Matematika A2a
2012/13/II. U0, W0 kurzus
2. vizsga dolgozat
2013. 06. 06. 10.15–11.45

Név: ______________________

Neptun kód: ______________

Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Határozza meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=4x^2+2xy-5y^2+2$ függvény lokális szélsőértékeit. *(10 p.)*

A függvénynek azon $P\in\mathbb{R}^2$ pontokban lehet szélsőértéke, melyekre $(\mathrm{D}f)(P)=0$, vagyis $(\partial_x f)(P)=0$ és $(\partial_y f)(P)=0$ teljesül.

$$(\partial_x f)(x,y)=8x+2y=0$$
$$(\partial_y f)(x,y)=2x-10y=0$$

Tehát a függvénynek csak a $P=(0,0)$ pontban lehet lokális szélsőértéke.
A másodrendű deriváltakból álló mátrix

$$(\mathrm{D}^2 f)(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_x\partial_x f & \partial_x\partial_y f\\ \partial_y\partial_x f & \partial_y\partial_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & -10\end{pmatrix}.$$

Mivel $\det A<0$, ezért az A mátrix sajátértékei ellentétes előjelűek, vagyis az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke a P pontban.

2/a.) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n^3+2)4^n}{n^5+5^n}$ sor? *(5 p.)*

2/b.) Határozza meg a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(2x^2+3y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ határértéket, ha létezik. *(5 p.)*

2/a Felhasználjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+2}=1$, valamint minden $n\geq 5$ esetén teljesülő

$$5=\sqrt[n]{0+5^n}\leq\sqrt[n]{n^5+5^n}\leq 5\sqrt[n]{2}$$

egyenlőtlenség miatt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5+5^n}=5$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(n^3+2)4^n}{n^5+5^n}\right|}=\frac{4}{5}<1,$$

vagyis a sor Cauchy-féle gyökkritérium értelmében konvergens.
2/b Polárkoordinátákkal számolva:

$$\lim_{r\to0}\frac{\sin r^2\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)}{r}=\lim_{r\to0}\frac{\sin r^2\left(2+\sin^2\varphi\right)}{r^2\left(2+\sin^2\varphi\right)}\cdot r\left(2+\sin^2\varphi\right).$$

Mivel $r\mapsto 2+\sin^2\varphi(r)$ korátos függvény, ezért

$$\lim_{r\to0}\frac{\sin r^2\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)}{r}=0.$$

3. Adja meg az *(10 p.)*

$$5x - y + 2z + v = 7,\ 2x + y + 4z - 2v = 1,\ x - 3y - 6z + 5v = 0$$

egyenletrendszer összes megoldását.

Az egyenletek rendszere más sorrendben, és egyszerűsítve

$$\begin{cases} x - 3y - 6z + 5v = 0 \\ 2x + y + 4z - 2v = 1 \\ 5x - y + 2z + v = 7. \end{cases}$$

Az első egyenletet kétszeresét kivonva a másodikból és a ötszörösét a harmadikból az

$$\begin{cases} x - 3y - 6z + 5v = 0 \\ 7y + 16z - 12v = 1 \\ 14y + 32z - 24v = 7. \end{cases}$$

egyenletrendszer adódik, melynek az utolsó két egyenlete ellenmondásra vezet, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása.

4. Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{10^n}$. *(10 p.)*

a. Egyenletesen konvergens-e a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor a $[0, 1]$ halmazon?

b. Számolja ki az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}\,x$$

összeg értékét.

4/a. Weierstrass-tétel értelmében igen, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [0, 1]$ esetén $\dfrac{x^n}{10^n} \le \dfrac{1}{10^n}$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^n < \infty$.

4/b. Mivel a függvénysor folytonos függvényekből áll, és egyenletes a konvergencia, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{10^n}\ \mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{x}{10}}\ \mathrm{d}\,x =$$

$$= 10 \int_0^1 \frac{1}{10 - x}\ \mathrm{d}\,x = 10\,[-\ln(10 - x)]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= 10\,(-\ln 9 + \ln 10) = 10 \ln \frac{10}{9}.$$

5. Számolja ki az *(10 p.)*

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 15 - x^2 - y^2,\ 0 \le x\right\}$$

halmaz térfogatát.

Hengerkoordinátákban felírva

$$U = \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \mathbb{R}_0^+,\ 2r \le z \le 15 - r^2,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

A $2r \le 15 - r^2$ és a $0 \le r$ egyenlőtlenség miatt $r \in [0,3]$. Ez alapján

$$V = \iiint_U 1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_{2r}^{15-r^2} (1 \cdot r)\, \mathrm{d}\, z\, \mathrm{d}\, r\, \mathrm{d}\, \varphi =$$
$$= \pi \int_0^3 r\left(15 - r^2 - 2r\right) \mathrm{d}\, r = \pi\left(15\frac{3^2}{2} - \frac{3^4}{4} - 2\frac{3^3}{3}\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{270 - 81 - 72}{4}\right) = \frac{117\pi}{4}.$$

6. Definíciók és tételek. *(10 p.)*

a. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ és $a \in \mathbb{R}^3$. Definíció szerint mit jelent, hogy az f függvény folytonos az a pontban?

b. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definíció szerint mit jelent, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez?

c. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Milyen feltétel mellett garantálja Weierstrass tétele, a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletes konvergenciáját?

a. Az a pont eleme a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaznak, valamint

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \qquad \|x - a\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \delta.$$

b. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \big(n > N \ \to\ \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big)$.

c. Ha a minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $a_n \in \mathbb{R}_0^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra $|f_n(x)| < a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, akkor a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.