

Villamosmérnök alapszak Fizika2 Nagy zárthelyi dolgozat, 2018. ápr. 19.	1.	2.	3.	4.	E1.	E2.	Mondat	Összes
iMSc pontok*	i	i	i	i	---	---	-----	i

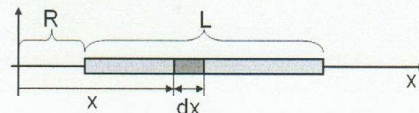
*A fizika2 nagy zárthelyin összesen 10 iMSc pont gyűjthető az 1. - 4. számú számítási feladatok **iMSc**-vel jelölt feladatrészeinek fakultatív megoldásával. Ezen feladatrészek kiértékelését csak akkor végezzük el, ha a hallgató a zh-n legalább 85%-os eredményt ért el. Az iMSc pontok a zh megoldásával gyűjtött pontszámhoz nem adódnak hozzá. A gyűjtött iMSc pontok a hallgatót a BME-VIK által meghatározott kedvezményekre jogosíthatják.

NÉV: _____

Neptun kód: _____

Előadó: Márkus / Sarkadi

1. Egy L hosszúságú, INHOMOGEN töltéseloszlású rúdát helyezünk el az ábra szerinti koordináta-rendszerben. A rúd vonalmenti töltéseloszlását a $\lambda(x) = \alpha x^3$ függvény adja meg, ahol α konstans paraméter.



- a) Fejezze ki α , R és L paraméterek segítségével az x koordinátájú pontban található kicsiny dx hosszúságú rúdelem dq töltését, $(0,5)$ valamint a rúdelem által keltett dE térerősség nagyságát az origóban! $(0,5)$

$$dq = \lambda(x) dx = \alpha x^3 dx$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\alpha x^3 dx}{x^2} = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} x dx$$

- b) Mennyi az α paraméter értéke, ha tudjuk, hogy a rúd teljes töltése Q ? Fejezze ki α -t Q , L és R paraméterek függvényében! (1)

$$Q = \int_R^{L+R} dq = \alpha \int_R^{L+R} x^3 dx = \alpha \left[\frac{x^4}{4} \right]_R^{L+R} = \frac{\alpha}{4} \left((L+R)^4 - R^4 \right)$$

$$\alpha = \frac{4Q}{(L+R)^4 - R^4}$$

- c) Fejezze ki az origóban mérhető elektromos térerősség nagyságát Q , R és L paraméterek függvényében! (1)

$$E = \int_R^{L+R} dE = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{L+R} x dx = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x^2}{2} \right]_R^{L+R} = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{(L+R)^2 - R^2}{2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4Q}{(L+R)^4 - R^4} \cdot \frac{(L+R)^2 - R^2}{2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(L+R)^2 - R^2}{(L+R)^4 - R^4}$$

iMSc) A c) feladatban kapott eredményt vizsgálja $L \rightarrow 0$ határesetben! Értelmezze a határérték fizikai jelentését! (2,5i)

$$E = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(L+R)^2 - R^2}{(L+R)^4 - R^4} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(L+R)^2 - R^2}{((L+R)^2 - R^2)((L+R)^2 + R^2)} =$$

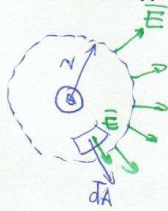
$$E = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(L+R)^2 + R^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(0+R)^2 + R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \leftarrow \text{Coulomb törvény}$$

Ha $L \rightarrow 0$, a rúd ponttöltésnek tekinthető.

A ponttöltéstől R távolságra a térerősség: $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}$

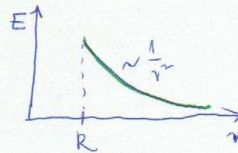
2. Adott egy R sugarú, Q töltésű, homogén töltéseloszlású gömb.

a) Gauss-tétel alkalmazásával számítsa ki az elektromos tér $E(r)$ nagyságát a gömbön kívül, a gömb középpontjától mért r távolság függvényében! ($r > R$) (1)



$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint |\vec{E}| |d\vec{A}| = |\vec{E}| \cdot \oint dA = |\vec{E}| \cdot 4r^2 \pi \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$



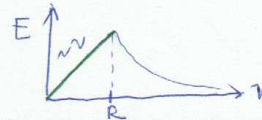
b) Számítsa ki az elektromos tér $E(r)$ nagyságát a gömbön belül, a gömb középpontjától mért r távolság függvényében! ($r < R$) (1)

Belső töltés: $q = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3} R^3 \pi} = \frac{r^3}{R^3} Q = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$

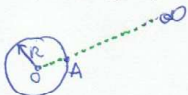


$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dots = |\vec{E}| 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} Q \cdot \frac{r^3}{R^3} = |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}$$



c) Mekkora a gömb felszínének potenciálja egy végtelen távoli ponthoz képest? Mekkora a gömb középpontjának potenciálja a gömb felszínéhez képest? (1)

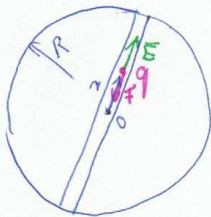


$$U_{A\infty} = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$U_{0A} = - \int_A^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_R^0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} \cdot dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^0 = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \left(0 - \frac{R^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$U_{0A} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

IMSC) A gömböt átfúrjuk egyik átmérője mentén. A vékony furatba belejuttatunk egy $-q$ negatív töltésű, m tömegű ponttöltést. Igazolja, hogy a furatban könnyen mozgó ponttöltés harmonikus rezgőmozgást végez, számítsa ki a rezgés körfrekvenciáját! (2,5i)



$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \quad F = -qE = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r$$

Belülük, hogy: $F \propto -r \Rightarrow$ az erő $\propto -r$ hasonló a rugóerőhöz

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F = m\ddot{r}$$

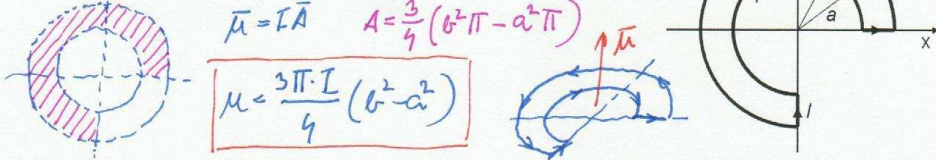
$$-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} r = m\ddot{r} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3 m} r$$

Harmonikus rezgés alap-egyenlete: $\ddot{r} = -\omega^2 r$

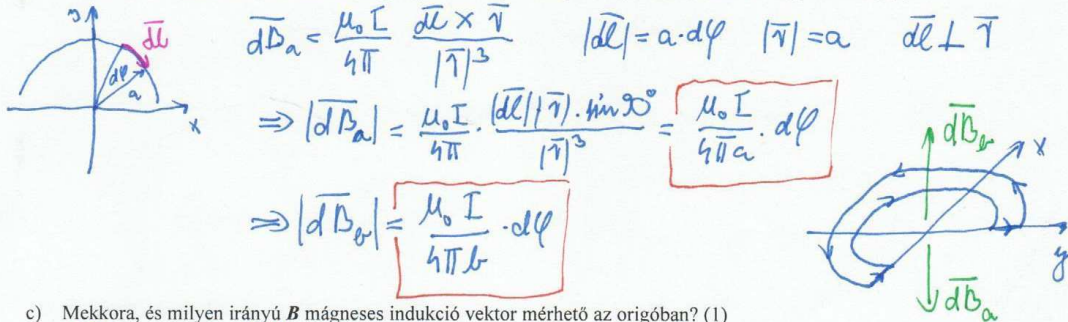
$$\omega = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$$

3. Adott egy I árammal átjárt vezetékurok, mely áll egy a , illetve egy b sugarú háromnegyedkörívkből, valamint az ívek végeit összekötő egyenes szakaszokból az ábra szerint.

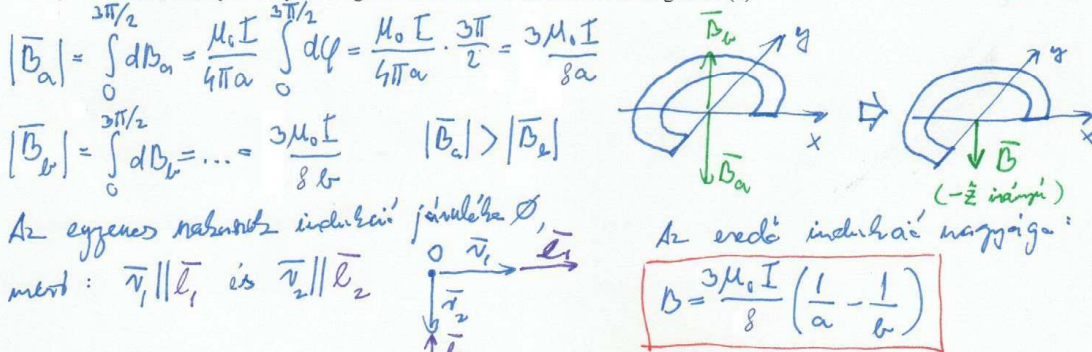
- a) Mekkora a vezető hurok mágneses momentuma? (1)



- b) Fejezze ki az a sugarú vezető ív kicsiny $d\varphi$ középponti szög alatt látszó darabkája által keltett $d\vec{B}_a$ mágneses indukció járulékanak nagyságát az origóban! (0,5) Fejezze ki a b sugarú ív kicsiny darabjának $d\vec{B}_b$ mágneses indukció járulékanak nagyságát is! Milyen irányba mutat a $d\vec{B}_a$ illetve a $d\vec{B}_b$ vektor? (0,5)

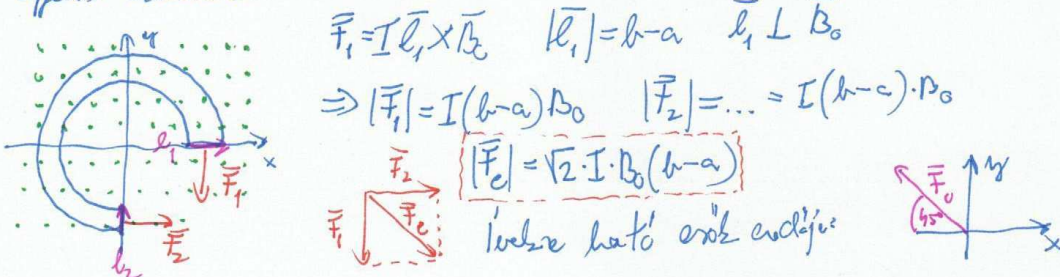


- c) Mekkora, és milyen irányú \vec{B} mágneses indukció vektor mérhető az origóban? (1)

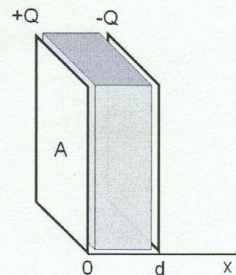


IMSC A vezetőhurokot az ábra síkjára merőleges, ábra síkjából kifelé mutató B_0 indukciójú homogén mágneses térbe helyezzük. Mekkora erő hat az a és b sugarú íves vezeték szakaszokra együttesen? (2,5i)

Tudjuk, hogy homogén B_0 térbe helyezett hurokba ható erő eredője zérus, tehát az íves szakaszokra összesen ugyanarra, de ellentétes irányú erő hat, mint az egyenes szakaszokra összesen: \rightarrow elég csak az egyenes szakaszokra ható erőket kiszámolni:



4. Adott egy Q töltésű síkkondenzátor, melynek fegyverzetei A területűek, a fegyverzetek távolsága d . A lemezek közti teret INHOMOGÉN dielektrikum tölti ki. Az anyag relatív dielektromos állandója $\varepsilon(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2d}}$ függvény szerint változik az x helykoordináta függvényében.



- a) Mekkora lenne a lemezek közt mérhető elektromos tér E_0 nagysága, ha a kondenzátor lemezek közt VÁKUUM lenne? (1)

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

- b) Határozza meg az elektromos térerősség $E(x)$ nagyságát az x helykoordináta függvényében a dielektrikum belsejében! (0,5) valamint számítsa ki a fegyverzetek közt mérhető feszültséget! (1)

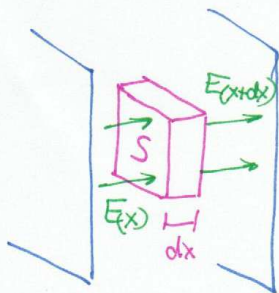
$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon(x)} = \frac{Q}{A\varepsilon_0\varepsilon(x)} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{2d}\right)$$

$$U = -\int_d^0 E dx = -\frac{Q}{A\varepsilon_0} \int_d^0 \left(1 - \frac{x}{2d}\right) dx = -\frac{Q}{A\varepsilon_0} \left[x - \frac{x^2}{4d} \right]_d^0 = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \left(d - \frac{d^2}{4d} \right) = \frac{3Qd}{4A\varepsilon_0}$$

- c) Mekkora a kondenzátor kapacitása? (0,5)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{3Qd}{4A\varepsilon_0}} = \frac{4A\varepsilon_0}{3d}$$

IMSC) Határozza meg az inhomogén dielektrikumban indukált térfogati töltéssűrűség $\rho(x)$ nagyságát az x helykoordináta függvényében! (2,5)



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow -E(x)S + E(x+dx)S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$q = \rho(x) dV = \rho(x) S \cdot dx \Rightarrow S(E(x+dx) - E(x)) = \frac{S\rho(x)}{\varepsilon_0} dx$$

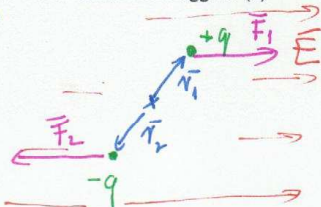
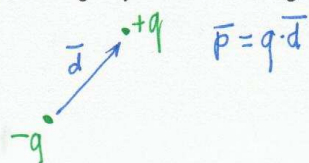
$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{E(x+dx) - E(x)}{dx} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \cdot \left(0 - \frac{1}{2d}\right) = -\frac{Q}{2dA\varepsilon_0}$$

$$\rho(x) = -\varepsilon_0 \frac{Q}{2dA\varepsilon_0} = -\frac{Q}{2Ad}$$

Kifejtendő kérdések

1. Készítsen ábrát egy elektromos dipólrról! (0,5) Definiálja matematikai összefüggés segítségével a dipólmomentum vektort az ábrán feltüntetett fizikai mennyiségekkel kifejezve. (0,5) Új ábrán tüntesse fel egy homogén elektromos erőterbe helyezett általános helyzetű dipólra ható erőket, Fejezze ki az erő vektorokat matematikai összefüggés segítségével! (1) Vezesse le a homogén erőterbe helyezett általános helyzetű dipólra ható forgatónyomaték vektort megadó matematikai összefüggést! (1)



$$\vec{F}_1 = q \cdot \vec{E} \quad \vec{F}_2 = -q \vec{E}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{d}}{2} \quad \vec{r}_2 = -\frac{\vec{d}}{2}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \frac{q}{2} \cdot \vec{d} \times \vec{E}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \frac{q}{2} (-\vec{d}) \times (-\vec{E})$$

$$M_2 = \frac{q}{2} \vec{d} \times \vec{E} = \vec{M}_1$$

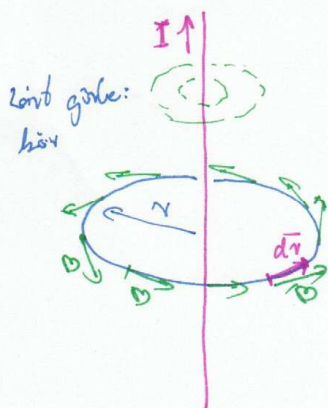
Homogén erőterbe helyezett dipólra ható forgatónyomaték:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 2\vec{M}_1 = q \vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

2. Írja fel az Ampère-féle gerjesztési törvényt matematikai alakban, és fogalmazza meg a törvényt egész mondatban is! (1) Adja meg a felírt törvényben szereplő fizikai mennyiségek SI mértékegységeit! (1) Mutassa meg, hogyan alkalmazható az Ampère-törvény egy hosszú, egyenes, áramjárta vezető körül kialakuló mágneses tér indukcióvektorainak meghatározására a vezetőtől mért távolság függvényében! (1)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

It mágneses indukcióvektor tetraédikus zárt görbére vett integrálja megegyezik a zárt görbe által határolt felületen átfolyó áramok μ_0 -szorozásával.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int |\vec{B}| |d\vec{r}| = |\vec{B}| \int |d\vec{r}| = \dots$$

Mert $\vec{B} \parallel d\vec{r}$ Forgásszimmetria miatt $|\vec{B}|$ a kör minden pontjában ugyanakkora.

$$\mu_0 I = |\vec{B}| \int |d\vec{r}| = |\vec{B}| \cdot 2\pi r \Rightarrow$$

Kör körléne

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

$$[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$$

$$[dr] = m$$

$$[\mu_0] = \frac{Vs}{Am} = \frac{Tm}{A}$$

$$[I] = A$$

Kiegészítendő mondatok

Egészítse ki az alábbi hiányos mondatokat úgy a megfelelő szavakkal, szókapcsolatokkal, matematikai kifejezésekkel (skalár-vektor megkülönböztetés), hogy azok a Fizika2 tantárgy színvonalának megfelelő, fizikailag helyes állításokat fogalmazzanak meg!

1. Egy megdörzsölt műanyagrúd a semleges töltésű papírszeletkéket az *elektromos megráadás* jelensége miatt képes magához vonzani.
2. Két egyforma méretű fémgolyót helyezünk el egymástól adott távolságra. Az egyik 4 C, a másik -2 C töltésű. A golyókat összeérintjük, majd újra a kezdeti pozícióba helyezzük őket. A golyók közt fellépő Coulomb-erő nagysága *$1/8$* -szoros a kezdeti helyzetben mérhető erőnek.
3. Egy villanymotort 12 V-os akkumulátorra kötöttünk, és 6 J mechanikai munkát végeztettünk vele. A motoron legalább *0,5* Coulomb töltés folyt át.
4. Egy *pozitív* töltésű ponttöltés közelében magasabb a potenciál, mint tőle távolabb.
5. Homogén elektromos erőterbe helyezett elektromos dipólra ható eredő erő nagysága *zérus*.
6. A kapacitás definíciója a fizikai mennyiségek konvencionális megjelölésével: *$C = \frac{Q}{U}$* . Mértékegysége: *$1 \frac{C}{V} = 1 F$ (Farad)*.
7. A differenciális Ohm-törvény matematikai alakja: *$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$* ahol σ a *fajlagos vezetőképesség* jelöli.
8. A fémek fajlagos ellenállása a hőmérséklet növekedésével általában *nö*.
9. *Homogén* mágneses térben az indukcióvektorokra merőleges sebességgel rendelkező ponttöltés körpályára áll.
10. Mágneses térbe helyezett, általános helyzetű mágneses dipólra ható forgatónyomaték vektorát a *$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$* összefüggés adja meg.
11. Külső mágneses tér hiányában a *diámmágneses* anyagok atomjai nem rendelkeznek mágneses momentummal.
12. A ferromágneses anyagokban az atomi mágneses momentumok zárt tartományokban, úgynevezett *doménekben* belül azonos irányba mutatnak.