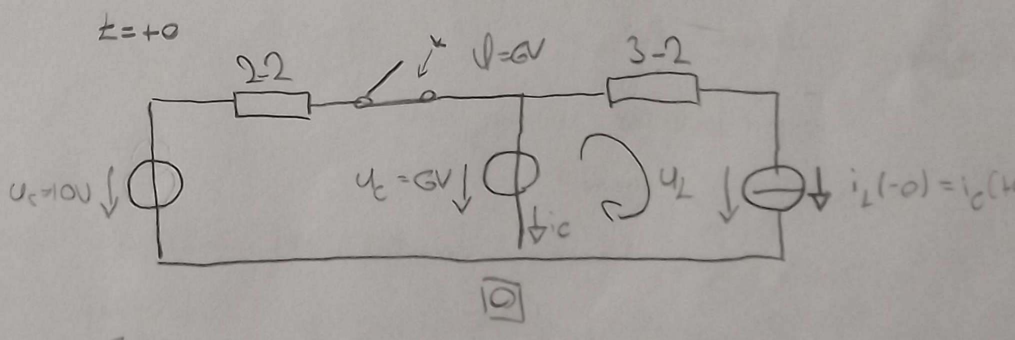
$$i_L(-0) = \frac{u_C(-0)}{3} = \frac{6}{3} = 2A$$

Mivel a kond. feszültsége és a tekercs árama nem változhat ugrásszerűen, tehát

$u_C(+0) = u_C(-0) = 6V$

$i_L(-0) = i_L(+0) = 2A$

$t=+0$



[0]

* rövidzár..
de miért?

$$\frac{6-10}{2} + i_C(+0) + 2 = 0 \Rightarrow i_C = 0A$$

$i(t)=?$

$U_L = 3\cdot 2 + u_C(+0) - 6 = 0 \qquad U_C(+0) = 0V$

$$\left.\begin{aligned} u_C &= 3 i_L + L\frac{di_L}{dt} \\ i_C = -i_L &= C\frac{du_C}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \dot{u}_0\ \ \overbrace{\frac{di_L}{dt}}^{i_C} &= -\frac{3}{L}\, i_L + u_C \qquad B=0 \\ \dot{u}_C \left\{ \frac{du_C}{dt} \right. &= -\frac{1}{C}\, i_L \qquad i = i_L \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} \qquad y = i$$

$$c^T = [1\ 0]$$

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Állapotváltozós normálalak:

▷ rendszerem: u_s, i_s ← gerjesztések
 - válasz

▷ új mennyiségeket vezetek be → állapot változók

↙ kond feszültsége ↘ tekercs árama

▷ gerj. és állapot → differenciális egyenletrendszer

ha b_D-a dinamikus kétpólusok száma akkor b_D diff egyenletet írok fel

⇒ meghatározom az állapotváltozóimat → meghatározom a válaszokat

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{C}}^T \underline{x} + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}$$

állapotváltozós normálalak

$$b_D \begin{cases} \dot{x}_k = \sum_{p=1}^{N} A_{kp} x_p + \sum_{p=1}^{N_L} B_{kp} u_p \end{cases}$$

N_L ← források száma

$k = 1 \ldots N_y$ ↑ a válaszok száma

$$y_k = \sum_{p=1}^{N} C_{kp} x_p + \sum_{p=1}^{N_L} D_{kp} u_p$$

$\boxed{2013\ 10\ 16}$

Elsőfokú hálózatok analízise (dinamikus hálózatokra)

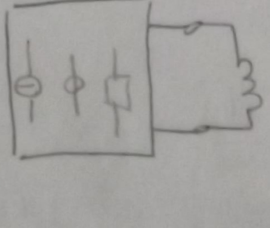
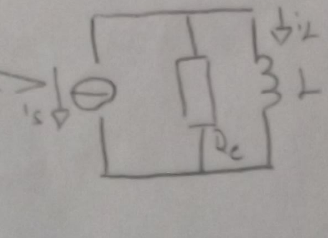
▷ olyan hálózat, melyben csak egy kondenzátor, vagy egy tekercs van.

Megoldási módszer:

1, Állapot változós normál alak

2, Kirchhoff egyenletek felírása

3, Norton vagy Thevenin helyettesítéssel "standard" alakra hozom a hálózatot
→ ez csak elsőfokú dinamikus hálózatokra működik.


⇒


$i_s = i_R + i_L$

$i_R = \frac{u_L}{R_e}$

$u_L = L \cdot i_L'$

$i_s = \frac{L}{R} \cdot i_L' + i_L$

$$\boxed{i_L' = \frac{R}{L} i_L + \frac{R}{L} i_s}$$

9.E

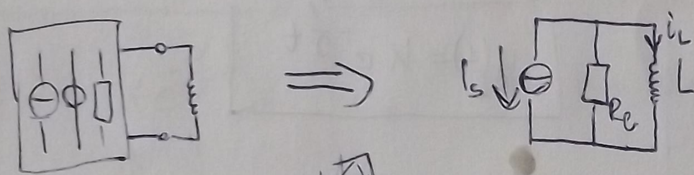
Felek 1.

Elsőfokú hálózatok analízise (dinamikus hálózatokra):

- olyan hálózat, melyben csak egy kondenzátor, vagy egy tekercs van.

Megoldási módszer:

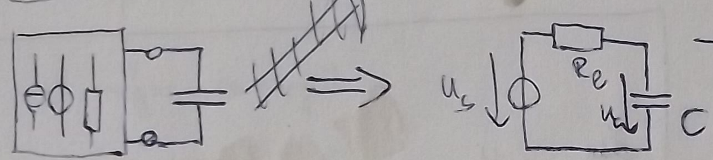
1. Állapotváltozós normálalak
2. Kirchoff egyenleteket felírom
3. Norton vagy Thevenin helyettesítéssel "standard" alakra hozom a hálózatot → Ez csak elsőfokú dinamikus hálózatokra működik.



$$i_L = i_R + i_L \qquad i_R = \frac{u_L}{R_e} \qquad u_L = L\cdot i_L'$$

$$i_s = \frac{L}{R} i_L' + i_L$$

$$\boxed{i_L' = -\frac{R}{L} i_L + \frac{R}{L} i_s}$$



$$\left.\begin{array}{l} u_s = u_R + u_c \\ u_R = R_i\, i_R \\ i = C\cdot u_c' \end{array}\right\} \begin{array}{l} u_R = R\cdot C\cdot u_c' \\ u_s = R\cdot C\cdot u_c' + u_c \end{array}$$

$$\boxed{u_c' = -\frac{1}{R_C} u_c + \frac{1}{R_C} u_s}$$

Általános alak:

$$\underbrace{\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} y(t) + u(t)}_{\text{A homogén egyenlet megoldása}}$$

$$y(t) = y_f(t) + y_g(t)$$

$y_f(t)$ ↓ szabad ö.t. (homogén dif. egyenlet teljes megoldása) ↓ tranziens viselkedés

$y_g(t)$ ↓ gerjesztett ö.t. inhomogén dif. egyenlet egy partikuláris megoldása a, Szabad válasz:

$$y'(t) = -\frac{1}{T} y(t)$$

- kitalálom a megoldást:

~~- kitalálom a megoldást:~~

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{állandó}}}{k} \cdot e^{\lambda t}$$

$$y'(t) = k \cdot e^{\lambda t} \cdot (\lambda t)' = k \lambda \cdot e^{\lambda t}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda k e^{\lambda t} = -\frac{1}{T} k e^{\lambda t}$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{T}}$$

$$\boxed{y_f(t) = k e^{-\frac{1}{T} t}}$$

- integrálással:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y}{T}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dt}{T}$$

$$\ln y = -\frac{1}{T} t + \underbrace{C_1}_{\ln k}$$

$$\ln y - \ln k = -\frac{1}{T} t$$

$$\ln \frac{y}{k} = -\frac{1}{T} t \Rightarrow \frac{y}{k} = e^{-\frac{1}{T} t}$$

$$\boxed{y_f(t) = k e^{-\frac{1}{T} t}}$$

Felel 1.

b, gerjesztett válasz:

$$y'(t) = -\frac{1}{T} y(t) + u(t)$$

- a gerjesztett válasz általában olyan alakú, mint a gerjesztés

$$u(t) = U_0 \cdot \varepsilon(t) \rightarrow t \rightarrow \infty \qquad y'(t) = 0$$

$$\frac{1}{T} y(t) + U_0 = 0 \Rightarrow y_g(t) = T U_0$$

---

c, $y(t) = K e^{-\frac{1}{T} t} + T U_0$ ← az elsőfokú differenciális egyenlet megoldása

kezdeti feltételek

↑

ezt még nem ismerjük

↓

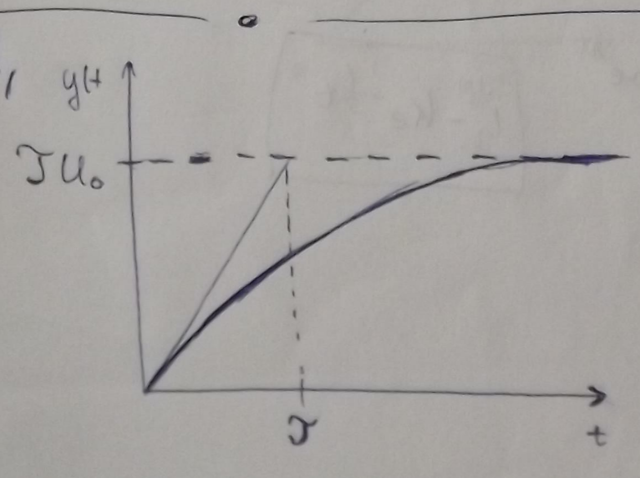
- Kezdeti feltételt kell ismernem, hogy a K-t meg tudjam határozni:

pl.: $t < 0 \quad y(t) = 0$ $\qquad y(-0) = y(+0)$ ← ez mindig igaz, ha u_C, i_L

$$0 = K \underbrace{e^{-\frac{1}{T} \cdot 0}}_{1} + T U_0 \Rightarrow K = -T U_0$$

$$\boxed{y(t) = -T U_0^{-\frac{1}{T} t} + T U_0 = T U_0 (1 + e^{-\frac{1}{T} t})}$$

---

d, 

$t = 0 \qquad t \rightarrow \infty$

$y(t) = 0 \qquad y(t) = T U_0$

$$y(t) = T U_0 (-e^{-\frac{1}{T} t}) \frac{1}{T}$$

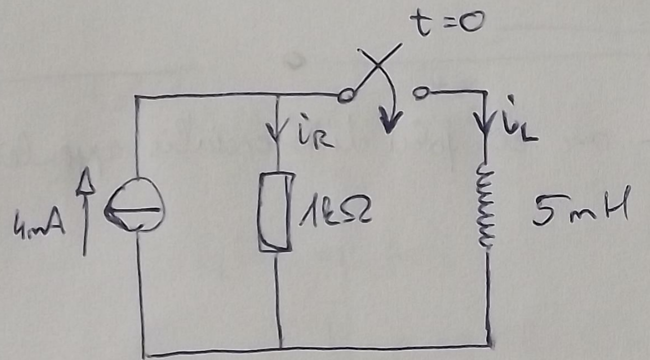
⇓

$$T = \frac{y(\infty) - y(0)}{y'(t)}$$

Megoldás menete:

1. $t<0$ esetén meghatározom a gerjesztett választ (állandósult állapot)
   → kezdeti feltételek
2. Felírom a differenciál egyenlet állandósult ~~..~~ normálalakját.
3. Meghatározom a szabad választ
4. Meghatározom a gerjesztett választ
5. A kezdeti feltételek segítségével meghatározom a megoldásban szereplő állandókat.

Példa:



A, a tekercs árama?

B, mennyi idő alatt lesz a tekercs árama 2mA?

A

(Megoldás menete:) 1. $-t<0$ $\quad i_L=0$

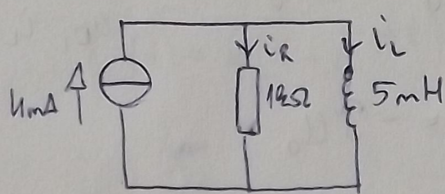
Koherens mértékegységrendszer:

~~mA, mH, kΩ, V~~

mA, kΩ, V, mH, μs $\left(V=\frac{mA\,mH}{\mu s}\right)$

$(V=mA\cdot k\Omega)$

2.



$4=i_R+i_L$ $\qquad i_R=\frac{u_L}{1}=5\,i_L'$ (1kΩ) $\qquad \boxed{i_L'=-\frac{1}{5}i_L+\frac{4}{5}}$

3. $i_L'=-\frac{1}{5}i_L$

$i_L=Ke^{\lambda t}$

$i_L=Ke^{-\frac{1}{5}t}$

$\lambda \cancel{K}e^{\lambda t}=-\frac{1}{5}\cancel{K}e^{\lambda t}$

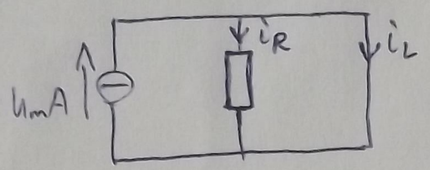
$\lambda=-\frac{1}{5}$

$\boxed{i_L^{(f)}=Ke^{-\frac{1}{5}t}}$

Jelek!

(Megoldás menete)

4. $t \to \infty$ $\quad i_L$ - rövidzár



$i_L^{(g)} = 4\,mA$

$t \to \infty \Rightarrow i_L' = 0$, mivel állandó a forrás árama

$$0 = -\frac{1}{5} i_L + \frac{4}{5} \Rightarrow \underline{\underline{i_L^g = 4\,mA}}$$

5. $t \geq 0$ $\quad i_L(t) = k e^{-\frac{1}{5}t} + 4$

$\uparrow ?$

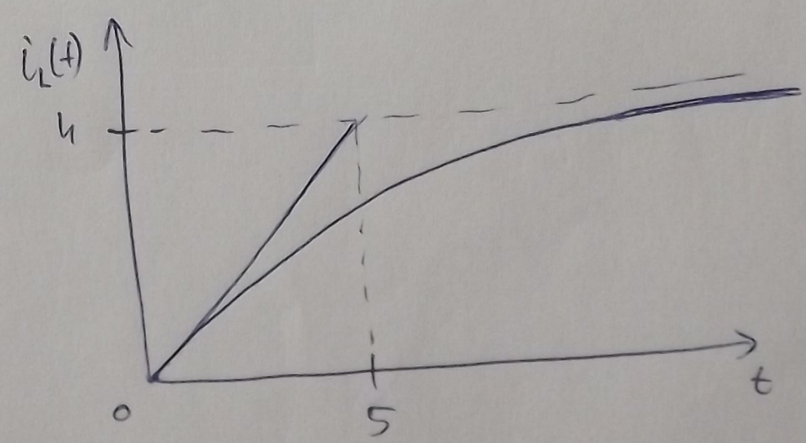
$i_L(-0) = i_L(+0)$

$0 = k + 4 \Rightarrow k = -4$

$\boxed{i_L(t) = 4(1 - e^{-\frac{1}{5}t})}$ ha $t \geq 0$

$i_L(t) = 0$, $t < 0$

$$i_L(t) = 4(1 - e^{-\frac{1}{5}t})\,\varepsilon(t)$$



B $i_{L_1} = 2\,mA \quad t = ?$

$$2 = 4\left(1 - e^{-\frac{1}{5}t_1}\right)$$

$$2 = 4 - 4e^{-\frac{1}{5}t_1}$$

$$e^{-\frac{1}{5}} = 0{,}5$$

$$t = -5\ln 0{,}5 = 3{,}47\,\mu s$$